2節 導関数の応用

1 接線

（教科書 p.192）

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい。したがって，次のことが成り立つ。

接線の方程式
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は $\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$

例1 曲線 $y=x^2-4x+4$ 上の点 $(3,\ 1)$ における接線の方程式を求めてみよう。

$f(x)=x^2-4x+4$ とおくと

よって，接線の傾きは

したがって，接線の方程式は

すなわち

問1 曲線 $y=2x^2-5x$ 上の点 $(2,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

例2 曲線 $y=-x^2+2x$ について，傾きが 4 の接線の方程式を求めてみよう。

$f(x)=-x^2+2x$ とおくと

接点の x 座標を a とすると

$f'(a)=$

したがって，接線の方程式は

すなわち

問2 曲線 $y=x^2+x-1$ について，傾きが -3 の接線の方程式を求めよ。

応用例題1 点 $\mathrm{A}(3,\ -4)$ から曲線 $y=x^2-3x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

考え方 接点を $(a,\ a^2-3a)$ として，接線の方程式を a を用いて表す。

解

問3　点 $\mathrm{A}(-1,\ -7)$ から曲線 $y=x^2+1$ に引いた接線の方程式を求めよ。

2 関数の増減と極大・極小

（教科書 p.194）

実数 $a,\ b$ に対して

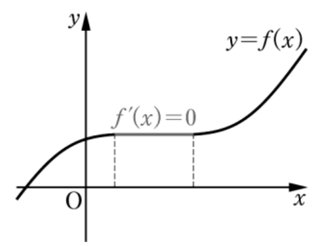
$$a<x<b,\qquad a \leqq x \leqq b,\qquad a<x,\qquad x \leqq b$$

のような不等式を満たす実数 x の値の範囲を（①　　　　　　）という。

関数の増減

導関数の符号と関数の増減
ある区間で つねに $\boldsymbol{f'(x)>0}$ ならば，$f(x)$ は**その区間で増加**する。 つねに $\boldsymbol{f'(x)<0}$ ならば，$f(x)$ は**その区間で減少**する。

ある区間でつねに（②　　　　　　　　）ならば，$f(x)$ は（③　　　　　　　　　　）である。



例題 2　関数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ の増減を調べよ。

解

注意　例題 2 の関数は，区間 $x<0$ で増加するが，端の点を含めて区間 $x \leqq 0$ でもやはり増加しているといえる。減少する区間についても同様である。

関数の増加・減少を表すとき，例題 2 の解で示したような表が用いられる。この表を

（④　　　　　　　）という。増減表の中で記号 ↗ は増加を表し，記号 ↘ は減少を表す。

問4 次の関数の増減を調べよ。

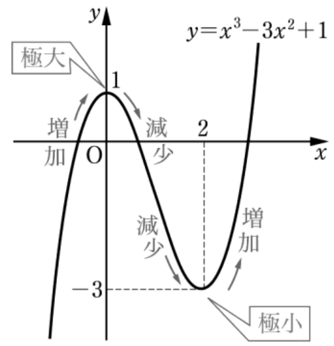
(1)　$f(x)=-x^3+6x^2$

(2)　$f(x)=4x^3-3x+2$

関数の極大・極小

（教科書 p.196）

前ページの例題２で増減を調べた関数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ について，増減表をもとにして $y=f(x)$のグラフをかくと，右の図のようになる。



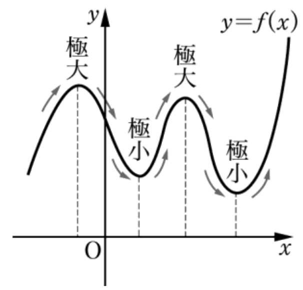
この関数は，$x=0$ を境にして増加の状態から減少の状態に変わる。このとき，$f(x)$ は $x=0$ において（⑤　　　　　　）になるといい，そのときの $f(x)$ の値 $f(0)=1$ を（⑥　　　　　　）という。

また，この関数は，$x=2$ を境にして減少の状態から増加の状態に変わる。このとき，$f(x)$ は $x=2$ において（⑦　　　　　　）になるといい，そのときの $f(x)$ の値 $f(2)=-3$ を（⑧　　　　　　）という。

さらに，極大値と極小値を合わせて（⑨　　　　　　）という。

極大・極小

$f'(a)=0$
となる $x=a$ を境にして
$f'(x)$ が正から負に変わるならば
$f(a)$ は極大値
$f'(x)$ が負から正に変わるならば
$f(a)$ は極小値



例題 3　関数 $f(x)=x^3-12x-1$ の極値を求めよ。

解

問5 次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

(2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

例題 4 関数 $y = 2x^3 - 3x^2$ のグラフをかけ。

解

問6 次の関数のグラフをかけ。

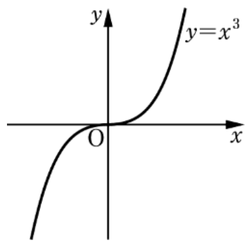
(1) $y = x^3 - 6x$

(2) $y = -2x^3 + 6x - 4$

例3 関数 $f(x)=x^3$ について　　$f'(x)=3x^2$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$
$f'(x)$			
$f(x)$			



