4 節 式と証明

1 恒等式

（教科書 p.44）

等式 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ のように，その中の文字にどのような数を代入しても成り立つ等式を（① ）という。

整式の恒等式

（② ）が（③ ）である

（④ ）

一般に，整式 $P(x)$，$Q(x)$ について，次のことが成り立つ。

整式の恒等式
$P(x)=Q(x)$ が x についての恒等式である $\Longleftrightarrow$ $P(x)$，$Q(x)$ の同じ次数の項の係数が一致する

例題 1 等式 $a(x+1)(x-1)+bx(x+1)+cx(x-1)=3x-1$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

解

問1 等式 $a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)=3x+5$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

分数式の恒等式

（教科書 p.46）

例題 2 等式 $\frac{3x+8}{(x-2)(3x+1)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{3x+1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ。

解

問2　等式 $\frac{4x-13}{x^2+x-6}=\frac{a}{x+3}+\frac{b}{x-2}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ。

問3　次の等式を証明せよ。

(1)　$(x^2-1)^2+3x(x-1)=(x^2+1)^2-x(x+3)$

(2)　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

等式の証明

（教科書 p.46）

例 1　等式 $(2a+b)^2-(a+2b)^2=3(a^2-b^2)$ を示してみよう。

この式の左辺を変形すると

$(2a+b)^2-(a+2b)^2=$

ゆえに

例題 3　等式 $(x+1)^3-(3x^2+1)=(x-1)^3+(3x^2+1)$ を証明せよ。

証明

条件つきの等式

（教科書 p.47）

例題 4 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$$

証明

問4 $x+y=1$ のとき，等式 $x^2-x=y^2-y$ を証明せよ。

問5 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$$

比例式

（教科書 p.48）

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のように，比の値が等しいことを示す式を（⑤　　　　　　　）という。

例題 5 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，$\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$ を証明せよ。

証明

問6 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，$\frac{a+2b}{2a+b}=\frac{c+2d}{2c+d}$ を証明せよ。

$a:b:c$ を $a,\ b,\ c$ の（⑥　　　　　　）という。

例題 6 $x:y:z=4:3:2$　ならば　$(x+2y):(2x-y):5z=2:1:2$ であることを証明せよ。

証明

問7 $x:y:z=2:3:4$　ならば　$x^2:y^2:z^2=4:9:16$　であることを証明せよ。

2 不等式の証明

不等式の基本性質

（教科書 p.49）

実数 $a,\ b,\ c$ に対して，次の性質が成り立つ。

不等式の性質			
1	$a>b,\ b>c$	$\Longrightarrow$	$a>c$
2	$a>b$	$\Longrightarrow$	$a+c>b+c,\quad a-c>b-c$
3	$a>b,\ c>0$	$\Longrightarrow$	$ac>bc,\quad \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$
4	$a>b,\ c<0$	$\Longrightarrow$	$ac<bc,\quad \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

例 2 $a>b \quad \Longleftrightarrow \quad a-b>0$　が成り立つことを，性質**2**を利用して証明してみよう。

（$\Rightarrow$ の証明）$a>b$ の両辺から b を引くと　　$a-b>0$

（$\Leftarrow$ の証明）$a-b>0$ の両辺に b を加えると　　$a>b$

問8 不等式の性質を用いて，次のことを示せ。

(1)　$a>0,\ b>0 \quad \Longrightarrow \quad ab>0$

(2)　$a<0,\ b<0 \quad \Longrightarrow \quad ab>0$

(3)　$a>b,\ c>d \quad \Longrightarrow \quad a+c>b+d$

一般に，実数 $a,\ b$ に対して，次の性質が成り立つ。

（⑦　　　　　　　　　　　　　　　　　）

（⑧　　　　　　　　　　　　　　　　　）

例題 7　$a>1,\ b>1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$ab+1>a+b$$

証明

問9 $a>c,\ b>d$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$ab+cd>ad+bc$$

実数の２乗と不等式

（教科書 p.50）

$a=0$ のとき $a^2=0$ であるから，次の性質が成り立つ。

実数の２乗
実数 a に対し　$\boldsymbol{a^2 \geqq 0}$ とくに　$\boldsymbol{a^2=0 \iff a=0}$

例題 8 証明　不等式 $2(x^2+y^2) \geqq (x+y)^2$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

問 10　不等式 $5(x^2+y^2) \geqq (2x-y)^2$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

例題 9 証明　不等式 $x^2+1>x$ を証明せよ。

問 11　不等式 $2x^2+5>4x$ を証明せよ。

実数 a，b に対して，$a^2 \geqq 0$，$b^2 \geqq 0$ であるから

（⑨　　　　　　　　）

が成り立つ。ここで，等号が成り立つのは，$a^2=0$ かつ $b^2=0$，すなわち $a=b=0$ のときである。

例題 10 証明　不等式 $a^2+b^2 \geqq ab$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

