3 節 積分

（教科書 p.207）

1 不定積分

（教科書 p.206）

関数 $f(x)$ が与えられたとき，微分して $f(x)$ になる関数，すなわち

$$F'(x)=f(x)$$

を満たす関数 $F(x)$ を，関数 $f(x)$ の（① 　　　　　　）という。

例 1 $(x^2)'=2x$ であるから，x^2 は（ 　　　　　　）である。

$$x^2+\text{定数} \xrightarrow{\text{微分する}} 2x$$

$$x^2+\frac{1}{2},\ x^2+2,\ x^2-3$$

なども微分して（ 　　　　）になる関数であるから，（ 　　　　　　）である。

このように，$2x$ の原始関数は（ 　　　　）に存在する。

いま，$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の任意の原始関数 $G(x)$ について

$$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

ゆえに，195 ページで学んだことにより，$G(x)-F(x)$ は定数となる。

この定数を C とすると

$$G(x)-F(x)=C \qquad \text{すなわち} \qquad G(x)=F(x)+C$$

以上より，$f(x)$ の任意の原始関数は次のように表される。

$$F(x)+C$$

これらをまとめて $\int f(x)\,dx$ と表し，$f(x)$ の（② 　　　　　　）という。

すなわち　（③ 　　　　　　　　　　）

ここで，C は（④ 　　　　　　）といい，関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を（⑤ 　　　　　　）という。

例 2 $(x^2)'=2x$ であるから

$$\begin{tikzcd} 2x \arrow[r, bend left, "\boxed{\text{積分}}\text{する}"] & x^2+C \arrow[l, bend left, "\boxed{\text{微分}}\text{する}"] \end{tikzcd}$$

（C は積分定数）

不定積分の計算

n が正の整数または 0 のとき

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

注意 $\int 1\,dx$ は，$\int dx$ と書くことが多い。

問1 関数 $y=x^4$ を積分せよ。

定数倍，和，差の不定積分

1. $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$ 　（ k は定数）
2. $\int\{f(x)+g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$
3. $\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)\,dx-\int g(x)\,dx$

例 3 $\int(3x^2-6x+2)dx=$

注意 例 3 のように，積分定数は 1 つにまとめて書けばよい。

問2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(-2)\,dx$

(2) $\int(2x-3)dx$

(3) $\int(9x^2-5x-1)\,dx$

例題 1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(x+1)(2x-1)\,dx$ (2) $\int t(3t+1)\,dt$

解

問3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(5x+2)(5x-2)\,dx$

(2) $\int(3x-2)^2\,dx$

(3) $\int(4t-3)(2t+3)\,dt$

例 4 条件 $F'(x)=x^2-3x,\ F(3)=-1$ を満たす関数 $F(x)$ を求めてみよう。

$F'(x)=x^2-3x$ より

$F(x)=$

$F(3)=-1$ より

よって $C=$

ゆえに $F(x)=$

問4 $F'(x)=x^2+x-2,\ F(0)=1$ を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

例題 2 関数 $y=f(x)$ のグラフは点 A(1, 5) を通り，このグラフ上の各点 $(x,\ y)$ における接線の傾きは $3x^2-4x$ である。この関数 $f(x)$ を求めよ。

解

問5 関数 $y=f(x)$ のグラフは点 A(−1, 3) を通り，このグラフ上の各点 $(x,\ y)$ における接線の傾きは $-6x^2+2x$ である。この関数 $f(x)$ を求めよ。

2 定積分

定積分

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とするとき，差 $F(b)-F(a)$ を $f(x)$ の a から b までの

（⑥ ）といい，記号

（⑦ ）

で表す。a をこの定積分の（⑧ ），b を（⑨ ）という。また，この定積分を求めることを，$f(x)$ を（⑩ ）という。

$F(b)-F(a)$ を記号（⑪ ）で表す。

定積分
$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると $$\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx}=\boldsymbol{[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)}$$

例題 3 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^3 x^2\,dx$　　(2) $\int_{-1}^2 (5t-t^2)\,dt$

(3) $\int_0^3 (x-2)^2\,dx$

解

問6　次の定積分を求めよ。

(1)　$\int_1^3 (x^2 - 2x)\,dx$

(2)　$\int_{-2}^0 (5 - 3t^2)\,dt$

(3)　$\int_{-1}^1 (3x^2 + 14x - 8)\,dx$

(4)　$\int_1^2 (4x - 3)^2\,dx$

（教科書 p.212）

定積分の公式　分の場合と同様に，次の公式が成り立つ。

定積分の公式
$\boxed{1}$　$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$　（ k は定数） $\boxed{2}$　$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ $\boxed{3}$　$\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

例 5　上の公式を用いると，次のように計算することもできる。

(1)　$\int_0^2 (x^2 - 4x + 3)\,dx =$

(2)　$\int_{-1}^2 (6x - x^2)\,dx + 2\int_{-1}^2 (x^2 - 3x)\,dx$

$=$

問7　次の定積分を求めよ。

(1)　$\int_{-1}^2 (4x^2 + 5x - 3)\,dx$

(2)　$\int_1^3 (3x^2 - 4x + 1)\,dx - 2\int_1^3 (x^2 - 2x - 1)\,dx$

定積分の性質

（教科書 p.213）

定積分には，次のような性質がある。

定積分の性質
$\boxed{4}$ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ $\boxed{5}$ $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ $\boxed{6}$ $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

証明 $\boxed{6}$ 関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b$$

$$= \{F(c) - F(a)\} + \{F(b) - F(c)\}$$

$$= F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

注意 定積分の性質$\boxed{6}$は a, b, c の大小に関係なく成り立つ。

問8 上の定積分の性質$\boxed{4}$，$\boxed{5}$を証明せよ。

例 6 $\int_{-1}^{2}(2x-1)\,dx + \int_{2}^{3}(2x-1)\,dx =$

問9 次の定積分を求めよ。

（1） $\int_1^3 x^2\,dx + \int_3^1 x^2 dx$

（2） $\int_2^5 (2x+3)\,dx - \int_4^5 (2x+3)\,dx$

例題 4 等式 $f(x) = 4x + 3\int_0^1 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

考え方

解

問 10 等式 $f(x)=3x+2\int_0^2 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

定積分と微分

（教科書 p.214）

定積分と微分	
7	$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

問 11 関数 $f(x)=\int_0^x (4t^2-t+2)dt$ を微分せよ。

応用例題 5 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_a^x f(t)dt = 3x^2-4x+1$$

解

問 12 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_a^x f(t)dt = x^2-3x-4$$

問 13 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_1^x f(t)dt = x^3+ax-5$$

