練習問題A

（教科書 p.228）

1 関数 $f(x) = -2x^2 + 18$ について，-2 から a までの平均変化率と，b から $b+4$ までの平均変化率が，ともに $x = 1$ における微分係数 $f'(1)$ に等しい。このとき，定数 a, b の値を求めよ。

2 3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + b$ が $x = -2$ で極大値 6 をとるような定数 a, b の値を求めよ。また，極小値を求めよ。

3 3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + ax + 1$ が極値をもたないように，定数 a の値の範囲を定めよ。

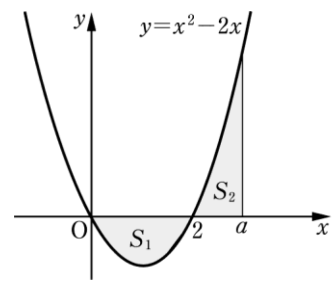
4 3 次方程式 $x^3-3x-a=0$ が異なる正の解を 2 個，負の解を 1 個もつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

5 $x \geqq 0$ のとき，不等式 $ax^3+3 \geqq x^2$ が成り立つように，正の定数 a の値の範囲を定めよ。

6 点 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ から曲線 $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+2x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

7 等式 $f(x)=x^2+2\int_{-1}^{3} xf(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

8 放物線 $y=x^2-2x$ がある。この放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を S_1，この放物線の $x \geqq 2$ の部分と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた部分の面積を S_2 とするとき，$S_1=S_2$ となる定数 a の値を求めよ。ただし，$a>2$ とする。



練習問題B

（教科書 p.229）

9　3 次関数 $f(x)$ は $x=2$ で極小値 3 をとり，$x=4$ で極大値 5 をとる。

このとき，関数 $f(x)$ を求めよ。

１０　関数 $f(x)=x(x-3)^2$ について，次の問に答えよ。

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ。

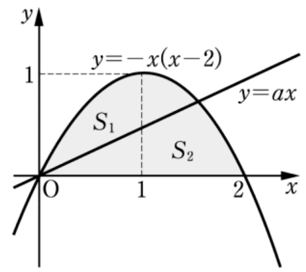
(2)　a を正の定数とするとき，区間 $0 \leqq x \leqq a$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

１１　次の x についての関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

$$f(x)=\int_0^x 3t(t-2)dt$$

１２　放物線 $y=-x(x-2)$ と x 軸で囲まれた図形を直線 $y=ax$ で

右の図のような 2 つの部分に分けるとき，上側の部分の面積を S_1，下側の部分の面積を S_2 とする。このとき，$S_1:S_2=1:7$ となるような定数a の値を求めよ。



１３ 2 つの放物線 $y=x^2+4x$ を C_1，$y=x^2-4x+8$ を C_2 とする。このとき，C_1 と C_2 のどちらにも接する接線 l の方程式を求めよ。また，C_1 と C_2 および l で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

１４ $f(x)$ が 1 次関数のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\left\{\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2 < \int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx$$

１５　$f(x)=|\ x-t\ |$ とするとき，$\int_0^2 f(x)\,dx$ を求めよ。ただし，$t>0$ とする。

練習問題Ａ

（教科書 p.228）

1 関数 $f(x)=-2x^2+18$ について，-2 から a までの平均変化率と，b から $b+4$ までの平均変化率が，ともに $x=1$ における微分係数 $f'(1)$ に等しい。このとき，定数 a, b の値を求めよ。

$f'(x)=-4x$ より　$f'(1)=-4$

$$\frac{f(a)-f(-2)}{a-(-2)}$$
$$=\frac{(-2a^2+18)-10}{a+2}$$
$$=\frac{-2a^2+8}{a+2}$$
$$=\frac{-2(a+2)(a-2)}{a+2}$$
$$=-2a+4$$

$$\frac{f(b+4)-f(b)}{(b+4)-b}$$
$$=\frac{\{-2(b+4)^2+18\}-(-2b^2+18)}{4}$$
$$=-4b-8$$

よって　$-2a+4=-4b-8=-4$

ゆえに　$\boldsymbol{a=4,\ b=-1}$

2 3 次関数 $f(x)=x^3+3ax^2+b$ が $x=-2$ で極大値 6 をとるような定数 a, b の値を求めよ。また，極小値を求めよ。

$f'(x)=3x^2+6ax$

よって

$f'(-2)=12-12a=0$

$f(-2)=-8+12a+b=6$

これを解くと

$a=1,\ b=2$

したがって　$f(x)=x^3+3x^2+2$

このとき　$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 6	↘	極小 2	↗

したがって，$f(x)$は確かに $x=-2$ で極大値 6 をとる。

ゆえに　$\boldsymbol{a=1,\ b=2}$

また　**極小値 2 （ $x=0$ のとき)**

3 3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+ax+1$ が極値をもたないように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$f'(x)=3x^2+2ax+a$ の符号の変化が起こらなければよいから，2 次方程式 $f'(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-3a\leqq 0$$