ゆえに，$f(x)$ はつねに増加し，極値をもたない。

例 3 のように，（⑩　　　　　　　　　　　　）。

問7 関数 $f(x)=x^3-3x^2+3x$ が極値をもつかどうか調べよ。

応用例題 5 関数 $y=x^4-4x^2$ の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

解

問8 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

（1）$y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2$

⑵ $y=x^4-2x^3$

応 用
例題
6

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ が $x=1$ で極大値，$x=3$ で極小値をとるような定数a，b の値を求めよ。また，そのときの極値を求めよ。

解

問9　関数 $f(x)=-x^3+ax^2+bx$ が $x=-1$ で極小値，$x=2$ で極大値をとるような定数a，b の値を求めよ。また，そのときの極値を求めよ。

3 関数の最大･最小

（教科書 p.200）

例題 7　関数 $f(x)=4x^3-3x^2-6x+2$ の区間 $-1 \leqq x \leqq 2$ における最大値と最小値を求めよ。

考え方

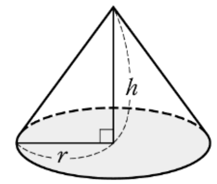
解

問 10 次の関数の（　）内の区間における最大値と最小値を求めよ。

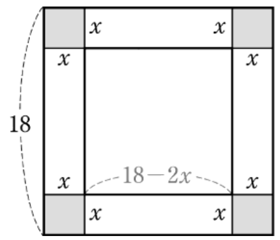
(1)　$f(x)=2x^3+x^2-4x$　　$(-2 \leqq x \leqq 0)$

⑵ $f(x)=-4x^3+9x^2+12x-1 \qquad (-2 \leqq x \leqq 3)$

問 11 底面の半径と高さの和が 30cm である円錐を考える。円錐の体積が最大となるとき，底面の半径と高さを求めよ。



応用例題 8 1 辺の長さが 18cm の正方形の厚紙がある。いま，この 4 隅から 1 辺の長さが $x$cm の同じ大きさの正方形を切り取り，その残りを折り曲げてふたのない箱を作る。この箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さをいくらにすればよいか。



解

4 方程式・不等式への応用

（教科書 p.202）

問 12 次の方程式の異なる実数解の個数を調べよ。

（1） $2x^3 - 6x + 1 = 0$

(2) $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 = 0$

応用 例題 9

3 次方程式 $x^3-3x-a=0$ の異なる実数解の個数は，定数 a の値によってどのように変わるか。

解

問 13　3 次方程式 $2x^3-3x^2-a=0$ の異なる実数解の個数は，定数 a の値によってどのように変わるか。

応用 例題 10 $x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$x^3 + 4 \geqq 3x^2$$

考え方

証明

問 14 $x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$x^3 + 2 \geqq 3x$$

問 題

（教科書 p.205）

9 関数 $y=2x^3-16x+11$ のグラフ上の点 $(2,\ -5)$ における接線の方程式を求めよ。

１０ 関数 $y=x^3$ のグラフについて，傾きが 3 の接線の方程式を求めよ。

１１ 関数 $f(x)=-x^4+2ax^2+3$ が $x=1$ において極値をとるとき，定数 a の値を求めよ。

また，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

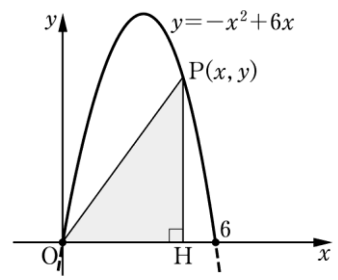
１２ 関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + 2$ が $x = 1$ で極小値 -6 をとるような定数 $a,\ b$ の値を求めよ。

１３ 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 2$ が極大値と極小値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

１４ 右の図のように，関数

$$y = -x^2 + 6x \quad (0 \leqq x \leqq 6)$$

のグラフ上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から x 軸に垂線PH を下ろす。このとき，$\triangle\mathrm{POH}$ の面積を最大にする x の値と面積の最大値を求めよ。



１５　3 次方程式 $x^3+4x^2-3x+a=0$ の異なる実数解の個数は，定数 a の値によってどのように変わるか。

１６　$a>0$ として，3 次方程式 $ax^3-6ax^2+64=0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

１７　$x \geqq 0$ のとき，不等式

$$x^3+a>3x^2+9x$$

が成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ。

2 節 導関数の応用

1 接線

（教科書 p.192）

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい。したがって，次のことが成り立つ。

接線の方程式
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は $\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$

