練習問題Ａ

（教科書 p.58）

1　次の等式が成り立つことを示せ。

$${}_n\mathrm{C}_0 - 2\cdot{}_n\mathrm{C}_1 + 2^2\cdot{}_n\mathrm{C}_2 - \cdots + (-2)^n\cdot{}_n\mathrm{C}_n = (-1)^n$$

2　次の等式を満たす実数 $x,\ y$ を求めよ。

(1)　$(3+2i)(x+yi) = 16-11i$

(2)　$\frac{3+i}{x+yi} = 1+i$

3　次の 2 つの 2 次方程式の一方が異なる 2 つの実数解をもち，他方が虚数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

$x^2-2x+a=0$

$x^2+4x-2a=0$

4　2 次方程式 $x^2+kx-k-1=0$ の 2 つの解を α，β とする。
$\alpha^2+\beta^2=10$ となるような定数 k の値を求めよ。
また，そのときの α，β の値を求めよ。

5　整式 $3x^3+ax^2+bx-6$ が整式 x^2+x-2 で割り切れるように，定数 a，b の値を定めよ。

6　$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$$

7　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$

(2)　$a,\ b,\ c,\ d$ が正の数のとき　$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right) \geqq 4$

⑶　$a,\ b$ が正の数のとき　$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right) \geqq 9$

練習問題B

（教科書 p.59）

8 2 次方程式 $x^2+4kx+5k-1=0$ の異なる 2 つの解がともに -2 より大きくなるような定数 k の値の範囲を求めよ。

9 $x=1-\sqrt{3}i$ のとき，次の問に答えよ。

(1) $x^2-2x+4=0$ となることを示せ。

(2) (1)の結果を用いて，x^3-4x^2+8x+3 の値を求めよ。

１０ 2 次方程式 $2x^2+3x+2=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき, $\alpha+\frac{1}{\beta},\ \beta+\frac{1}{\alpha}$ を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

１１ 整式 $P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ると $3x-5$ 余り，$(x-1)(x+2)$ で割ると $-5x+3$ 余る。このとき，$P(x)$ を $(x-2)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

１２　1 の 3 乗根のうち虚数であるものの 1 つを ω で表すとき

$$\omega^{2n}+\omega^{n}$$

の値を求めよ。ただし，n は正の整数とする。

１３　$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$$

１４　$a \geqq b,\ x \geqq y$ のとき，不等式

$$(a+b)(x+y) \leqq 2(ax+by)$$

を証明せよ。

また，等号が成り立つのはどのようなときか。

１５　次の不等式を証明せよ。

$$\sqrt{a^2+b^2} \leqq |\,a\,|+|\,b\,| \leqq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

練習問題A

（教科書 p.58）

1　次の等式が成り立つことを示せ。

$_nC_0 - 2\cdot {}_nC_1 + 2^2\cdot {}_nC_2 - \cdots + (-2)^n\cdot {}_nC_n = (-1)^n$

二項定理から得られる等式

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_rx^r + \cdots + {}_nC_nx^n$

において

$x=-2$ を代入すると

$(1-2)^n$

$= {}_nC_0 + {}_nC_1(-2) + {}_nC_2(-2)^2 + \cdots + {}_nC_n(-2)^n$

よって

$_nC_0 - 2\cdot {}_nC_1 + 2^2\cdot {}_nC_2 - \cdots + (-2)^n\cdot {}_nC_n$

$=(-1)^n$

2　次の等式を満たす実数 x，y を求めよ。

(1)　$(3+2i)(x+yi)=16-11i$

$(3+2i)(x+yi)$

$=(3x-2y)+(2x+3y)i$

$=16-11i$

x，y は実数であるから

$$\begin{cases} 3x-2y=16 \\ 2x+3y=-11 \end{cases}$$

これを解いて　$x=2$，$y=-5$

(2)　$\frac{3+i}{x+yi}=1+i$

$$x+yi=\frac{3+i}{1+i}=\frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$=\frac{4-2i}{2}=2-i$$

x，yは実数であるから　$x=2$，$y=-1$

3　次の2つの2次方程式の一方が異なる2つの実数解をもち，他方が虚数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