よって　$\boldsymbol{0\leqq a\leqq 3}$

4 3 次方程式 $x^3-3x-a=0$ が異なる正の解を 2 個，負の解を 1 個もつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$x^3-3x=a$ と変形する。

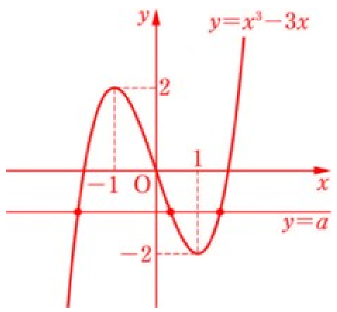
$f(x)=x^3-3x$ とおくと

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 -2	$\nearrow$

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは次の図のようになる。



このグラフと直線 $y=a$ が $x>0$ の範囲に 2 個，$x<0$ の範囲に 1 個共有点をもつから

$\boldsymbol{-2<a<0}$

5 $x\geqq 0$ のとき，不等式 $ax^3+3\geqq x^2$ が成り立つように，正の定数 a の値の範囲を定めよ。

$f(x)=(ax^3+3)-x^2=ax^3-x^2+3$とおくと

$f'(x)=3ax^2-2x=x(3ax-2)$

$a>0$ より，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3a}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	3	$\searrow$	極小 $-\dfrac{4}{27a^2}+3$	$\nearrow$

したがって，$x\geqq 0$ における最小値は

$$f\left(\frac{2}{3a}\right)=-\frac{4}{27a^2}+3$$

であるから

$$-\frac{4}{27a^2}+3\geqq 0$$

よって　$81a^2\geqq 4$

$a>0$ であるから　$\boldsymbol{a\geqq \frac{2}{9}}$

6 点 $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ から曲線 $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+2x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

接点を $\mathrm{P}\left(a,\ \frac{1}{3}a^3-2a^2+2a\right)$ とおく。

$y'=x^2-4x+2$ であるから，接線の傾きはa^2-4a+2 である。

よって，接線の方程式は

$$y-\left(\frac{1}{3}a^3-2a^2+2a\right)$$

$$=(a^2-4a+2)(x-a)$$

すなわち

$$y=(a^2-4a+2)x-\frac{2}{3}a^3+2a^2 \quad \cdots\cdots①$$

①が点 $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ を通るから

$$\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}(a^2-4a+2)-\frac{2}{3}a^3+2a^2$$

整理すると

$$2a^3-5a^2-4a+3=0$$

$$(a+1)(2a^2-7a+3)=0$$

$$(a+1)(2a-1)(a-3)=0$$

ゆえに　$a=-1,\ \frac{1}{2},\ 3$

これらを①に代入して

$a=-1$ のとき　$y=7x+\frac{8}{3}$

$a=\frac{1}{2}$ のとき　$y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{12}$

$a=3$ のとき　$y=-x$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=7x+\frac{8}{3},\ \ y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{12},\ \ y=-x}$$

7 等式 $f(x)=x^2+2\int_{-1}^{3}xf(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=x^2+2\int_{-1}^{3}xf(t)\ dt$$

$$=x^2+2x\int_{-1}^{3}f(t)\ dt$$

と変形できるから

$k=\int_{-1}^{3}f(t)\ dt$ とおくと　$f(x)=x^2+2kx$

$$k=\int_{-1}^{3}(t^2+2kt)\ dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+kt^2\right]_{-1}^{3}$$

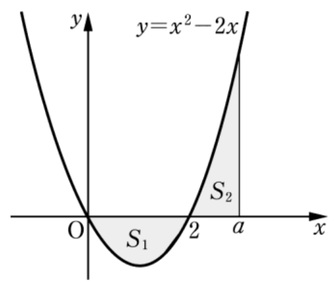
$$=8k+\frac{28}{3}$$

したがって　$k=8k+\frac{28}{3}$

よって　$k=-\frac{4}{3}$

ゆえに　$\boldsymbol{f(x)=x^2-\frac{8}{3}x}$

8 放物線 $y=x^2-2x$ がある。この放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を S_1，この放物線の $x\geqq 2$ の部分と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた部分の面積を S_2 とするとき，$S_1=S_2$ となる定数 a の値を求めよ。ただし，$a>2$ とする。



