

[Level Up]

(教科書 p.46~47)

1 1から100までの自然数のうち、次の条件を満たす数の和を求めよ。

(1) 3で割り切れる。

(2) 3でも4でも割り切れる。

(3) 3または4で割り切れる。

(4) 3で割り切れるが4で割り切れない。

2 次の2つの等差数列に共通に含まれる数を小さい方から順に並べてできる数列を $\{a_n\}$ とする。

1, 3, 5, 7, 9, ..., 999

3, 6, 9, 12, 15, ..., 999

(1) 数列 $\{a_n\}$ は等差数列になる。その初項と公差を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の項の総和を求めよ。

3 初項が-100、公差が6である等差数列 $\{a_n\}$ について

(1) 初めて正の項が現れるのは第何項か。

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n の最小値とそのときの n の値を求めよ。

4 次の数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$2, 2 + 4, 2 + 4 + 6, 2 + 4 + 6 + 8, \dots$$

6 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また、初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$1, 11, 111, 1111, 11111, \dots$$

5 次の和を求めよ。

$$1 \cdot n + 2(n - 1) + 3(n - 2) + \dots + (n - 1) \cdot 2 + n \cdot 1$$

7 $\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ を計算せよ。また、その結果を利用して次の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

- 8 数列 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ について、次の問に答えよ。
- (1) $\frac{1}{17}$ は、この数列の第何項か。
- (2) この数列の第 200 項は何か。

9 平面上に n 本の直線があって、どの2本も平行でなく、また、どの3本も同一の点で交わらないとする。これらの直線の交点の総数を a_n とするとき、次の問に答えよ。

(1) a_{n+1} を a_n で表せ。

(2) a_n を求めよ。

10 $a_1 = 3, a_{n+1} = 5a_n + 2 \cdot 3^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められた数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくと、 b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(2) b_n を利用して a_n を求めよ。

11 $a_1 = 5, a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+3}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められた数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと、 b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(2) b_n を利用して a_n を求めよ。

12 n を 2 以上の自然数とするとき、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

- 13 数列 $1, 1+2+1, 1+2+3+2+1, 1+2+3+4+3+2+1, \dots$ がある。
- (1) この数列 $\{a_n\}$ の各項を計算することにより、一般項を推定せよ。

- (2) (1)の推定が正しいことを、数学的帰納法を用いて証明せよ。