3 定積分と面積

（教科書 p.216）

例 7 右の図は，x 座標が 1 から x までの範囲で，関数 $f(x)=x+1$ のグラフと x 軸の間にある台形を表している。

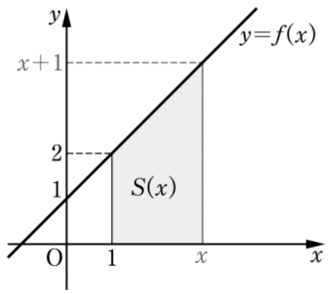
この台形の面積を $S(x)$ とすると

$S(x)=$

このとき，$S'(x)=x+1$ であるから

$S'(x)=$

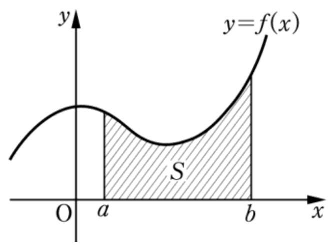
が成り立つ。



定積分と面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq 0$ であるとする。
曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた図形の面積 S は

$$\boldsymbol{S=\int_a^b f(x)dx}$$

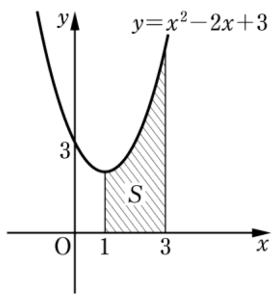


例 8 放物線 $y=x^2-2x+3$ と x 軸および 2 直線 $x=1$, $x=3$ で囲まれた図形の面積 S を求めてみよう。

区間 $1 \leqq x \leqq 3$ では

よって，求める面積 S は

$S=$



問 14 放物線 $y=x^2+2x+2$ と x 軸および 2 直線 $x=-2$, $x=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

例題 6 放物線 $y=-x^2+2x$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解

問 15 次の放物線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y=-x^2+1$

(2) $y=-x^2+x+2$

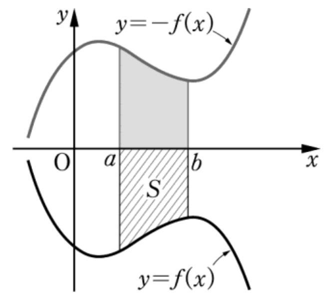
(3) $y=-4x^2+8x-3$

$y=f(x)$ のグラフと $y=-f(x)$ のグラフは x 軸に関して対称である

から，求める面積 S は，曲線 $y=-f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれた図形の面積と等しい。

ここで，$-f(x)\geqq 0$ となるから，面積S は

$S=\int_a^b\{-f(x)\}dx=$ (⑫　　　　　　)



問 16 放物線 $y=x^2-3x-4$ と x 軸，y 軸および直線 $x=3$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

例題 7 曲線 $y=x^3+x^2-2x$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。

解

問 17 曲線 $y=-x^3+4x$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。

2 曲線間の面積

（教科書 p.220）

２曲線間の面積

区間 $\boldsymbol{a \leqq x \leqq b}$ において

$$\boldsymbol{f(x) \geqq g(x)}$$

であるとき，2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ と 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた図形の面積S は

$$\boldsymbol{S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx}$$

例題 8 2 つの放物線 $y=x^2-2x$, $y=-x^2+4$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解

問 18 次の曲線または直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y=-x^2-2x,\ y=-x$

(2) $y=x^2+2x,\ y=x+2$

(3) $y=2x^2,\ y=x^2+2x+3$

絶対値のついた関数の定積分

（教科書 p.222）

例題 9 定積分 $\int_0^3 |\ x(x-2)\ |dx$ を求めよ。

考え方

解

問 19 定積分 $\int_0^3 |x^2-1|dx$ を求めよ。

参 考　放物線と直線で囲まれた図形の面積

（教科書 p.223）

次の定積分に関する公式は，放物線と直線で囲まれた図形の面積を求めるときによく用いられる。

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

証明　$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta}$

$=\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)$

$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-\frac{1}{2}(\beta+\alpha)^2(\beta-\alpha)+\beta\alpha(\beta-\alpha)$

$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\beta^2+2\beta\alpha+\alpha^2)+6\beta\alpha\}$

$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2)$

$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

例 1 上の公式を利用して，放物線 $y=-x^2+7x-10$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めてみよう。

$-x^2+7x-10=$　　　　　　　　　　　　より

$S=$

問1 放物線 $y=-x^2+3x+5$ と直線 $y=x+2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

問 題

（教科書 p.224）

１８　関数 $y=f(x)$ のグラフは 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$ を通り，このグラフ上の各点 $(x,\ y)$ における接線の傾きは x^2-ax である。定数 a の値および関数 $f(x)$ を求めよ。

１９　1 次関数 $f(x)=px+q$ について

$$\int_0^1 f(x)dx=-1,\qquad \int_0^1 xf(x)dx=0$$

が同時に成り立つような定数 $p,\ q$ の値を求めよ。

２０　次の条件を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(1)=-2,\qquad f'(1)=1,\qquad \int_{-1}^{2} f(x)dx=-\frac{9}{2}$$

２１　次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_{-2}^{x} f(t)dt=x^3-5x^2+3ax+2a$$

２２ 次の図形の面積を求めよ。

(1) 放物線 $y = x^2 - x$ と直線 $y = -3x + 8$ で囲まれた図形

(2) 2 つの放物線 $y = x^2 - 2x - 8,\ y = -2x^2 + x + 10$ で囲まれた図形

(3) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + 1$ で囲まれた図形

２３ 曲線 $y = x^3 - 3x^2$ と直線 $y = -2x$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。

２４ 2 つの放物線 $y=-3x^2+7x+2$，$y=2x^2-3x+2$ の 2 交点を通る直線を l とする。これら
2 つの放物線で囲まれた図形について，l より上方にある部分の面積 S_1 と，l より下方にある部分の面積 S_2 の比を求めよ。

２５ 定積分 $\int_{-2}^{4}|x^2-2x-3|dx$ を求めよ。

参考　$(ax+b)^n$ の微分と積分

（教科書 p.225）

n が正の整数のとき，次の公式が成り立つ。

（⑬　　　　　　　　）　ならば　（⑭　　　　　　　　）

例 1 $y=(2x+3)^6$ ならば

$y'=$

問1 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(3x+5)^4$

(2)　$y=(1-x)^5$

n が正の整数または 0 のとき，次の公式が成り立つ。

（⑮　　　　　　　　　　　　）

例 2 $\int(2x+5)^4dx=$

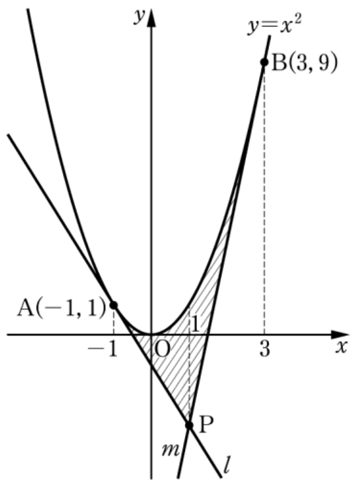
問2 不定積分 $\int(x-3)^3dx$ を求めよ。

問3 定積分 $\int_0^1(3x-2)^4dx$ を求めよ。

参 考　曲線と接線の囲む図形の面積

（教科書 p.226）

例 1 放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 9)$ における接線をそれぞれ l, m とする。このとき，放物線 $y=x^2$ と 2 接線 l, m で囲まれた図形の面積 S を求めてみよう。