$S_1=S_2$ より

$$-\int_0^2(x^2-2x)\,dx=\int_2^a(x^2-2x)\,dx$$

よって　$\int_0^2(x^2-2x)\,dx+\int_2^a(x^2-2x)\,dx=0$

ゆえに　$\int_0^a(x^2-2x)\,dx=0$

これを解くと

$$\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^a=\frac{1}{3}a^3-a^2=0$$

$a>2$ より　$\boldsymbol{a=3}$

練習問題Ｂ

（教科書 p.229）

9 3 次関数 $f(x)$ は $x=2$ で極小値 3 をとり，$x=4$ で極大値 5 をとる。

このとき，関数 $f(x)$ を求めよ。

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a\neq 0)$ とおくと

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

条件より

$f'(2)=12a+4b+c=0$

$f(2)=8a+4b+2c+d=3$

$f'(4)=48a+8b+c=0$

$f(4)=64a+16b+4c+d=5$

これを解いて

$$a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{9}{2},\ c=-12,\ d=13$$

よって　$f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{9}{2}x^2-12x+13$

このとき　$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+9x-12$

$$=-\frac{3}{2}(x-2)(x-4)$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 3	↗	極大 5	↘

したがって，$f(x)$ は確かに $x=2$ で極小値 3，$x=4$ で極大値 5をとる。

ゆえに

$$\boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{9}{2}x^2-12x+13}$$

１０ 関数 $f(x)=x(x-3)^2$ について，次の問に答えよ。

(1) $f(x)$ の極値を求めよ。

$f(x)=x^3-6x^2+9x$ より

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

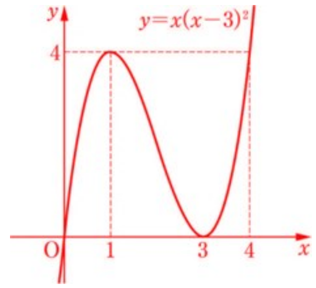
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

よって　**極大値 4 （ $x=1$ のとき）**

極小値 0 （ $x=3$ のとき）

(2) a を正の定数とするとき，区間 $0\leqq x\leqq a$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

グラフは次の図のようになる。



ここで

$f(0)=0,\ f(4)=4$

よって，$0\leqq x\leqq a$ における $f(x)$ の最大値は

$0<a<1$ のとき　$f(a)=a(a-3)^2$

$1\leqq a<4$ のとき　$f(1)=4$

$a=4$ のとき　$f(1)=f(4)=4$

$4<a$ のとき　$f(a)=a(a-3)^2$

１１ 次の x についての関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

$$f(x)=\int_0^x 3t(t-2)dt$$

$f'(x)=3x(x-2)$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

ここで

$$f(0)=\int_0^0 3t(t-2)\ dt=0$$

$$f(2)=\int_0^2 3t(t-2)\ dt$$

$$=\int_0^2 (3t^2-6t)\ dt$$

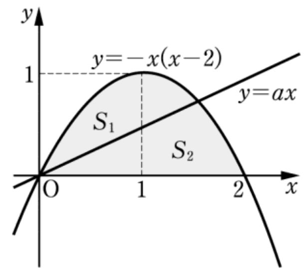
$$=[t^3-3t^2]_0^2=-4$$

よって　　極大値 $\mathbf{0}$ （ $\boldsymbol{x=0}$ のとき)

極小値 $\mathbf{-4}$ （ $\boldsymbol{x=2}$ のとき)

１２ 放物線 $y=-x(x-2)$ と x 軸で囲まれた図形を直線 $y=ax$ で

右の図のような 2 つの部分に分けるとき，上側の部分の面積を S_1，下側の部分の面積を S_2 とする。このとき，$S_1:S_2=1:7$ となるような定数a の値を求めよ。



$$S_1+S_2=\int_0^2\{-x(x-2)\}\,dx$$

$$=\int_0^2(-x^2+2x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

$-x(x-2)=ax$ より，$x=0$，$2-a$ であるから

$$S_1=\int_0^{2-a}\{-x(x-2)-ax\}\,dx$$

$$=\int_0^{2-a}\{-x^2+(2-a)x\}\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(2-a)^3$$

$S_1:S_2=1:7$ より　　$S_2=7S_1$

よって　　$S_1+S_2=8S_1$

したがって　　$\frac{4}{3}=8\cdot\frac{1}{6}(2-a)^3$

ゆえに　　$2-a=1$

これは，$0<2-a<2$ を満たしている。

よって　　$\boldsymbol{a=1}$

１３ 2 つの放物線 $y=x^2+4x$ を C_1，$y=x^2-4x+8$ を C_2 とする。このとき，C_1 と C_2 のどちらにも接する接線 l の方程式を求めよ。また，C_1 と C_2 および l で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$y=x^2+4x$ において　$y'=2x+4$