問 12 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $a^2+2b^2 \geqq 2ab$

(2) $2x^2 \geqq 6xy-5y^2$

相加平均と相乗平均

（教科書 p.52）

一般に，正の実数 a, b に対し

（⑩　　　　）を（⑪　　　　　　　　），

（⑫　　　　）を（⑬　　　　　　　　）

という。

例 3 $a=6$, $b=24$ のとき

a と b の相加平均は

a と b の相乗平均は

相加平均と相乗平均の間には，次のような不等式が成り立つ。

相加平均と相乗平均
$\boldsymbol{a>0}$, $\boldsymbol{b>0}$ のとき　$\dfrac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}} \geqq \sqrt{\boldsymbol{ab}}$ 等号が成り立つのは，$a=b$ のときである。

証明

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqq 0$$

よって

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは，$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$，すなわち $a=b$ のときである。

注意　上の公式は「$a>0$, $b>0$」を「$a \geqq 0$, $b \geqq 0$」としても成り立つ。

例題 11 $a>0$ のとき，不等式 $a+\frac{1}{a} \geqq 2$ を証明せよ。
また，等号が成り立つのはどのようなときか。

考え方

証明

問 13 $a>0$, $b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $a+\frac{9}{a}\geqq 6$

(2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqq 4$

平方による比較

（教科書 p.53）

正の数の大小と２乗
$\boldsymbol{A>0,\ B>0}$ のとき $\boldsymbol{A\geqq B \iff A^2\geqq B^2}$

注意　この性質は，$A\geqq 0$, $B\geqq 0$ としても成り立つ。

例題 12 証明

$a\geqq 0$, $b\geqq 0$ のとき，不等式 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqq\sqrt{a+b}$ を証明せよ。
また，等号が成り立つのはどのようなときか。

問 14 $a>0$ のとき，不等式 $\sqrt{1+a}<1+\frac{a}{2}$ を証明せよ。

応用 例題 13 証明

不等式 $|a|+|b| \geqq |a+b|$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

問 15 不等式 $|a|+|b| \geqq |a-b|$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

問　題

（教科書 p.55）

２２　次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$a(x-1)^2+b(x-1)(x+2)+c(x+2)^2=9$

(2)　$\frac{3x+4}{x(x^2+2)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+2}$

２３　次の等式を証明せよ。

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$$

２４　$a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=-3abc$$

２５　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(c+d)^2}{cd}$$

２６ a，b，c，d が正の数のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

⑴ $(a+b)(c+d) \geqq 4\sqrt{abcd}$

⑵ $(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$

２７ 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

⑴ $a^2+b^2 \geqq 2(a+b-1)$

⑵ $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

２８　$a \geqq b \geqq 0$ のとき，不等式

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} \leqq \sqrt{a-b}$$

を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

２９　不等式 $|a|-|b| \leqq |a-b|$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

参考　組立除法

（教科書 p.56）

計算を次の形式で行う。

$$\begin{array}{c|cccc} \alpha & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ +) & & \alpha b_0 & \alpha b_1 & \alpha b_2 \\ \hline & b_0 & b_1 & b_2 & \boxed{R} \\ & \| & \| & \| & \| \\ & a_0 & a_1+\alpha b_0 & a_2+\alpha b_1 & a_3+\alpha b_2 \end{array}$$

この方法を（⑭　　　　　　　　　　　）という。

問１　次の第１式を第２式で割り，商と余りを求めよ。

（1）$x^3-5x^2+8x-3,\ x-3$

（2）$x^4-x^2+3x-6,\ x+2$

発 展　３次方程式の解と係数の関係

（教科書 p.57）

３次方程式の解と係数の関係
3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると $\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}}$

例題 1　3 次方程式 $x^3-5x^2+3x+1=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，次の式の値を求めよ。

（1）　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　　（2）　$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$

解

問 1　3 次方程式 $2x^3-4x^2+x-6=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，次の式の値を求めよ。

（1）　$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

（2）　$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}$

4 節 式と証明

1 恒等式

（教科書 p.44）

等式 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ のように，その中の文字にどのような数を代入しても成り立つ等式を（① 恒等式 ）という。

整式の恒等式

（② $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ ）が（③ x についての恒等式 ）である

（④ $\Leftrightarrow$ $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$ ）

一般に，整式 $P(x)$，$Q(x)$ について，次のことが成り立つ。

整式の恒等式
$P(x)=Q(x)$ が x についての恒等式である $\Longleftrightarrow$ $P(x)$，$Q(x)$ の同じ次数の項の係数が一致する

例題 1 等式 $a(x+1)(x-1)+bx(x+1)+cx(x-1)=3x-1$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

解 等式の左辺を整理すると

$(a+b+c)x^2+(b-c)x-a=3x-1$

この等式が恒等式となるためには

$a+b+c=0$ ……①

$b-c=3$ ……②

$-a=-1$ ……③

①，②，③を連立して a，b，c の値を求めると

$a=1$，$b=1$，$c=-2$

問1 等式 $a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)=3x+5$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