$y'=2x$ より

l の方程式は　$y-1=-2(x+1)$

すなわち

……①

m の方程式は　$y-9=6(x-3)$

すなわち

……②

l と m の交点 P の x 座標は①，②より

$-2x-1=6x-9$

ゆえに　$x=1$

区間 $-1\leqq x\leqq 1$ では　$x^2\geqq -2x-1$

区間 $1\leqq x\leqq 3$ では　$x^2\geqq 6x-9$

よって，求める面積 S は

$S=$

◀p.225 の 17 行目の公式を用いている

問1 放物線 $y=2x^2-x+2$ について，次の問に答えよ。

(1)　原点 O からこの放物線に引いた 2 本の接線の方程式を求めよ。

(2)　(1)で求めた接線と放物線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

例 2 曲線 $y=x^3-3x^2+2x$ 上の点 $(2,\ 0)$ における接線と曲線で囲まれた図形の面積 S を求めてみよう。

$y'=$ 　　　　　　であるから，接線の傾きは（　　　）である。

よって，接線の方程式は

$y=$

曲線と接線の交点の x 座標は

$$x^3-3x^2+2x=2x-4$$

すなわち，方程式 $x^3-3x^2+4=0$ の解である。

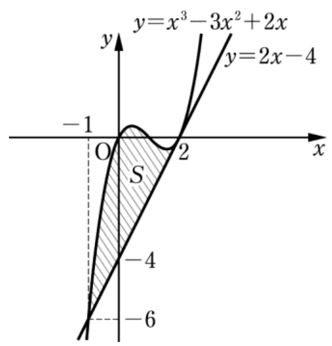
$$(x-2)(x^2-x-2)=0$$

$$(x+1)(x-2)^2=0$$

よって　　$x=$

区間 $-1 \leqq x \leqq 2$ では，$x^3-3x^2+2x \geqq 2x-4$ であるから，求める面積 S は

$S=$



問2 曲線 $y=x^3-x^2+3$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線と曲線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

3 節 積分

1 不定積分

（教科書 p.206）

関数 $f(x)$ が与えられたとき，微分して $f(x)$ になる関数，すなわち

$$F'(x) = f(x)$$

を満たす関数 $F(x)$ を，関数 $f(x)$ の（① 原始関数 ）という。

例 1 $(x^2)' = 2x$ であるから，x^2 は（ $2x$ の原始関数 ）である。

$x^2 + \frac{1}{2}$，$x^2 + 2$，$x^2 - 3$

なども微分して（ $2x$ ）になる関数であるから，（ $2x$ の原始関数 ）である。

このように，$2x$ の原始関数は（ 無数 ）に存在する。

x^2＋定数 $\Longrightarrow$ $2x$
微分する

いま，$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると，$f(x)$ の任意の原始関数 $G(x)$ について

$$\{G(x) - F(x)\}' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

ゆえに，195 ページで学んだことにより，$G(x) - F(x)$ は定数となる。

この定数を C とすると

$G(x) - F(x) = C$ 　　すなわち　　 $G(x) = F(x) + C$

以上より，$f(x)$ の任意の原始関数は次のように表される。

$$F(x) + C$$

これらをまとめて $\int f(x)\,dx$ と表し，$f(x)$ の（② 不定積分 ）という。

すなわち　（③ $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ （C は定数） ）

ここで，C は（④ 積分定数 ）といい，関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を（⑤ 積分する ）という。

例 2 $(x^2)' = 2x$ であるから

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

（C は積分定数）

積分 する
$2x \rightleftarrows x^2 + C$
微分 する

（教科書 p.207）

不定積分の計算

n が正の整数または 0 のとき

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

注意　$\int 1\,dx$ は，$\int dx$ と書くことが多い。

問 1 関数 $y = x^4$ を積分せよ。

$$\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$$

定数倍，和，差の不定積分

1. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ 　（ k は定数）
2. $\int \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
3. $\int \{f(x) - g(x)\}dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

例 3

$$\begin{aligned}\int (3x^2 - 6x + 2)dx &= 3\int x^2\,dx - 6\int x\,dx + 2\int dx \\ &= 3\cdot\frac{1}{3}x^3 - 6\cdot\frac{1}{2}x^2 + 2\cdot x + C \\ &= x^3 - 3x^2 + 2x + C\end{aligned}$$

注意　例 3 のように，積分定数は 1 つにまとめて書けばよい。

問2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(-2)\,dx$

$= -2x + C$

(2) $\int(2x-3)dx$

$= 2\cdot\frac{1}{2}x^2 - 3x + C$

$= x^2 - 3x + C$

(3) $\int(9x^2-5x-1)\,dx$

$= 9\cdot\frac{1}{3}x^3 - 5\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$

$= 3x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + C$

例題 1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(x+1)(2x-1)\,dx$ (2) $\int t(3t+1)\,dt$

解 (1) $\int(x+1)(2x-1)\,dx = \int(2x^2+x-1)\,dx$ まず展開する

$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$

(2) $\int t(3t+1)\,dt = \int(3t^2+t)\,dt = t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C$

問3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(5x+2)(5x-2)\,dx$

$= \int(25x^2-4)\,dx$

$= \frac{25}{3}x^3 - 4x + C$

(2) $\int(3x-2)^2\,dx$

$= \int(9x^2-12x+4)\,dx$

$= 3x^3 - 6x^2 + 4x + C$

(3) $\int(4t-3)(2t+3)\,dt$

$= \int(8t^2+6t-9)\ dt$

$= \frac{8}{3}t^3 + 3t^2 - 9t + C$

例 4 条件 $F'(x) = x^2 - 3x,\ F(3) = -1$ を満たす関数 $F(x)$ を求めてみよう。

$F'(x) = x^2 - 3x$ より

$$F(x) = \int(x^2-3x)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C$$

$F(3) = -1$ より $\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2 + C = -1$

よって $C = \frac{7}{2}$

ゆえに $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}$

問4 $F'(x) = x^2 + x - 2,\ F(0) = 1$ を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

$F(x) = \int(x^2+x-2)\,dx$

$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

$x = 0$ を代入すると

$F(0) = C = 1$

よって $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

例題 2 関数 $y=f(x)$ のグラフは点 A$(1,\ 5)$ を通り，このグラフ上の各点 $(x,\ y)$ における接線の傾きは $3x^2-4x$ である。この関数 $f(x)$ を求めよ。

解 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(x,\ y)$ における接線の傾きは $f'(x)$ であるから，条件より

$$f'(x)=3x^2-4x$$

よって　$f(x)=\int(3x^2-4x)\,dx=x^3-2x^2+C$

$f(1)=5$ であるから

$$1^3-2\cdot1^2+C=5$$

すなわち　$C=6$

ゆえに　$f(x)=x^3-2x^2+6$

問5 関数 $y=f(x)$ のグラフは点 A$(-1,\ 3)$ を通り，このグラフ上の各点 $(x,\ y)$ における接線の傾きは $-6x^2+2x$ である。この関数 $f(x)$ を求めよ。

$f'(x)=-6x^2+2x$ より

$$f(x)=\int(-6x^2+2x)\,dx$$

$$=-2x^3+x^2+C$$

点 A$(-1,\ 3)$ を通るから　$f(-1)=3$

よって　$2+1+C=3$

ゆえに　$C=0$

したがって　$\boldsymbol{f(x)=-2x^3+x^2}$

2 定積分

定積分

関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とするとき，差 $F(b)-F(a)$ を $f(x)$ の a から b までの
（⑥　定積分　）といい，記号
（⑦　$\int_a^b f(x)\,dx$　）
で表す。a をこの定積分の（⑧　下端　），b を（⑨　上端　）という。また，この定積分を求めることを，$f(x)$ を（⑩　a から b まで積分する　）という。
$F(b)-F(a)$ を記号（⑪　$[F(x)]_a^b$　）で表す。