C_1 上の点 $\mathrm{P}(s,\ s^2+4s)$ における接線の方程式は

$$y-(s^2+4s)=(2s+4)(x-s)$$

すなわち　$y=(2s+4)x-s^2$　……①

また，$y=x^2-4x+8$ において

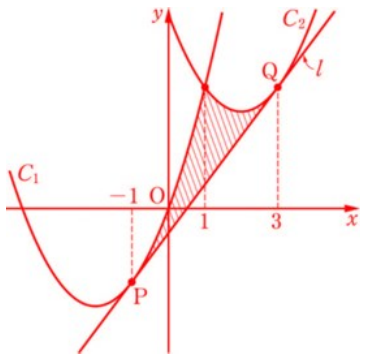
$$y'=2x-4$$

C_2 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ t^2-4t+8)$ における接線の方程式は

$$y-(t^2-4t+8)=(2t-4)(x-t)$$

すなわち

$y=(2t-4)x-t^2+8$　……②



①，②が同一の直線 l を表すとき

$$\begin{cases} 2s+4=2t-4 \\ -s^2=-t^2+8 \end{cases}$$

これを解いて　$s=-1,\ t=3$

$s=-1$ を①に代入して　$y=2x-1$

よって，接線 l の方程式は　$\boldsymbol{y=2x-1}$

C_1 と C_2 の交点の x 座標は，方程式

$$x^2+4x=x^2-4x+8$$

の解 $x=1$ である。

区間 $-1\leqq x\leqq 1$ では　$x^2+4x\geqq 2x-1$

区間 $1\leqq x\leqq 3$ では　$x^2-4x+8\geqq 2x-1$

したがって，求める図形の面積 S は

$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^2+4x)-(2x-1)\}\,dx+\int_{1}^{3}\{(x^2-4x+8)-(2x-1)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)\,dx+\int_{1}^{3}(x^2-6x+9)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_{1}^{3}$$

$$=\boldsymbol{\frac{16}{3}}$$

１４ $f(x)$ が 1 次関数のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\left\{\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2<\int_0^1\{f(x)\}^2\,dx$$

$f(x)=ax+b$　$(a\neq 0)$ とおく。

$$\int_0^1 f(x)\ dx=\int_0^1(ax+b)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}ax^2+bx\right]_0^1=\frac{1}{2}a+b$$

$$\int_0^1\{f(x)\}^2\ dx=\int_0^1(a^2x^2+2abx+b^2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}a^2x^3+abx^2+b^2x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}a^2+ab+b^2$$

よって

$$\int_0^1\{f(x)\}^2\,dx-\left\{\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2$$

$$=\left(\frac{1}{3}a^2+ab+b^2\right)-\left(\frac{1}{2}a+b\right)^2$$

$$=\frac{1}{12}a^2>0$$

ゆえに　$\left\{\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^2<\int_0^1\{f(x)\}^2\,dx$

１５ $f(x)=|\ x-t\ |$ とするとき，$\int_0^2 f(x)\,dx$ を求めよ。ただし，$t>0$ とする。

$0<t<2$ のとき

$$\int_0^2 |\ x-t\ |\,dx$$

$$=\int_0^t (-x+t)\,dx+\int_t^2 (x-t)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+tx\right]_0^t+\left[\frac{1}{2}x^2-tx\right]_t^2$$

$$=t^2-2t+2$$

$t \geqq 2$ のとき

$$\int_0^2 |\ x-t\ |\,dx$$

$$=\int_0^2 (-x+t)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+tx\right]_0^2$$

$$=2t-2$$

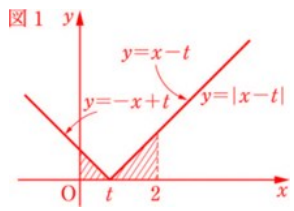
以上より

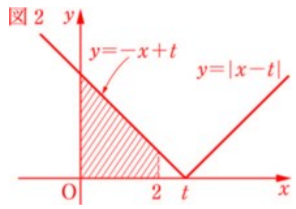
$0<t<2$ のとき

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\boldsymbol{t^2-2t+2}$$

$t \geqq 2$ のとき

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\boldsymbol{2t-2}$$





(参考)　$f(x)=|\ x-t\ |\geqq 0$ であるから

$\int_0^2 f(x)\,dx$ は $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた部分の面積である。

したがって，上の図 1，図 2 の斜線部分の面積に等しい。

$0<t<2$ のとき

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}(2-t)^2$$

$$=t^2-2t+2$$

$t \geqq 2$ のとき

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot 2\{t+(-2+t)\}$$

$$=2t-2$$