例1 曲線 $y=x^2-4x+4$ 上の点 $(3,\ 1)$ における接線の方程式を求めてみよう。

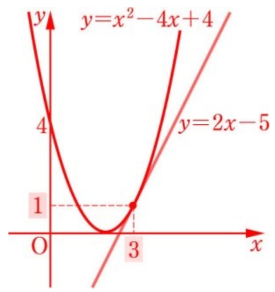
$f(x)=x^2-4x+4$ とおくと

$f'(x)=2x-4$

よって，接線の傾きは　$f'(3)=2$

したがって，接線の方程式は

$y-1=2(x-3)$　　すなわち　　$y=2x-5$



問1 曲線 $y=2x^2-5x$ 上の点 $(2,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

$f(x)=2x^2-5x$ とおくと

$f'(x)=4x-5$

接線の傾きは $f'(2)=3$ であるから，求める接線の方程式は

$y-(-2)=3(x-2)$

すなわち　　$\boldsymbol{y=3x-8}$

例2 曲線 $y=-x^2+2x$ について，傾きが 4 の接線の方程式を求めてみよう。

$f(x)=-x^2+2x$ とおくと　　$f'(x)=-2x+2$

接点の x 座標を a とすると

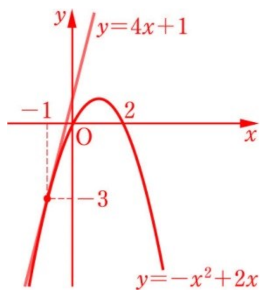
$f'(a)=-2a+2=4$ より　　$a=-1$

$f(-1)=-(-1)^2+2\cdot(-1)=-3$

したがって，接線の方程式は

$y-(-3)=4\{x-(-1)\}$

すなわち　$y=4x+1$



問2 曲線 $y=x^2+x-1$ について，傾きが -3 の接線の方程式を求めよ。

$f(x)=x^2+x-1$ とおくと

$f'(x)=2x+1$

接点の x 座標を a とすれば

$f'(a)=2a+1=-3$ より　　$a=-2$

$f(-2)=(-2)^2+(-2)-1=1$

したがって，求める接線の方程式は

$y-1=-3(x+2)$

すなわち　　$\boldsymbol{y=-3x-5}$

応用例題 1 点 $A(3,\ -4)$ から曲線 $y=x^2-3x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

考え方 接点を $(a,\ a^2-3a)$ として，接線の方程式を a を用いて表す。

解 接点を $P(a,\ a^2-3a)$ とおく。

$y'=2x-3$ であるから，接線の傾きは $2a-3$ である。

よって，接線 AP の方程式は

$y-(a^2-3a)=(2a-3)(x-a)$

すなわち　　$y=(2a-3)x-a^2$　　……①

①が点 $(3,\ -4)$ を通るから

$-4=3(2a-3)-a^2$

整理すると

$a^2-6a+5=0$

$(a-1)(a-5)=0$

ゆえに

$a=1,\ 5$

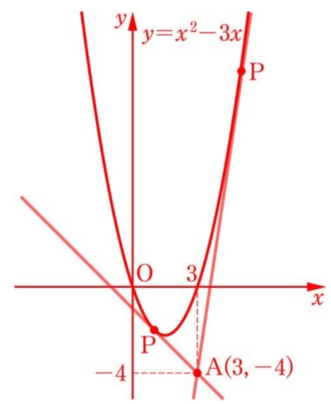
これらを①に代入して

$a=1$ のとき　　$y=-x-1$

$a=5$ のとき　　$y=7x-25$

よって，求める接線の方程式は

$y=-x-1,\quad y=7x-25$



問3　点 $A(-1,\ -7)$ から曲線 $y=x^2+1$ に引いた接線の方程式を求めよ。

接点を $P(a,\ a^2+1)$ とおく。

$y'=2x$ であるから，接線の傾きは $2a$ である。

よって，接線 AP の方程式は

$$y-(a^2+1)=2a(x-a)$$

すなわち　$y=2ax-a^2+1$　……①

①が点 $(-1,\ -7)$ を通るから

$$-7=-2a-a^2+1$$

よって　$a^2+2a-8=0$

$$(a+4)(a-2)=0$$

ゆえに　$a=-4,\ 2$

これらを①に代入して

$a=-4$ のとき　$y=-8x-15$

$a=2$ のとき　$y=4x-3$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=-8x-15,\ y=4x-3}$$

2 関数の増減と極大・極小

（教科書 p.194）

実数 $a,\ b$ に対して

$$a<x<b,\quad a\leqq x\leqq b,\quad a<x,\quad x\leqq b$$

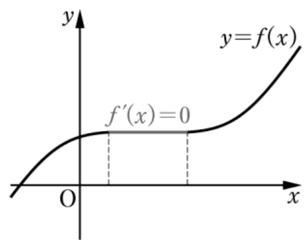
のような不等式を満たす実数 x の値の範囲を（① 区間 ）という。

関数の増減

導関数の符号と関数の増減

ある区間で
　つねに $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ は**その区間で増加**する。
　つねに $f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ は**その区間で減少**する。

ある区間でつねに（② $f'(x)=0$ ）ならば，$f(x)$ は（③ その区間で定数 ）である。



例題 2　関数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ の増減を調べよ。

解　$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ となる x は　$x=0,\ 2$

$x<0,\ 2<x$ のとき　$f'(x)>0$

$0<x<2$ のとき　$f'(x)<0$

よって，$f'(x)$ の符号および $f(x)$ の増減は次の表のようになる。

x	……	0	……	2	……
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	−3	↗

したがって　区間 $x\leqq 0$ と 区間 $2\leqq x$ で増加

区間 $0\leqq x\leqq 2$ で減少

注意　例題 2 の関数は，区間 $x<0$ で増加するが，端の点を含めて区間 $x\leqq 0$ でもやはり増加しているといえる。減少する区間についても同様である。