定積分
$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると $$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

例題 3 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^3 x^2\,dx$　　(2) $\int_{-1}^2(5t-t^2)\,dt$

(3) $\int_0^3(x-2)^2\,dx$

解 (1) $\int_1^3 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3$

$$=\frac{1}{3}\cdot3^3-\frac{1}{3}\cdot1^3=\frac{26}{3}$$

(2) $\int_{-1}^2(5t-t^2)\,dt$

$$=\left[\frac{5}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^2$$

$$=\left(\frac{5}{2}\cdot2^2-\frac{1}{3}\cdot2^3\right)-\left\{\frac{5}{2}\cdot(-1)^2-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3\right\}=\frac{9}{2}$$

(3) $\int_0^3(x-2)^2\,dx=\int_0^3(x^2-4x+4)\,dx$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^3$$

$$=\left(\frac{1}{3}\cdot3^3-2\cdot3^2+4\cdot3\right)-0=3$$

注意　$\int_{-1}^2(5t-t^2)\,dt=\int_{-1}^2(5x-x^2)dx$ である。
このように，定積分の値は変数を他の文字で置き換えても変わらない。

問6 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^3 (x^2-2x)\,dx$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_1^3$$

$$=(9-9)-\left(\frac{1}{3}-1\right)$$

$$=\frac{2}{3}$$

(2) $\int_{-2}^0 (5-3t^2)\,dt$

$$=[5t-t^3]_{-2}^0$$

$$=0-(-10+8)$$

$$=2$$

(3) $\int_{-1}^1 (3x^2+14x-8)\,dx$

$$=[x^3+7x^2-8x]_{-1}^1$$

$$=(1+7-8)-(-1+7+8)=-14$$

(4) $\int_1^2 (4x-3)^2\,dx$

$$=\int_1^2 (16x^2-24x+9)\,dx$$

$$=\left[\frac{16}{3}x^3-12x^2+9x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{128}{3}-48+18\right)-\left(\frac{16}{3}-12+9\right)$$

$$=\frac{31}{3}$$

（教科書 p.212）

定積分の公式 分の場合と同様に，次の公式が成り立つ。

定積分の公式
$\boxed{1}$ $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$ （ k は定数）
$\boxed{2}$ $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$
$\boxed{3}$ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$

例 5 上の公式を用いると，次のように計算することもできる。

(1) $\int_0^2 (x^2-4x+3)\,dx=\int_0^2 x^2dx-4\int_0^2 xdx+3\int_0^2 dx$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2-4\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2+3[x]_0^2$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 2^3-4\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\right)+3\cdot 2$$

$$=\frac{2}{3}$$

(2) $\int_{-1}^2 (6x-x^2)\,dx+2\int_{-1}^2 (x^2-3x)\,dx$

$$=\int_{-1}^2 \{(6x-x^2)+2(x^2-3x)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^2 x^2\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^2=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3=3$$

問7 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^2 (4x^2+5x-3)\,dx$

$$=\left[\frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^2+\left[\frac{5}{2}x^2\right]_{-1}^2-[3x]_{-1}^2$$

$$=12+\frac{15}{2}-9=\frac{21}{2}$$

(2) $\int_1^3 (3x^2-4x+1)\,dx-2\int_1^3 (x^2-2x-1)\,dx$

$$=\int_1^3 \{(3x^2-4x+1)-2(x^2-2x-1)\}\,dx$$

$$=\int_1^3 (x^2+3)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3+[3x]_1^3$$

$$=\frac{26}{3}+6=\frac{44}{3}$$

定積分の性質

（教科書 p.213）

定積分には，次のような性質がある。

定積分の性質
4 $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
5 $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
6 $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

証明 **6** 関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b$$
$$= \{F(c) - F(a)\} + \{F(b) - F(c)\}$$
$$= F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$
$$= \int_a^b f(x)dx$$

注意　定積分の性質**6**は a，b，c の大小に関係なく成り立つ。

問8　上の定積分の性質**4**，**5**を証明せよ。

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とする。

4：$\int_a^a f(x)\,dx = [F(x)]_a^a$
$= F(a) - F(a) = 0$

5：$\int_b^a f(x)\,dx = [F(x)]_b^a$
$= F(a) - F(b)$
$= -\{F(b) - F(a)\}$
$= -[F(x)]_a^b$
$= -\int_a^b f(x)\,dx$

例 6 $\displaystyle\int_{-1}^2 (2x-1)\,dx + \int_2^3 (2x-1)\,dx = \int_{-1}^3 (2x-1)\,dx$

$= [x^2 - x]_{-1}^3$
$= (3^2 - 3) - \{(-1)^2 - (-1)\}$
$= 4$

問9　次の定積分を求めよ。

(1)　$\int_1^3 x^2\,dx + \int_3^1 x^2 dx$

$= \displaystyle\int_1^1 x^2\,dx = \mathbf{0}$

〔別解〕 $\int_1^3 x^2\,dx - \int_1^3 x^2\,dx = 0$

(2)　$\int_2^5 (2x+3)\,dx - \int_4^5 (2x+3)\,dx$

$= \displaystyle\int_2^5 (2x+3)\,dx + \int_5^4 (2x+3)\,dx$

$= \displaystyle\int_2^4 (2x+3)\,dx$

$= [x^2 + 3x]_2^4$

$= (16 + 12) - (4 + 6) = \mathbf{18}$

例題 4　等式 $f(x) = 4x + 3\int_0^1 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

考え方　定積分 $\int_0^1 f(t)dt$ は定数であるから，$\int_0^1 f(t)dt = k$ とおくことができる。

解　$\int_0^1 f(t)dt$ は定数であるから　$k = \int_0^1 f(t)dt$　……①

とおくと　$f(x) = 4x + 3k$　……②

①，②より　$k = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (4t + 3k)dt = [2t^2 + 3kt]_0^1$
$= 2 + 3k$

したがって　$k = 2 + 3k$

すなわち　$k = -1$

ゆえに　$f(x) = 4x - 3$

問 10 等式 $f(x)=3x+2\int_0^2 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$k=\int_0^2 f(t)\ dt$ とおくと $f(x)=3x+2k$

よって

$$k=\int_0^2 (3t+2k)\ dt$$

$$=\left[\frac{3}{2}t^2+2kt\right]_0^2=6+4k$$

したがって　$k=6+4k$

すなわち　$k=-2$

ゆえに　$\boldsymbol{f(x)=3x-4}$

定積分と微分

（教科書 p.214）

定積分と微分	
7	$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

問 11 関数 $f(x)=\int_0^x (4t^2-t+2)dt$ を微分せよ。

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x (4t^2-t+2)\ dt$$

$$=\boldsymbol{4x^2-x+2}$$

応用例題 5 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_a^x f(t)dt=3x^2-4x+1$$

