# ２節 いろいろな数列

## ❶ 数列の和と記号 ∑

### 和の記号 ∑

（教科書 p.23）

**例1**

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(2k-1)=$

$=$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}k^2=$

$=$

**問1** 次の和を，記号 ∑ を用いずに表せ。また，その値を計算せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(3k+2)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}k^2$

(3) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}5^j$

**例2**

(1) $1+2+3+\cdots+n=$

(2) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6=$

**問2** 次の和を，記号 ∑ を用いて表せ。

(1) $2+4+6+\cdots+2n$

(2) $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+4\cdot6$

### 自然数の累乗の和

（教科書 p.24）

**例3** $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=$ $=$

**問3** 次の和を求めよ。

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+29^2$

**問4** 等式 $k^4-(k-1)^4=4k^3-6k^2+4k-1$ を利用して

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

が成り立つことを示せ。

数列の各項が定数 $c$ である場合には

$$\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+\cdots+c}_{n\text{個}}=nc$$

である。とくに，$c=1$の場合は（①　　　　　　　　　）である。

以上をまとめると，次のようになる。

和の公式

$$\sum_{k=1}^{n}c=nc \quad c\text{は定数} \qquad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad \sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

**例4**

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}5=$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k=$ 　　　　　　$=$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}k^2=$ 　　　　　　$=$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^3=$ 　　　　　　$=$ 　$=$

**問5** 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{40}k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} k^2$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^3$

初項 $a$，公比 $r(r \neq 1)$ の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和の公式は，記号 $\sum$ を用いると次のようになる。

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}}$$

**例5**

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} 3\cdot(-2)^{k-1} = \qquad\qquad =$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 3^{k-1} = \qquad\qquad =$

**問6** 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 2\cdot 3^{k-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-2)^{k-1}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 5^k$

## 記号 ∑ の性質

（教科書 p.26）

| 記号 ∑ の性質 |
| --- |
| $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k}$ $\quad$ $c$ は定数 |

**例6**

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+1) = \qquad\qquad =$

$=$

$=$

**問7** 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+2)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$

**例7** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)=$

$=$

$=$

$=$

$=$

$\frac{1}{6}n$ をくくり出す

$=$

$=$

**問8** 次の和を求めよ。

p.34 Training 10

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2k(3k+2)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(3k+2)(k-1)$

**例題 1** 連続する 2 つの自然数の積からなる数列

$1\cdot2,\ 2\cdot3,\ 3\cdot4,\ 4\cdot5,\ \cdots$

の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ。

**解**

**問9** 次の数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ。 p.34 Training 11 p.46 LevelUp 4-6

$1\cdot 1,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 5,\ 4\cdot 7,\ \cdots$

## ❷ 階差数列と数列の和

### 階差数列

（教科書 p.28）

一般に，数列 $\{a_n\}$ に対して，隣り合う項の差を

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とするとき，この数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の（② 　　　　　　）という。

**例8** 数列 2, 3, 5, 9, 17, … の階差数列は

となり，初項（　　　　），公比（　　　　）の等比数列である。

**問 10** 次の数列の階差数列の初項から第 5 項までを求めよ。

2, 4, 9, 17, 28, …

数列とその階差数列について，次の公式が成り立つ。

| 階差数列を用いて一般項を表す公式 |
|---|
| 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき $$\boldsymbol{a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$$ |

**例題 2** 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$4,\ 7,\ 12,\ 19,\ 28,\ 39,\ \cdots$

**解**

**問 11** 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 p.34 Training 12

(1) $1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ 37,\ \cdots$

(2) 3, 4, 7, 16, 43, 124, 367, …

## 数列の和と一般項

（教科書 p.30）

| 数列の和と一般項 |
|---|
| 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とすると<br>$\boldsymbol{a_1 = S_1}$<br>$n \geqq 2$ のとき　$\boldsymbol{a_n = S_n - S_{n-1}}$ |

**例題 3** 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が次のように与えられているとき，一般項を求めよ。

$$S_n = n^3 - n$$

**解**

**問 12** 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が次のように与えられているとき，一般項を求めよ。

p.34 Training 13

$$S_n = n^2 + 3n$$

# ③ いろいろな数列

## 分数で表された数列の和

（教科書 p.31）

**例題 4** 次の和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

**解**

**問 13** $\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}$ が成り立つことを利用して，次の和 $S_n$ を求めよ。

p.34 Training 14　p.46 Level Up 7

$$S_n=\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot7}+\cdots+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

## 少し複雑な数列

（教科書 p.32）

**例題 5** 次の和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n=1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots+n\cdot3^{n-1}$$

**考え方** $S_n$ は等差数列　$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$

と，公比 3 の等比数列　$1,\ 3,\ 3^2,\ \cdots,\ 3^{n-1}$

の対応する各項の積の和である。

等比数列の和の導き方と同様に $S_n-3S_n$ を計算する。

**解**

**問 14** 次の和 $S_n$ を求めよ。 p.34 Training 15

$$S_n = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots + n\cdot 2^{n-1}$$

**例題 6** 正の奇数を小さい方から並べた列を次のような群に分け，第 $n$ 群には $n$ 個の数が入るようにする。

| 第 1 群 | 第 2 群 | 第 3 群 | 第 4 群 | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3，5 | 7，9，11 | 13，15，17，19 | … |

(1)　第 $n$ 群の最初の項を求めよ。

(2)　第 $n$ 群の項の総和を求めよ。

**解**

**問 15** 自然数の列を次のような群に分け，第 $n$ 群には $2n$ 個の数が入るようにする。

1，2 | 3，4，5，6 | 7，8，9，10，11，12 | …

p.34 Training 16　p.47 Level Up 8

(1)　第 $n$ 群の最初の項を求めよ。

(2)　第 $n$ 群の項の総和を求めよ。

## Training

（教科書 p.34）

**10** 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+3)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(3k-5)$

(3) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-12j+6)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k+3)$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+3)(2k-1)$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}4\,(-3)^{k-1}$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2^k - k^2)$

(8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}7^k$

(9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3 - k)$

**11** 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ。

(1) $1\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 3\cdot 7,\ 4\cdot 9,\ \cdots$

(2) $2\cdot(-3),\ 4\cdot(-5),\ 6\cdot(-7),\ 8\cdot(-9),\ \cdots$

**12** 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 4, 10, 20, 34, 52, …

(2) 1, 3, 7, 15, 31, …

**13** 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が次のように与えられているとき，一般項を求めよ。

$S_n = 3^n - 1$

**14** $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$ を利用して，次の和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

**15** 次の和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n=3\cdot 2+6\cdot 2^2+9\cdot 2^3+12\cdot 2^4+\cdots+3n\cdot 2^n$$

**16** 自然数の列を次のような群に分け，第 $n$ 群には $(2n-1)$ 個の数が入るようにする。

$1 \mid 2,\ 3,\ 4 \mid 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \mid 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16 \mid \cdots$

(1) 第 $n$ 群の最初の項を求めよ。

(2) 2020 は第何群の第何番目の項か。