関数の増加・減少を表すとき，例題 2 の解で示したような表が用いられる。この表を

（④　増減表　）という。増減表の中で記号 ↗ は増加を表し，記号 ↘ は減少を表す。

問4 次の関数の増減を調べよ。

(1)　$f(x)=-x^3+6x^2$

$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$

$f'(x)=0$ となる x は　$x=0,\ 4$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	32	↘

したがって

区間 $0 \leqq x \leqq 4$ で増加

区間 $x \leqq 0$ と区間 $4 \leqq x$ で減少

(2)　$f(x)=4x^3-3x+2$

$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$

$f'(x)=0$ となる x は　$x=\pm\frac{1}{2}$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	1	↗

したがって

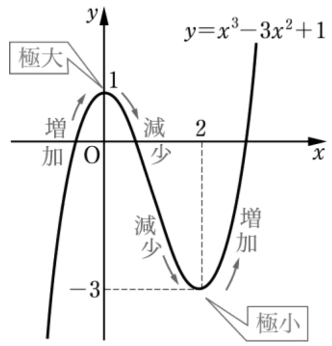
区間 $x \leqq -\frac{1}{2}$ と区間 $\frac{1}{2} \leqq x$ で増加

区間 $-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ で減少

関数の極大・極小

（教科書 p.196）

前ページの例題２で増減を調べた関数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ について，増減表をもとにして $y=f(x)$のグラフをかくと，右の図のようになる。



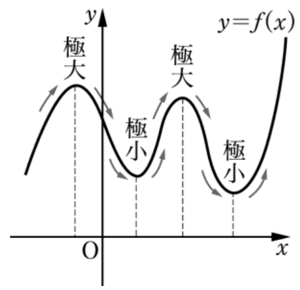
この関数は，$x=0$ を境にして増加の状態から減少の状態に変わる。このとき，$f(x)$ は $x=0$ において（⑤　極大　）になるといい，そのときの $f(x)$ の値 $f(0)=1$ を（⑥　極大値　）という。

また，この関数は，$x=2$ を境にして減少の状態から増加の状態に変わる。このとき，$f(x)$ は $x=2$ において（⑦　極小　）になるといい，そのときの $f(x)$ の値 $f(2)=-3$ を（⑧　極小値　）という。

さらに，極大値と極小値を合わせて（⑨　極値　）という。

極大・極小

$f'(a)=0$
となる $x=a$ を境にして
$f'(x)$ が正から負に変わるならば
$f(a)$ は極大値
$f'(x)$ が負から正に変わるならば
$f(a)$ は極小値



例題 3　関数 $f(x)=x^3-12x-1$ の極値を求めよ。

解　$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$ となる x は　$x=-2,\ 2$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots\cdots$	-2	$\cdots\cdots$	2	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	15	↘	-17	↗

ゆえに，$f(x)$ の極値は次のようになる。

$x=-2$ のとき　極大値 15

$x=2$ のとき　極小値 -17

問5 次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

$f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$

$f'(x) = 0$ となる x は　$x = 3$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗

ゆえに

$x = 3$ のとき　極小値 -4

極大値なし

(2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$= 3(x + 1)(x - 3)$

$f'(x) = 0$ となる x は　$x = -1,\ 3$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5	↘	-27	↗

ゆえに

$x = -1$ のとき　極大値 5

$x = 3$ のとき　極小値 -27

例題 4　関数 $y = 2x^3 - 3x^2$ のグラフをかけ。

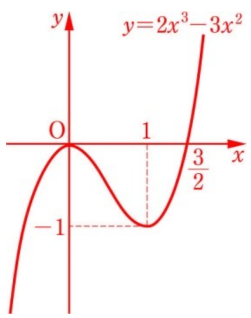
解

$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$

$y' = 0$ となる x は　$x = 0,\ 1$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 0	↘	極小 -1	↗



したがって，この関数のグラフは右上の図のようになる。

問6 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = x^3 - 6x$

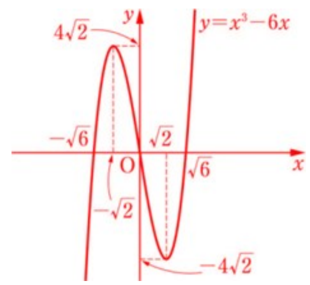
$y' = 3x^2 - 6 = 3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

$y' = 0$ となる x は　$x = \pm\sqrt{2}$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 $4\sqrt{2}$	↘	極小 $-4\sqrt{2}$	↗

これよりグラフは次の図のようになる。



(2) $y = -2x^3 + 6x - 4$

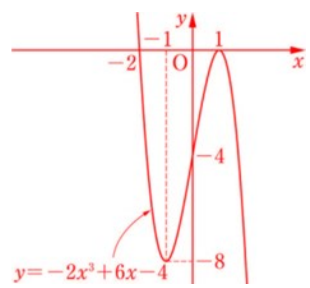
$y' = -6x^2 + 6 = -6(x + 1)(x - 1)$

$y' = 0$ となる x は　$x = \pm 1$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -8	↗	極大 0	↘

これよりグラフは次の図のようになる。

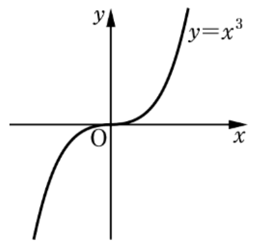


例3 関数 $f(x)=x^3$ について　　$f'(x)=3x^2$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	……	0	……
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	0	↗