解 与えられた等式の両辺を x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}(3x^2-4x+1)$$

よって　$f(x)=6x-4$

また，与えられた等式に $x=a$ を代入すると

$\int_a^a f(t)dt=0$ であるから

$$0=3a^2-4a+1$$

すなわち　$(a-1)(3a-1)=0$

これを解いて　$a=1,\ \frac{1}{3}$

したがって　$f(x)=6x-4,\ a=1,\ \frac{1}{3}$

問 12 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_a^x f(t)dt=x^2-3x-4$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\ dt=\frac{d}{dx}(x^2-3x-4)$$

よって　$\boldsymbol{f(x)=2x-3}$

また　$\int_a^a f(t)\ dt=a^2-3a-4=0$

したがって　$\boldsymbol{a=-1,\ 4}$

問 13 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_1^x f(t)dt=x^3+ax-5$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)\ dt=\frac{d}{dx}(x^3+ax-5)$$

よって　$f(x)=3x^2+a$　……①

与えられた等式で $x=1$ とおくと，左辺は 0 になるから　$0=1+a-5$

これより　$\boldsymbol{a=4}$

①より　$\boldsymbol{f(x)=3x^2+4}$

3 定積分と面積

（教科書 p.216）

例 7 右の図は，x 座標が 1 から x までの範囲で，関数 $f(x)=x+1$ のグラフと x 軸の間にある台形を表している。

この台形の面積を $S(x)$ とすると

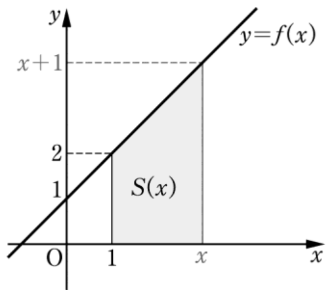
$$S(x)=\frac{1}{2}(x-1)\{2+(x+1)\}$$

$$=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}\quad(x\geqq 1)$$

このとき，$S'(x)=x+1$ であるから

$$S'(x)=f(x)$$

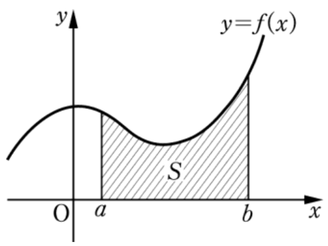
が成り立つ。



定積分と面積

区間 $a\leqq x\leqq b$ において，$f(x)\geqq 0$ であるとする。
曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積 S は

$$S=\int_a^b f(x)dx$$



例 8 放物線 $y=x^2-2x+3$ と x 軸および 2 直線 $x=1$，$x=3$ で囲まれた図形の面積 S を求めてみよう。

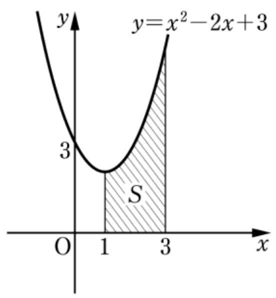
区間 $1\leqq x\leqq 3$ では　$y>0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_1^3(x^2-2x+3)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_1^3$$

$$=\frac{20}{3}$$



問 14 放物線 $y=x^2+2x+2$ と x 軸および 2 直線 $x=-2$，$x=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

区間 $-2\leqq x\leqq 1$ では　$y>0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^1(x^2+2x+2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+2x\right]_{-2}^1$$

$$=\left(\frac{1}{3}+1+2\right)-\left(-\frac{8}{3}+4-4\right)=\mathbf{6}$$

例題 6 放物線 $y=-x^2+2x$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解 放物線 $y=-x^2+2x$ と x 軸との交点の x 座標は，方程式

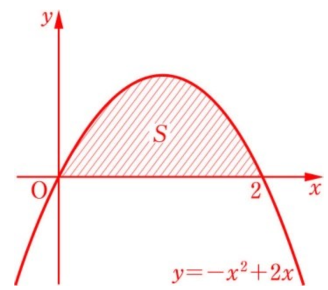
$$-x^2+2x=0$$

の解であるから　$x=0,\ 2$

区間 $0\leqq x\leqq 2$ では　$y\geqq 0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$



問 15 次の放物線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y=-x^2+1$

$-x^2+1=0$ より　$x=\pm 1$

放物線と x 軸は $(-1,\ 0)$，$(1,\ 0)$ で交わり，区間$-1\leqq x\leqq 1$ では　$y\geqq 0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{1}=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

(2) $y=-x^2+x+2$

$-x^2+x+2=0$ より　$x=-1,\ 2$

放物線と x 軸は $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，区間$-1\leqq x\leqq 2$ では　$y\geqq 0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

(3) $y=-4x^2+8x-3$

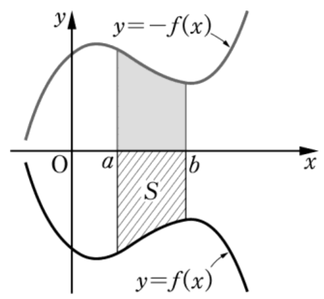
$-4x^2+8x-3=0$ より　$x=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}$

放物線と x 軸は $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ で交わり，区間 $\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}$ では　$y\geqq 0$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}(-4x^2+8x-3)\,dx$$

$$=\left[-\frac{4}{3}x^3+4x^2-3x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$



$y=f(x)$ のグラフと $y=-f(x)$ のグラフは x 軸に関して対称である

から，求める面積 S は，曲線 $y=-f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a,\ x=b$ で囲まれた図形の面積と等しい。

ここで，$-f(x)\geqq 0$ となるから，面積S は

$S=\int_a^b\{-f(x)\}dx=$ (⑫　$-\int_a^b f(x)dx$　)

問 16 放物線 $y=x^2-3x-4$ と x 軸，y 軸および直線 $x=3$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

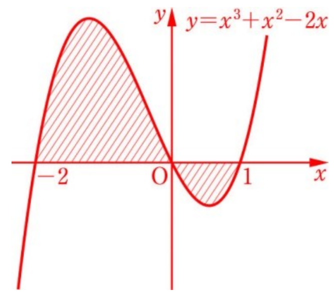
$y=x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$ であるから区間 $0\leqq x\leqq 3$ では $y<0$ である。

よって，求める面積 S は

$$S=-\int_{0}^{3}(x^2-3x-4)\,dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{0}^{3}=\mathbf{\frac{33}{2}}$$

例題 7　曲線 $y=x^3+x^2-2x$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。



解　曲線 $y=x^3+x^2-2x$ と x 軸との交点の x 座標は，方程式

$x^3+x^2-2x=0$ の解である。

$x(x+2)(x-1)=0$ より

$x=-2,\ 0,\ 1$

区間 $-2\leqq x\leqq 0$ では　$y\geqq 0$

区間 $0\leqq x\leqq 1$ では　$y\leqq 0$

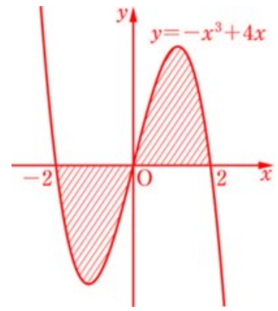
よって，求める面積の和は

$$\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)\,dx-\int_{0}^{1}(x^3+x^2-2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{0}^{1}=\frac{37}{12}$$