$x^2-2x+a=0$

$x^2+4x-2a=0$

$x^2-2x+a=0$ の判別式を D_1 とすると

$$\frac{D_1}{4}=1-a$$

$x^2+4x-2a=0$ の判別式を D_2とすると

$$\frac{D_2}{4}=4+2a$$

これらの一方が正，一方が負であるから

$$\frac{D_1}{4}\cdot\frac{D_2}{4}<0$$

$(1-a)(4+2a)<0$

$(a-1)(a+2)>0$

よって，求める a の値の範囲は

$a<-2$，$1<a$

4 2 次方程式 $x^2+kx-k-1=0$ の 2 つの解を α，β とする。
$\alpha^2+\beta^2=10$ となるような定数 k の値を求めよ。
また，そのときの α，β の値を求めよ。

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-k$，$\alpha\beta=-k-1$

であるから

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=(-k)^2-2(-k-1)\\&=k^2+2k+2\end{aligned}$$

ゆえに　$k^2+2k+2=10$

$k^2+2k-8=0$

$(k+4)(k-2)=0$

したがって　$\boldsymbol{k=-4,\ 2}$

$\boldsymbol{k=-4}$ のとき

$x^2-4x+3=0$ の 2 解であるから

$\boldsymbol{\alpha=1,\ \beta=3}$ または $\boldsymbol{\alpha=3,\ \beta=1}$

$\boldsymbol{k=2}$ のとき

$x^2+2x-3=0$ の 2 解であるから

$\boldsymbol{\alpha=1,\ \beta=-3}$ または $\boldsymbol{\alpha=-3,\ \beta=1}$

〔別解〕2 次方程式 $x^2+kx-k-1=0$の左辺は次のように因数分解できる。

$k(x-1)+x^2-1=0$
$k(x-1)+(x+1)(x-1)=0$
$(x-1)(x+k+1)=0$

よって　$x=1,\ -k-1$

したがって

$1^2+(-k-1)^2=10$
$(k+1)^2=9$
$k+1=\pm3$

ゆえに　$k=2,\ -4$

$k=2$ のとき　$-k-1=-3$

であるから

$\alpha=1$，$\beta=-3$ または $\alpha=-3$，$\beta=1$

$k=-4$ のとき　$-k-1=3$

であるから

$\alpha=1$，$\beta=3$ または $\alpha=3$，$\beta=1$

5 整式 $3x^3+ax^2+bx-6$ が整式 x^2+x-2 で割り切れるように，定数 a，b の値を定めよ。

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$ で割り切れるためには，$x+2$，$x-1$ の両方を因数にもてばよい。

$P(x)=3x^3+ax^2+bx-6$ とおくと

$P(-2)=0$，$P(1)=0$

ゆえに　$\begin{cases}4a-2b-30=0\\a+b-3=0\end{cases}$

これを解いて　$\boldsymbol{a=6,\ b=-3}$

〔別解〕実際に割り算を行うと

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x+(a-3)\\ \hline
x^2+x-2 & 3x^3+ax^2+bx-6\\
 & 3x^3+3x^2-6x\\ \hline
 & (a-3)x^2+(b+6)x-6\\
 & (a-3)x^2+(a-3)x-2a+6\\ \hline
 & (-a+b+9)x+2a-12
\end{array}$$

割り切れるから

$-a+b+9=0$，$2a-12=0$

よって　$a=6$，$b=-3$

6 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$$

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ とおくと

$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$

このとき

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$
$=(a^2+b^2+c^2)(a^2k^2+b^2k^2+c^2k^2)$
$=k^2(a^2+b^2+c^2)^2$

$(ax+by+cz)^2$
$=(a\cdot ak+b\cdot bk+c\cdot ck)^2$
$=k^2(a^2+b^2+c^2)^2$

よって

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$

（参考） この等式は，教科書 p. 55 の 27 の (2) の $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$
（等号は $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ のとき成り立つ）と同じ，コーシー・シュワルツの不等式
$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geqq(ax+by+cz)^2$
（等号は $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ のとき成り立つ）
の等号が成り立つときである。

7 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$

$(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$

$=\frac{1}{2}\{2a^2+2b^2+2c^2-2(ab+bc+ca)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq 0$

ゆえに $a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$

が成り立つ。**等号が成り立つのは，**
$a-b=0$，$b-c=0$，$c-a=0$ のとき，すなわち，$\boldsymbol{a=b=c}$ **のときである。**

(2) a，b，c，d が正の数のとき $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\geqq 4$