ゆえに，$f(x)$ はつねに増加し，極値をもたない。



例 3 のように，(⑩　$f'(a)=0$ であっても $f(a)$ が極値になるとは限らない　)。

問7 関数 $f(x)=x^3-3x^2+3x$ が極値をもつかどうか調べよ。

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$ となる x は　$x=1$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	1	…
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	1	↗

ゆえに，$f(x)$ はつねに増加し，極値をもたない。

応用例題5 関数 $y=x^4-4x^2$ の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

解 $y'=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$y'=0$ となる x は　　$x=-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}$

よって，y の増減表は次のようになる。

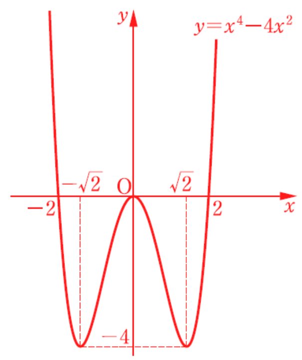
x	……	$-\sqrt{2}$	……	0	……	$\sqrt{2}$	……
y'	−	0	+	0	−	0	+
y	↘	極小 -4	↗	極大 0	↘	極小 -4	↗

ゆえに，y の極値は次のようになる。

$x=0$ のとき　　極大値 0

$x=\pm\sqrt{2}$ のとき　　極小値 -4

また，この関数のグラフは右の図のようになる。



問8 次の関数の極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2$

$y'=x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$

$y'=0$ となる x は　$x=-2,\ 0,\ 1$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	…	-2	…	0	…	1	…
y'	−	0	+	0	−	0	+
y	↘	極小 $-\frac{8}{3}$	↗	極大 0	↘	極小 $-\frac{5}{12}$	↗

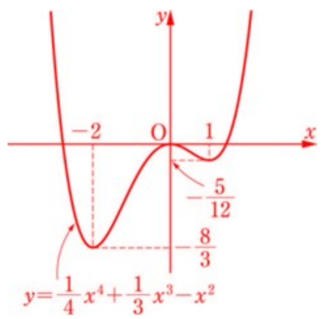
ゆえに，y の極値は次のようになる。

$x=0$ のとき　極大値 **0**

$x=-2$ のとき　極小値 $-\frac{8}{3}$

$x=1$ のとき　極小値 $-\frac{5}{12}$

また，この関数のグラフは次の図のようになる。



(2) $y=x^4-2x^3$

$y'=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$

$y'=0$ となる x は $x=0,\ \frac{3}{2}$

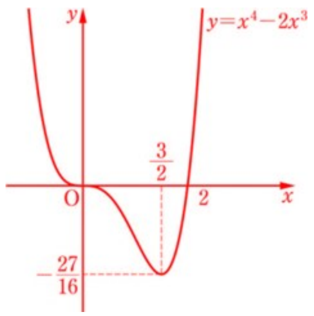
よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	0	↘	極小 $-\frac{27}{16}$	↗

ゆえに，$x=\frac{3}{2}$ のとき 極小値 $-\frac{27}{16}$

極大値なし

また，この関数のグラフは次の図のようになる。



応用例題 6 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ が $x=1$ で極大値，$x=3$ で極小値をとるような定数a，b の値を求めよ。また，そのときの極値を求めよ。

解 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

関数 $f(x)$ は $x=1$, $x=3$ で極値をとるから

$f'(1)=0,\quad f'(3)=0$

すなわち $3+2a+b=0,\quad 27+6a+b=0$

これを解くと $a=-6,\quad b=9$

したがって $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$

このとき $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$	3	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，$f(x)$ は確かに $x=1$ で極大値，$x=3$ で極小値をとる。

以上より，求める a, b の値は $a=-6,\quad b=9$

また，$f(x)$ の極値は，$x=1$ のとき 極大値 3

$x=3$ のとき 極小値 -1

問9 関数 $f(x)=-x^3+ax^2+bx$ が $x=-1$ で極小値，$x=2$ で極大値をとるような定数a，b の値を求めよ。また，そのときの極値を求めよ。

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

関数 $f(x)$ が $x=-1$，2 で極値をとるから

$f'(-1)=0$，$f'(2)=0$

すなわち　$-3-2a+b=0$

$-12+4a+b=0$

これを解くと　$a=\frac{3}{2}$，$b=6$

したがって

$$f(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x$$

このとき

$f'(x)=-3x^2+3x+6$

$=-3(x+1)(x-2)$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

したがって，$f(x)$ は確かに $x=-1$ で極小値，$x=2$ で極大値をとる。

以上より，求める a，b の値は　$\boldsymbol{a=\frac{3}{2}}$，$\boldsymbol{b=6}$

また，$f(x)$の極値は

$\boldsymbol{x=2}$ のとき　極大値 $\mathbf{10}$

$\boldsymbol{x=-1}$ のとき　極小値 $-\frac{7}{2}$

3 関数の最大・最小　（教科書 p.200）

例題 7 関数 $f(x)=4x^3-3x^2-6x+2$ の区間 $-1\leqq x\leqq 2$ における最大値と最小値を求めよ。

考え方 区間 $a\leqq x\leqq b$ における $f(x)$ の最大値，最小値を調べるには，極値と区間の両端での値 $f(a)$，$f(b)$ とを比較すればよい。