問 17 曲線 $y=-x^3+4x$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。

曲線 $y=-x^3+4x$ と x 軸との交点の x 座標は，
方程式 $-x^3+4x=0$ の解である。
$-x(x+2)(x-2)=0$ より
$x=-2,\ 0,\ 2$
区間 $-2\leqq x\leqq 0$ では　$y\leqq 0$
区間 $0\leqq x\leqq 2$ では　$y\geqq 0$
よって，求める面積の和は



$$-\int_{-2}^{0}(-x^3+4x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_{0}^{2}=\mathbf{8}$$

（参考）　$f(x)=-x^3+4x$ とおくと，$f(-x)=-f(x)$ が成り立つことから，$f(x)$ は奇関数である。すなわち，$y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称である。
よって，区間 $-2\leqq x\leqq 0$ の部分の面積と区間$0\leqq x\leqq 2$ の部分の面積は等しい。
したがって，求める面積の和は

$$2\int_{0}^{2}(-x^3+4x)\,dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_{0}^{2}=8$$

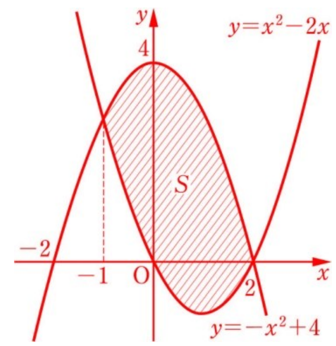
2 曲線間の面積

（教科書 p.220）

２曲線間の面積
区間 $\boldsymbol{a}\leqq\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{b}$ において $\boldsymbol{f(x)\geqq g(x)}$ であるとき，2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ と 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた図形の面積S は $\boldsymbol{S=\int_{a}^{b}\{f(x)-g(x)\}dx}$

例題 8　2 つの放物線 $y=x^2-2x$, $y=-x^2+4$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解　2 つの放物線の交点の x 座標は，方程式
$x^2-2x=-x^2+4$
の解 $x=-1,\ 2$ である。
区間 $-1\leqq x\leqq 2$ では
$-x^2+4\geqq x^2-2x$
であるから，求める面積 S は



$$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2+4)-(x^2-2x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}=9$$

問 18 次の曲線または直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　$y=-x^2-2x,\ y=-x$

$-x^2-2x=-x$ より　$x=0,\ -1$

区間 $-1 \leqq x \leqq 0$ では　$-x^2-2x \geqq -x$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{0}\{(-x^2-2x)-(-x)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2-x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2)　$y=x^2+2x,\ y=x+2$

$x^2+2x=x+2$ より　$x=-2,\ 1$

区間$-2 \leqq x \leqq 1$ では　$x^2+2x \leqq x+2$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^{1}\{(x+2)-(x^2+2x)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

(3)　$y=2x^2,\ y=x^2+2x+3$

$2x^2=x^2+2x+3$ より　$x=-1,\ 3$

区間$-1 \leqq x \leqq 3$ では　$2x^2 \leqq x^2+2x+3$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{3}\{(x^2+2x+3)-2x^2\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=\boldsymbol{\frac{32}{3}}$$

絶対値のついた関数の定積分

（教科書 p.222）

例題 9　定積分 $\int_0^3 |\ x(x-2)\ |dx$ を求めよ。

考え方　定積分 $\int_0^3 |\ x(x-2)\ |dx$ の値は，$y=|\ x(x-2)\ |$ のグラフと x 軸および直線 $x=3$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を表している。

よって，積分する区間を分けて絶対値記号をはずしてから積分する。

解　関数 $y=|\ x(x-2)\ |$ は，

$0 \leqq x \leqq 2$ のとき

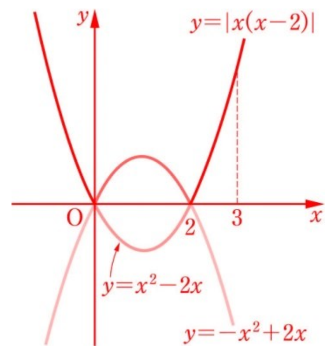
$x(x-2) \leqq 0$ であるから

$$|\ x(x-2)\ |=-x(x-2)$$
$$=-x^2+2x$$

$2 \leqq x \leqq 3$ のとき

$x(x-2) \geqq 0$ であるから

$$|\ x(x-2)\ |=x(x-2)$$
$$=x^2-2x$$



よって，グラフは右の図のようになる。

したがって，求める定積分は

$$\int_0^3 |\ x(x-2)\ |dx=\int_0^2 |\ x(x-2)\ |dx+\int_2^3 |\ x(x-2)\ |dx$$
$$=\int_0^2(-x^2+2x)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3=\frac{8}{3}$$

問 19 定積分 $\int_0^3 |\ x^2-1\ | dx$ を求めよ。

$|\ x^2-1\ | = |\ (x+1)(x-1)\ |$ は

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき　　$|\ x^2-1\ | = -x^2+1$

$1 \leqq x \leqq 3$ のとき　　$|\ x^2-1\ | = x^2-1$

よって

$$\int_0^3 |\ x^2-1\ | dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2+1)\,dx + \int_1^3 (x^2-1)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^3$$

$$= \left(-\frac{1}{3}+1\right) - 0 + (9-3) - \left(\frac{1}{3}-1\right)$$

$$= \mathbf{\frac{22}{3}}$$

参考　放物線と直線で囲まれた図形の面積

（教科書 p.223）

次の定積分に関する公式は，放物線と直線で囲まれた図形の面積を求めるときによく用いられる。

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

証明　$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta}$

$=\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)$

$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-\frac{1}{2}(\beta+\alpha)^2(\beta-\alpha)+\beta\alpha(\beta-\alpha)$

$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\beta^2+2\beta\alpha+\alpha^2)+6\beta\alpha\}$

$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2)$

$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

例 1　上の公式を利用して，放物線 $y=-x^2+7x-10$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めてみよう。

$-x^2+7x-10=$ 　$-(x-2)(x-5)$ 　より

$S=\int_2^5(-x^2+7x-10)dx=-\int_2^5(x-2)(x-5)\,dx$

$=-\left\{-\frac{1}{6}(5-2)^3\right\}=\frac{9}{2}$

問1　放物線 $y=-x^2+3x+5$ と直線 $y=x+2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$-x^2+3x+5=x+2$ より　　$x=-1,\ 3$

区間 $-1\leqq x\leqq 3$ では　　$-x^2+3x+5\geqq x+2$

よって，求める面積 S は

$S=\int_{-1}^{3}\{(-x^2+3x+5)-(x+2)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx$

$=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)\,dx$

$=-\left[-\frac{1}{6}\{3-(-1)\}^3\right]=\frac{4^3}{6}=\boldsymbol{\frac{32}{3}}$

問 題

（教科書 p.224）

１８　関数 $y=f(x)$ のグラフは 2 点 A(0, 1), B(3, 1) を通り，このグラフ上の各点 $(x,\ y)$ における接線の傾きは x^2-ax である。定数 a の値および関数 $f(x)$ を求めよ。