$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$，$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$ は正の数であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\geqq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}}$$

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}}$$

これらの不等式の辺々はすべて正であるから，辺々を掛け合わせて

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\geqq 4\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}}$$

$$=4$$

が成り立つ。

等号が成り立つのは

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ すなわち $\boldsymbol{ad=bc}$ **のときである。**

⑶　a, b が正の数のとき　$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right) \geqq 9$

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+5$$

ここで，$\frac{b}{a}$，$\frac{4a}{b}$ は正の数であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{b}{a}+\frac{4a}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=4$$

よって

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right) \geqq 4+5=9$$

等号が成り立つのは　$\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$

すなわち，$\boldsymbol{2a=b}$ のときである。

〔注意〕(2) のように変形すると示せない。

$$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{4}{b}}$$

辺々を掛け合わせて

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right) \geqq 4\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}=8$$

これは等号が成り立たないためである。等号が成り立つのは

$a=b$ かつ $\frac{1}{a}=\frac{4}{b}$

となるが，これらは同時には成り立たないからである。

このとき，不等式

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)>8$$

は成り立つ。

練習問題B

（教科書 p.59）

8 2 次方程式 $x^2+4kx+5k-1=0$ の異なる 2 つの解がともに -2 より大きくなるような定数 k の値の範囲を求めよ。

2 次方程式 $x^2+4kx+5k-1=0$ が異なる2 つの実数解をもつから，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-(5k-1)=4k^2-5k+1$$

$$=(k-1)(4k-1)>0$$

よって　$k<\frac{1}{4}$，$1<k$　……①

2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-4k$，$\alpha\beta=5k-1$

α，β がともに -2 より大きくなるための条件は $\alpha+2$，$\beta+2$ がともに正となることであるから

$(\alpha+2)+(\beta+2)>0$　……②

$(\alpha+2)(\beta+2)>0$　……③

②より　$(\alpha+\beta)+4=-4k+4>0$

よって　$k<1$　……④

③より

$$\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=(5k-1)+2(-4k)+4$$

$$=-3k+3>0$$

よって　$k<1$　……⑤

①，④，⑤より　$\boldsymbol{k<\frac{1}{4}}$

9 $x=1-\sqrt{3}i$ のとき，次の問に答えよ。

(1)　$x^2-2x+4=0$ となることを示せ。

$x=1-\sqrt{3}i$ より　$x-1=-\sqrt{3}i$

両辺を 2 乗して　$(x-1)^2=-3$

ゆえに　$x^2-2x+4=0$

(2)　(1)の結果を用いて，x^3-4x^2+8x+3 の値を求めよ。

x^3-4x^2+8x+3 を x^2-2x+4 で割ると

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ x^2-2x+4 & x^3-4x^2+8x+3 \\ & x^3-2x^2+4x \\ \hline & -2x^2+4x+3 \\ & -2x^2+4x-8 \\ \hline & 11 \end{array}$$

よって

$$x^3-4x^2+8x+3=(x^2-2x+4)(x-2)+11$$

(1)の結果から，$x=1-\sqrt{3}i$ のとき，

$x^2-2x+4=0$ であるから

$$x^3-4x^2+8x+3=0\cdot(x-2)+11=\boldsymbol{11}$$

１０ 2 次方程式 $2x^2+3x+2=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha+\frac{1}{\beta}$，$\beta+\frac{1}{\alpha}$ を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{2},\quad \alpha\beta=1$$

よって

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$
$$=-\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)\div 1$$
$$=-3$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2$$
$$=1+1+2=4$$

ゆえに，$\alpha+\frac{1}{\beta}$，$\beta+\frac{1}{\alpha}$ を 2 つの解にもつ 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2+3x+4=0}$$

１１ 整式 $P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ると $3x-5$ 余り，$(x-1)(x+2)$ で割ると $-5x+3$ 余る。このとき，$P(x)$ を $(x-2)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

$P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの商を$Q_1(x)$ とおくと

$$P(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+3x-5 \qquad \cdots\cdots ①$$

$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの商を$Q_2(x)$ とおくと

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q_2(x)-5x+3 \qquad \cdots\cdots ②$$

$P(x)$ を $(x-2)(x+2)$ で割ったときの商を$Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$P(x)=(x-2)(x+2)Q(x)+ax+b \qquad \cdots\cdots ③$$