解 $f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$ であるから，区間 $-1\leqq x\leqq 2$ において，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	極大 $\frac{15}{4}$	↘	極小 -3	↗	10

ゆえに，$f(x)$ は

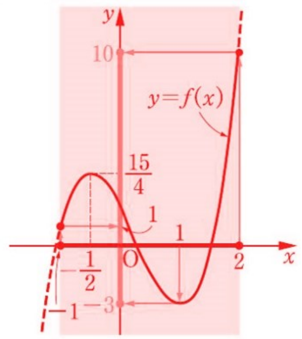
$x=2$ のとき

最大値 10

$x=1$ のとき

最小値 -3

をとる。



問 10 次の関数の（　）内の区間における最大値と最小値を求めよ。

(1)　$f(x)=2x^3+x^2-4x$　$(-2\leqq x\leqq 0)$

$f'(x)=6x^2+2x-4$

$=2(x+1)(3x-2)$

区間 $-2\leqq x\leqq 0$ において，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-4	↗	極大 3	↘	0

ゆえに

$x=-1$ のとき　最大値 $\mathbf{3}$

$x=-2$ のとき　最小値 $\mathbf{-4}$

(2) $f(x)=-4x^3+9x^2+12x-1 \quad (-2 \leqq x \leqq 3)$

$f'(x)=-12x^2+18x+12$

$=-6(2x+1)(x-2)$

区間 $-2 \leqq x \leqq 3$ において，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	43	↘	極小 $-\frac{17}{4}$	↗	極大 27	↘	8

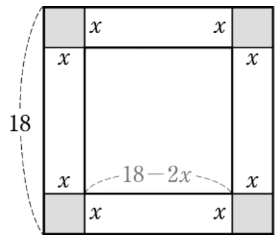
ゆえに

$x=-2$ のとき　最大値 **43**

$x=-\frac{1}{2}$ のとき　最小値 $-\frac{17}{4}$

応用 例題 8

1 辺の長さが 18cm の正方形の厚紙がある。いま，この 4 隅から 1 辺の長さが $x$cm の同じ大きさの正方形を切り取り，その残りを折り曲げてふたのない箱を作る。この箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さをいくらにすればよいか。



解 箱の底面の 1 辺の長さは $(18-2x)$cm であるから，x のとり得る値の範囲は，

$x>0$，$18-2x>0$ より

$0<x<9$　……①

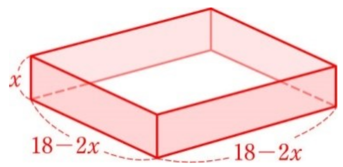
箱の容積を $y\text{cm}^3$ とすると

$y=x(18-2x)^2$

$=12(x-3)(x-9)$

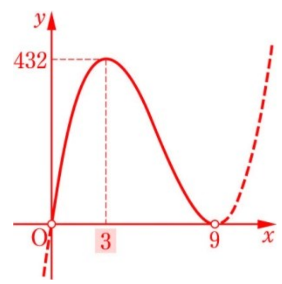
$y'=12x^2-144x+324$

$=12(x-3)(x-9)$



①の区間における y の増減表は

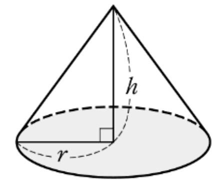
x	0	……	3	……	9
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	極大 432	↘	



よって，$x=3$ のとき y の値は最大となる。

すなわち，切り取る正方形の 1 辺の長さを 3cm にすればよい。

問 11 底面の半径と高さの和が 30cm である円錐を考える。円錐の体積が最大となるとき，底面の半径と高さを求めよ。



底面の半径を r cm，体積を V cm^3 とする。

高さを h cm とすると，$h=30-r$ より

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2(30-r)$$

$$=\frac{1}{3}\pi(30r^2-r^3)$$

ここで，$r>0$，$30-r>0$ より

$0<r<30$

$$V'=\frac{1}{3}\pi(60r-3r^2)$$

$$=-\pi r(r-20)$$

$0<r<30$ における V の増減表は次のようになる。

r	0	$\cdots$	20	$\cdots$	30
V'	／	$+$	0	$-$	／
V	／	↗	極大	↘	／

よって，$r=20$ のとき V の値は最大となる。

ゆえに　底面の半径は **20 cm**，

高さは **10 cm**

y'