$f'(x)=x^2-ax$ より

$$f(x)=\int(x^2-ax)\,dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+C$$

点 A，B を通るから

$$f(0)=C=1$$

$$f(3)=9-\frac{9}{2}a+C=1$$

よって　$\boldsymbol{a=2}$

ゆえに　$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1}$

１９　1 次関数 $f(x)=px+q$ について

$$\int_0^1 f(x)dx=-1,\qquad \int_0^1 xf(x)dx=0$$

が同時に成り立つような定数 p，q の値を求めよ。

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(px+q)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}px^2+qx\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}p+q=-1$$

$$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1(px^2+qx)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}px^3+\frac{1}{2}qx^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}p+\frac{1}{2}q=0$$

ゆえに　$\boldsymbol{p=6,\ q=-4}$

２０　次の条件を満たす 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(1)=-2,\qquad f'(1)=1,\qquad \int_{-1}^2 f(x)dx=-\frac{9}{2}$$

$f(x)=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0)$ とおくと

$f(1)=a+b+c=-2$　……①

$f'(x)=2ax+b$ より

$f'(1)=2a+b=1$　……②

$$\int_{-1}^2 f(x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right]_{-1}^2$$

$=3a+\frac{3}{2}b+3c=-\frac{9}{2}$　……③

①，②，③より　$a=1,\ b=-1,\ c=-2$

よって　$\boldsymbol{f(x)=x^2-x-2}$

２１　次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

$$\int_{-2}^x f(t)dt=x^3-5x^2+3ax+2a$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}\int_{-2}^x f(t)\ dt$$

$$=\frac{d}{dx}(x^3-5x^2+3ax+2a)$$

$$=3x^2-10x+3a$$

また　$\int_{-2}^{-2}f(t)\ dt=-8-20-6a+2a=0$

よって　$\boldsymbol{a=-7}$

ゆえに　$\boldsymbol{f(x)=3x^2-10x-21}$

２２ 次の図形の面積を求めよ。

(1) 放物線 $y=x^2-x$ と直線 $y=-3x+8$ で囲まれた図形

$x^2-x=-3x+8$ より　$x=-4,\ 2$

区間 $-4 \leqq x \leqq 2$ では　$x^2-x \leqq -3x+8$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-4}^{2}\{(-3x+8)-(x^2-x)\}\,dx$$

$$=\int_{-4}^{2}(-x^2-2x+8)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+8x\right]_{-4}^{2}=\mathbf{36}$$

(2) 2 つの放物線 $y=x^2-2x-8,\ y=-2x^2+x+10$ で囲まれた図形

$x^2-2x-8=-2x^2+x+10$より　$x=-2,\ 3$

区間 $-2 \leqq x \leqq 3$ では　$x^2-2x-8 \leqq -2x^2+x+10$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^{3}\{(-2x^2+x+10)-(x^2-2x-8)\}\,dx$$

$$=\int_{-2}^{3}(-3x^2+3x+18)\,dx$$

$$=\left[-x^3+\frac{3}{2}x^2+18x\right]_{-2}^{3}=\mathbf{\frac{125}{2}}$$

(3) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+1$ で囲まれた図形

$x^2=2x+1$ より　$x=1\pm\sqrt{2}$

区間 $1-\sqrt{2} \leqq x \leqq 1+\sqrt{2}$ では　$x^2 \leqq 2x+1$

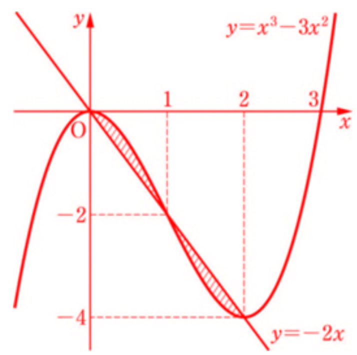
よって，求める面積 S は

$$S=\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}\{(2x+1)-x^2\}\,dx$$

$$=\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(-x^2+2x+1)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{8\sqrt{2}}{3}}$$

２３ 曲線 $y=x^3-3x^2$ と直線 $y=-2x$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。



曲線 $y=x^3-3x^2$ と直線 $y=-2x$ との交点の x 座標は方程式 $x^3-3x^2=-2x$ の解である。

$x(x-1)(x-2)=0$ より

$x=0,\ 1,\ 2$

区間 $0 \leqq x \leqq 1$ では $x^3-3x^2 \geqq -2x$

区間 $1 \leqq x \leqq 2$ では $x^3-3x^2 \leqq -2x$

よって，求める面積の和は

$$\int_{0}^{1}\{(x^3-3x^2)-(-2x)\}\,dx+\int_{1}^{2}\{(-2x)-(x^3-3x^2)\}\,dx$$

$$=\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)\,dx+\int_{1}^{2}(-x^3+3x^2-2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_{1}^{2}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

２４ 2 つの放物線 $y=-3x^2+7x+2$, $y=2x^2-3x+2$ の 2 交点を通る直線を l とする。これら

2 つの放物線で囲まれた図形について，l より上方にある部分の面積 S_1 と，l より下方にある部分の面積 S_2 の比を求めよ。

$-3x^2+7x+2=2x^2-3x+2$より　$x=0,\ 2$

よって，2 つの放物線の交点は

$(0,\ 2)$，$(2,\ 4)$

したがって，直線 l は $y=x+2$ である。

区間 $0\leqq x\leqq 2$ では

$-3x^2+7x+2\geqq x+2$

$2x^2-3x+2\leqq x+2$

ゆえに

$$S_1=\int_0^2\{(-3x^2+7x+2)-(x+2)\}\,dx$$

$$=3\int_0^2(-x^2+2x)\,dx$$

$$S_2=\int_0^2\{(x+2)-(2x^2-3x+2)\}\,dx$$

$$=2\int_0^2(-x^2+2x)\,dx$$

したがって　$\boldsymbol{S_1:S_2=3:2}$

２５ 定積分 $\int_{-2}^{4}|\,x^2-2x-3\,|dx$ を求めよ。

$|\,x^2-2x-3\,|=|\,(x+1)(x-3)\,|$ は

$-2\leqq x\leqq -1$ および $3\leqq x\leqq 4$ のとき

$|\,x^2-2x-3\,|=x^2-2x-3$

$-1\leqq x\leqq 3$ のとき

$|\,x^2-2x-3\,|=-x^2+2x+3$

よって

$$\int_{-2}^{4}|\,x^2-2x-3\,|dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x^2-2x-3)\,dx+\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx+\int_{3}^{4}(x^2-2x-3)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^{3}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{3}^{4}$$

$$=\frac{5}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)+9-\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{20}{3}\right)-(-9)$$

$$=\boldsymbol{\frac{46}{3}}$$

（参考）　曲線 $y=|\,x^2-2x-3\,|$ は直線 $x=1$ に関して対称であるから

$$\int_{3}^{4}|\,x^2-2x-3\,|dx=\int_{-2}^{-1}|\,x^2-2x-3\,|dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x^2-2x-3)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-2}^{-1}$$

$$=\frac{7}{3}\qquad\cdots\cdots①$$

また

$$\int_{-1}^{3}|\,x^2-2x-3\,|dx=\int_{-1}^{3}\{-(x+1)(x-3)\}\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}\qquad\cdots\cdots②$$