①に $x=2$ を代入すると　$P(2)=1$

②に $x=-2$ を代入すると　$P(-2)=13$

③に $x=2$，$x=-2$ を代入すると

$$P(2)=2a+b,\quad P(-2)=-2a+b$$

したがって

$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ -2a+b=13 \end{cases}$$

これを解いて　$a=-3$，$b=7$

ゆえに，求める余りは　$\boldsymbol{-3x+7}$

１２ 1の3乗根のうち虚数であるものの1つを ω で表すとき

$$\omega^{2n}+\omega^{n}$$

の値を求めよ。ただし，n は正の整数とする。

$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$ である。k は負でない整数とする。

(i)　$\boldsymbol{n=3k}$ $(k\neq 0)$ **のとき**

$\omega^{2n}=(\omega^3)^{2k}=1$

$\omega^{n}=(\omega^3)^{k}=1$

よって

$\omega^{2n}+\omega^{n}=1+1=\mathbf{2}$

(ii)　$\boldsymbol{n=3k+1}$ **のとき**

$\omega^{2n}=\omega^{6k+2}=(\omega^3)^{2k}\cdot\omega^2=\omega^2$

$\omega^{n}=\omega^{3k+1}=(\omega^3)^{k}\cdot\omega=\omega$

よって

$$\begin{aligned}\omega^{2n}+\omega^{n}&=\omega^2+\omega\\&=(\omega^2+\omega+1)-1\\&=0-1=\mathbf{-1}\end{aligned}$$

(iii)　$\boldsymbol{n=3k+2}$ **のとき**

$\omega^{2n}=\omega^{6k+4}=(\omega^3)^{2k+1}\cdot\omega=\omega$

$\omega^{n}=\omega^{3k+2}=(\omega^3)^{k}\cdot\omega^2=\omega^2$

よって

$$\begin{aligned}\omega^{2n}+\omega^{n}&=\omega+\omega^2\\&=(\omega^2+\omega+1)-1\\&=0-1=\mathbf{-1}\end{aligned}$$

１３ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$$

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$ とおくと

$b=ck$，$a=bk=ck^2$

このとき

$$\begin{aligned}&(a+b+c)(a-b+c)\\&=(a+c)^2-b^2\\&=(ck^2+c)^2-(ck)^2\\&=c^2\{(k^2+1)^2-k^2\}=c^2(k^4+k^2+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2\\&=(ck^2)^2+(ck)^2+c^2=c^2(k^4+k^2+1)\end{aligned}$$

ゆえに

$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$

1 4 $a \geqq b$，$x \geqq y$ のとき，不等式

$$(a+b)(x+y) \leqq 2(ax+by)$$

を証明せよ。

また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$2(ax+by)-(a+b)(x+y)$

$=ax-ay-bx+by$

$=a(x-y)-b(x-y)$

$=(a-b)(x-y)$

$a \geqq b$，$x \geqq y$ より　$a-b \geqq 0$，$x-y \geqq 0$

よって　$(a-b)(x-y) \geqq 0$

したがって

$(a+b)(x+y) \leqq 2(ax+by)$

が成り立つ。

等号が成り立つのは

$a-b=0$　または　$x-y=0$

すなわち，$\boldsymbol{a=b}$　または　$\boldsymbol{x=y}$のときである。

1 5 次の不等式を証明せよ。

$$\sqrt{a^2+b^2} \leqq |a|+|b| \leqq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

各辺の平方の差を考える。

$2(a^2+b^2)-(|a|+|b|)^2$

$=2a^2+2b^2-(a^2+2|a||b|+b^2)$

$=a^2-2|a||b|+b^2$

$=(|a|-|b|)^2 \geqq 0$

(等号が成り立つのは $|a|=|b|$ のときである)

$(|a|+|b|)^2-(a^2+b^2)$

$=(a^2+2|a||b|+b^2)-(a^2+b^2)$

$=2|ab| \geqq 0$

(等号が成り立つのは $ab=0$ のときである)

以上から

$a^2+b^2 \leqq (|a|+|b|)^2 \leqq 2(a^2+b^2)$

が成り立つ。

$\sqrt{a^2+b^2} \geqq 0$，$|a|+|b| \geqq 0$，$\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \geqq 0$

であるから

$\sqrt{a^2+b^2} \leqq |a|+|b| \leqq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$