4 方程式・不等式への応用

（教科書 p.202）

問 12 次の方程式の異なる実数解の個数を調べよ。

（1） $2x^3-6x+1=0$

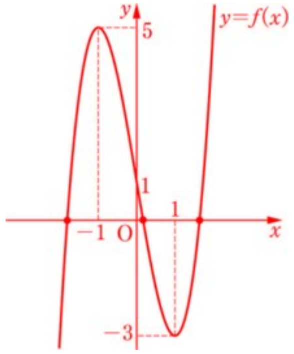
$f(x)=2x^3-6x+1$ とおくと

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 5	↘	極小 -3	↗

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは次の図のようになる。



よって，異なる実数解の個数は　**3** 個

（2） $2x^3+3x^2-12x+7=0$

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+7$ とおくと

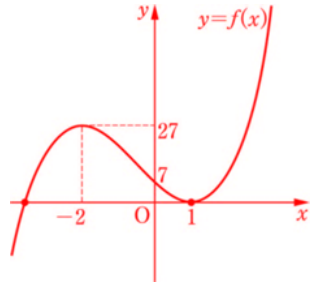
$f'(x)=6x^2+6x-12$

$=6(x+2)(x-1)$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 27	↘	極小 0	↗

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは次の図のようになる。



よって，異なる実数解の個数は　**2** 個

応用例題 9 3 次方程式 $x^3-3x-a=0$ の異なる実数解の個数は，定数 a の値によってどのように変わるか。

解 3 次方程式 $x^3-3x-a=0$ ……①

を変形すると

$$x^3-3x=a$$

◀定数 a を分離

ここで，$f(x)=x^3-3x$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数は，3 次方程式①の異なる実数解の個数と一致する。また

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	……	-1	……	1	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

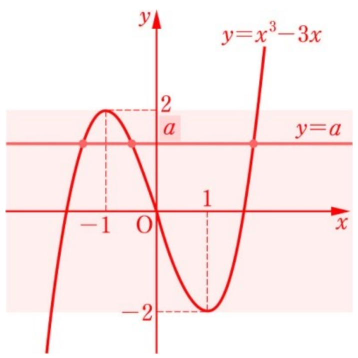
これより，$y=f(x)$ のグラフをかくと右の図のようになる。

よって，3 次方程式①の異なる実数解の個数は，次のようになる。

$a<-2,\ 2<a$ のとき　1 個

$a=-2,\ 2$ のとき　2 個

$-2<a<2$ のとき　3 個



問 13 3 次方程式 $2x^3-3x^2-a=0$ の異なる実数解の個数は，定数 a の値によってどのように変わるか。

$2x^3-3x^2=a$ と変形して

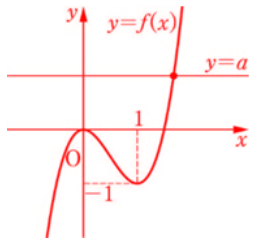
$f(x)=2x^3-3x^2$ とおくと

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	0	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 0	↘	極小 -1	↗

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは次の図のようになる。



このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を調べる。異なる実数解の個数は

$a<-1,\ 0<a$ のとき　1 個

$a=-1,\ 0$ のとき　2 個

$-1<a<0$ のとき　3 個

応用例題 10　$x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$x^3+4 \geqq 3x^2$$

考え方　関数 $f(x)=(x^3+4)-3x^2$ の $x \geqq 0$ における増減を考え，最小値に着目する。

◀ $A \geqq B \iff A-B \geqq 0$

証明

$$f(x)=(x^3+4)-3x^2$$
$$=x^3-3x^2+4$$

とおくと

$$f'(x)=3x^2-6x$$
$$=3x(x-2)$$

$x \geqq 0$ の範囲において，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	……	2	……
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	極小 0	↗

これより，$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=0$ であるから

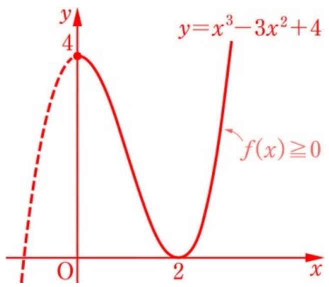
$$f(x) \geqq 0$$

すなわち

$$(x^3+4)-3x^2 \geqq 0$$

ゆえに，$x \geqq 0$ のとき

$$x^3+4 \geqq 3x^2$$



問 14　$x \geqq 0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$x^3+2 \geqq 3x$$

$f(x)=(x^3+2)-3x=x^3-3x+2$ とおくと

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$x \geqq 0$ の範囲において，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	…	1	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	極小 0	↗

したがって，$x \geqq 0$ のとき　$f(x) \geqq 0$

すなわち　$(x^3+2)-3x \geqq 0$

ゆえに　$x^3+2 \geqq 3x$

問 題

（教科書 p.205）

9 関数 $y=2x^3-16x+11$ のグラフ上の点 $(2,\ -5)$ における接線の方程式を求めよ。

$f(x)=2x^3-16x+11$ とおくと

$f'(x)=6x^2-16$

接線の傾きは $f'(2)=8$ であるから，接線の方程式は　$y+5=8(x-2)$

すなわち　$\boldsymbol{y=8x-21}$

１０ 関数 $y=x^3$ のグラフについて，傾きが 3 の接線の方程式を求めよ。

$f(x)=x^3$ とおくと　$f'(x)=3x^2$

接点の x 座標を a とおくと

$f'(a)=3a^2=3$ より　$a=\pm1$

接線の方程式は

$a=1$ のとき　$y-1^3=3(x-1)$

すなわち　$y=3x-2$

$a=-1$ のとき　$y-(-1)^3=3\{x-(-1)\}$

すなわち　$y=3x+2$

よって，求める接線の方程式は

$\boldsymbol{y=3x-2}$，$\boldsymbol{y=3x+2}$

１１ 関数 $f(x)=-x^4+2ax^2+3$ が $x=1$ において極値をとるとき，定数 a の値を求めよ。

また，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

$f'(x)=-4x^3+4ax$

関数 $f(x)$ は $x=1$ で極値をとるから

$f'(1)=-4+4a=0$

よって　$a=1$

したがって　$f(x)=-x^4+2x^2+3$

このとき　$f'(x)=-4x^3+4x$

$=-4x(x+1)(x-1)$

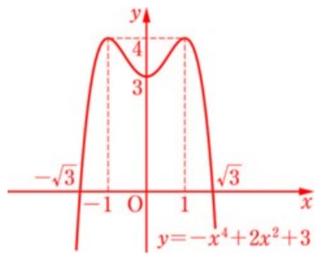
よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大 4	↘	極小 3	↗	極大 4	↘