①，②より

$$\int_{-2}^{4}|\,x^2-2x-3\,|dx=2\cdot\frac{7}{3}+\frac{32}{3}=\frac{46}{3}$$

参考　$(ax+b)^n$ の微分と積分

（教科書 p.225）

n が正の整数のとき，次の公式が成り立つ。

（⑬ $y=(ax+b)^n$ ）　ならば　（⑭ $y'=an(ax+b)^{n-1}$ ）

例1 $y=(2x+3)^6$ ならば

$$y'=2\cdot 6(2x+3)^{6-1}=12(2x+3)^5$$

問1 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(3x+5)^4$

$$y'=3\cdot 4(3x+5)^{4-1}$$
$$=\mathbf{12(3x+5)^3}$$

(2)　$y=(1-x)^5$

$$y'=-1\cdot 5(1-x)^{5-1}$$
$$=\mathbf{-5(1-x)^4}$$

n が正の整数または 0 のとき，次の公式が成り立つ。

（⑮ $\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C$ ）

例2 $\int(2x+5)^4dx=\frac{1}{2(4+1)}(2x+5)^{4+1}+C$

$$=\frac{1}{10}(2x+5)^5+C$$

問2 不定積分 $\int(x-3)^3dx$ を求めよ。

$$\int(x-3)^3\,dx=\frac{1}{3+1}(x-3)^{3+1}+C$$
$$=\mathbf{\frac{1}{4}(x-3)^4+C}$$

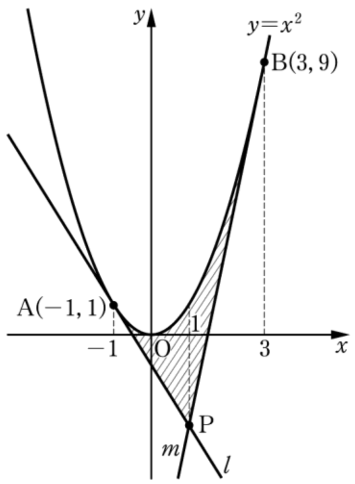
問3 定積分 $\int_0^1(3x-2)^4dx$ を求めよ。

$$\int_0^1(3x-2)^4\,dx=\left[\frac{1}{3\cdot 5}(3x-2)^5\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{15}-\left(-\frac{32}{15}\right)=\frac{33}{15}=\mathbf{\frac{11}{5}}$$

参考　曲線と接線の囲む図形の面積

（教科書 p.226）

例 1 放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 A$(-1,\ 1)$, B$(3,\ 9)$ における接線をそれぞれ l, m とする。このとき，放物線 $y=x^2$ と 2 接線 l, m で囲まれた図形の面積 S を求めてみよう。



$y'=2x$ より

l の方程式は　$y-1=-2(x+1)$

すなわち

$y=-2x-1$　　……①

m の方程式は　$y-9=6(x-3)$

すなわち

$y=6x-9$　　……②

l と m の交点 P の x 座標は①，②より

$-2x-1=6x-9$

ゆえに　　$x=1$

区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ では　　$x^2 \geqq -2x-1$

区間 $1 \leqq x \leqq 3$ では　　$x^2 \geqq 6x-9$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{1}\{x^2-(-2x-1)\}\,dx+\int_{1}^{3}\{x^2-(6x-9)\}\,dx$$

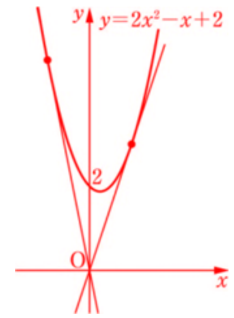
$$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2\,dx+\int_{1}^{3}(x-3)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_{1}^{3}=\frac{16}{3}$$

◀p.225 の 17 行目の公式を用いている

問1 放物線 $y=2x^2-x+2$ について，次の問に答えよ。

(1)　原点 O からこの放物線に引いた 2 本の接線の方程式を求めよ。



接点を P$(a,\ 2a^2-a+2)$ とおく。

$y'=4x-1$ であるから，点 P における接線の方程式は

$y-(2a^2-a+2)=(4a-1)(x-a)$

すなわち

$y=(4a-1)x-2a^2+2$　　……①

①が原点 O を通るから

$-2a^2+2=0$

よって　$a=-1,\ 1$

これらを①に代入すると

$a=-1$ のとき

$y=-5x$

$a=1$ のとき

$y=3x$

したがって，求める接線の方程式は

$\boldsymbol{y=-5x,\ y=3x}$

(2)　(1)で求めた接線と放物線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

区間 $-1 \leqq x \leqq 0$ では　$2x^2-x+2 \geqq -5x$

区間 $0 \leqq x \leqq 1$ では　　$2x^2-x+2 \geqq 3x$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{0}\{(2x^2-x+2)-(-5x)\}\,dx+\int_{0}^{1}\{(2x^2-x+2)-(3x)\}\,dx$$

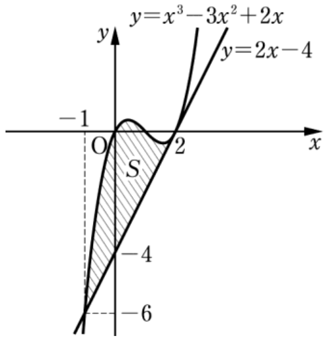
$$=2\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx+2\int_{0}^{1}(x-1)^2\,dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+2\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{0}^{1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

例２ 曲線 $y=x^3-3x^2+2x$ 上の点 $(2,\ 0)$ における接線と曲線で囲まれた図形の面積 S を求めてみよう。

$y'=3x^2-6x+2$ であるから，接線の傾きは（　2　）である。



よって，接線の方程式は

$$y=2x-4$$

曲線と接線の交点の x 座標は

$$x^3-3x^2+2x=2x-4$$

すなわち，方程式 $x^3-3x^2+4=0$ の解である。

$$(x-2)(x^2-x-2)=0$$

$$(x+1)(x-2)^2=0$$

よって　　$x=-1,\ 2$

区間 $-1 \leqq x \leqq 2$ では，$x^3-3x^2+2x \geqq 2x-4$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{2}\{(x^3-3x^2+2x)-(2x-4)\}\,dx$$

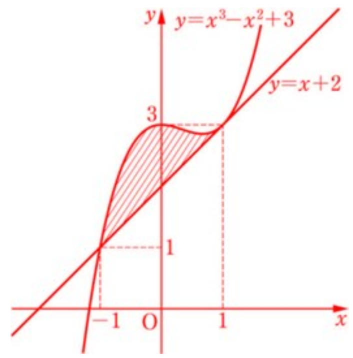
$$=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{27}{4}$$

問2　曲線 $y=x^3-x^2+3$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線と曲線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$y'=3x^2-2x$ であるから，接線の傾きは 1である。



よって，接線の方程式は

$$y=x+2$$

曲線と接線の交点の x 座標は

$$x^3-x^2+3=x+2$$

すなわち

$$x^3-x^2-x+1=0$$

$$(x+1)(x-1)^2=0$$

これを解いて　　$x=-1,\ 1$

区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ では，$x^3-x^2+3 \geqq x+2$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^3-x^2+3)-(x+2)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$