したがって，$f(x)$ は確かに $x=1$ で極値をとる。

以上より，求める a の値は　$\boldsymbol{a=1}$

また，$y=f(x)$ のグラフは次の図のようになる。



１２　関数 $y=x^3+ax^2+bx+2$ が $x=1$ で極小値 -6 をとるような定数 a, b の値を求めよ。

$f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ とおくと

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

関数 $f(x)$ が $x=1$ で極小値 -6 をとるから

$f'(1)=0$, $f(1)=-6$

よって　$3+2a+b=0$　……①

$1+a+b+2=-6$　……②

①，②より　$a=6$, $b=-15$

したがって　$f(x)=x^3+6x^2-15x+2$

このとき　$f'(x)=3x^2+12x-15$

$=3(x+5)(x-1)$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 102	↘	極小 -6	↗

したがって，確かに条件を満たす。

ゆえに　$\boldsymbol{a=6}$, $\boldsymbol{b=-15}$

１３　関数 $f(x)=x^3+ax^2+3x+2$ が極大値と極小値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

極値を 2 個もつから，$f'(x)=0$ が異なる 2 個の実数解 α, β　$(\alpha<\beta)$ をもたなければならない。

逆にこのとき

$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$

となり，$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小となるから条件を満たす。

よって，2 次方程式 $f'(x)=0$ の判別式を D とすると

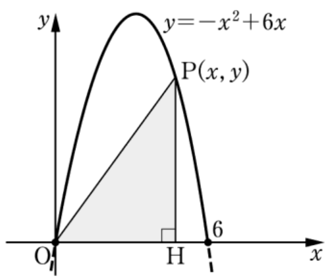
$$\frac{D}{4}=a^2-9>0$$

したがって　$\boldsymbol{a<-3}$, $\boldsymbol{3<a}$

１４　右の図のように，関数

$y=-x^2+6x$　$(0\leqq x\leqq 6)$

のグラフ上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から x 軸に垂線PH を下ろす。このとき，△POH の面積を最大にする x の値と面積の最大値を求めよ。



△ POH の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OH}\cdot\mathrm{PH}=\frac{1}{2}xy$$

$$=\frac{1}{2}x(-x^2+6x)$$

$$=-\frac{1}{2}x^3+3x^2$$

$$S'=-\frac{3}{2}x^2+6x$$

$$=-\frac{3}{2}x(x-4)$$

ここで，$0<x<6$ における増減表をつくると，次のようになる。

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	極大 16	↘	

よって，$\boldsymbol{x=4}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{16}$

１５　3 次方程式 $x^3+4x^2-3x+a=0$ の異なる実数解の個数は，定数 a の値によってどのように変わるか。

$-x^3-4x^2+3x=a$ と変形して

$f(x)=-x^3-4x^2+3x$ とおくと

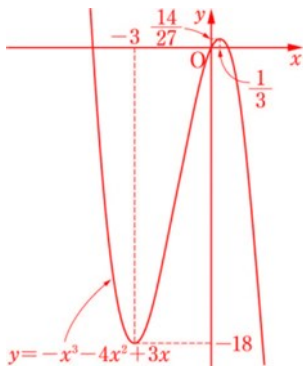
$f'(x)=-3x^2-8x+3$

$=-(x+3)(3x-1)$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 -18	↗	極大 $\frac{14}{27}$	↘

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは次の図のようになる。



このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を求めればよいから

$\boldsymbol{a<-18,\ \frac{14}{27}<a}$ のとき　**1** 個

$\boldsymbol{a=-18,\ \frac{14}{27}}$ のとき　**2** 個

$\boldsymbol{-18<a<\frac{14}{27}}$ のとき　**3** 個

１６　$a>0$ として，3 次方程式 $ax^3-6ax^2+64=0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$f(x)=ax^3-6ax^2+64$ とおくと

$f'(x)=3ax^2-12ax=3ax(x-4)$

$a>0$ より，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 64	↘	極小 $-32a+64$	↗

異なる 3 個の実数解をもつのは，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 つの点を共有するときである。

よって，$f(4)<0$ より

$-32a+64<0$

すなわち　$\boldsymbol{a>2}$

１７　$x\geqq 0$ のとき，不等式

$$x^3+a>3x^2+9x$$

が成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ。

$f(x)=(x^3+a)-(3x^2+9x)$

$=x^3-3x^2-9x+a$

とおくと

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$x\geqq 0$ の範囲において，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	a	↘	極小 $a-27$	↗

$x\geqq 0$ の範囲でつねに $f(x)>0$ であればよいから

$a-27>0$

よって　$\boldsymbol{a>27}$