左辺を整理すると

$(a+b+c)x^2+(-3a-5b-4c)x+2a+6b+3c$

$=3x+5$

この等式が恒等式となるためには

$a+b+c=0$

$-3a-5b-4c=3$

$2a+6b+3c=5$

これを解いて **$a=7$，$b=4$，$c=-11$**

〔別解〕$x=1$，2，3 をそれぞれ代入すると

$2b=8$，$-c=11$，$2a=14$

よって $a=7$，$b=4$，$c=-11$

逆に，これらを等式に代入すると，左辺＝右辺となって，x についての恒等式となる。

したがって $a=7$，$b=4$，$c=-11$

分数式の恒等式

（教科書 p.46）

例題 2 等式 $\frac{3x+8}{(x-2)(3x+1)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{3x+1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ。

解 両辺に $(x-2)(3x+1)$ を掛けると

$3x+8=a(3x+1)+b(x-2)$

右辺を整理すると

$3x+8=(3a+b)x+(a-2b)$

この等式が恒等式となるためには $3a+b=3$，$a-2b=8$

これを解いて $a=2$，$b=-3$

問2　等式 $\frac{4x-13}{x^2+x-6}=\frac{a}{x+3}+\frac{b}{x-2}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ。

$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$ より

両辺に $(x+3)(x-2)$ を掛けると

$$4x-13=a(x-2)+b(x+3)$$

右辺を整理すると

$$4x-13=(a+b)x+(-2a+3b)$$

この等式が恒等式となるためには

$$a+b=4,\quad -2a+3b=-13$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=5,\ b=-1}$

等式の証明

（教科書 p.46）

例 1　等式 $(2a+b)^2-(a+2b)^2=3(a^2-b^2)$ を示してみよう。

この式の左辺を変形すると

$$(2a+b)^2-(a+2b)^2=(4a^2+4ab+b^2)-(a^2+4ab+4b^2)$$
$$=3a^2-3b^2=3(a^2-b^2)$$

ゆえに　　$(2a+b)^2-(a+2b)^2=3(a^2-b^2)$

例題 3　等式 $(x+1)^3-(3x^2+1)=(x-1)^3+(3x^2+1)$ を証明せよ。

証明　両辺をそれぞれ変形すると

$$(x+1)^3-(3x^2+1)=(x^3+3x^2+3x+1)-(3x^2+1)$$
$$=x^3+3x$$
$$(x-1)^3+(3x^2+1)=(x^3-3x^2+3x-1)+(3x^2+1)$$
$$=x^3+3x$$

ゆえに　　$(x+1)^3-(3x^2+1)=(x-1)^3+(3x^2+1)$

問3　次の等式を証明せよ。

(1)　$(x^2-1)^2+3x(x-1)=(x^2+1)^2-x(x+3)$

両辺をそれぞれ変形すると

$$(x^2-1)^2+3x(x-1)=x^4+x^2-3x+1$$
$$(x^2+1)^2-x(x+3)=x^4+x^2-3x+1$$

ゆえに

$$(x^2-1)^2+3x(x-1)=(x^2+1)^2-x(x+3)$$

(2)　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

両辺をそれぞれ変形すると

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$
$$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$
$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$
$$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$

ゆえに

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

(参考)　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$
$$=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

この等式を用いると

$$(2^2+3^2)(4^2+5^2)=23^2+2^2=7^2+22^2$$

条件つきの等式

（教科書 p.47）

例題 4 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$$

証明 $a+b+c=0$ という条件から　　$c=-(a+b)$

これを用いて，証明する等式の両辺を a, b で表すと

$$2a^2+bc=2a^2-b(a+b)=2a^2-ab-b^2$$

$$(b-a)(c-a)=(b-a)(-2a-b)=2a^2-ab-b^2$$

ゆえに　　$2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

問4 $x+y=1$ のとき，等式 $x^2-x=y^2-y$ を証明せよ。

$x+y=1$ より，$y=1-x$ を右辺に代入すると

$$y^2-y=(1-x)^2-(1-x)$$
$$=1-2x+x^2-1+x$$
$$=x^2-x$$

ゆえに　$x^2-x=y^2-y$

問5 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$$

$a+b+c=0$より，$c=-(a+b)$を左辺に代入すると

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$=a^2+b^2+(a+b)^2+2ab-2b(a+b)-2a(a+b)$$
$$=a^2+b^2+a^2+2ab+b^2+2ab-2ab-2b^2-2a^2-2ab$$
$$=0$$

ゆえに　$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$

〔別解〕

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$=(a+b+c)^2=0$$

比例式

（教科書 p.48）

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のように，比の値が等しいことを示す式を（⑤　比例式　）という。

例題 5 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，$\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$ を証明せよ。

証明 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおくと　　$a=bk$, $c=dk$

よって　$\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{bk-b}{bk+b}=\dfrac{b(k-1)}{b(k+1)}=\dfrac{k-1}{k+1}$

$$\frac{c-d}{c+d}=\frac{dk-d}{dk+d}=\frac{d(k-1)}{d(k+1)}=\frac{k-1}{k+1}$$

ゆえに　　$\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{c-d}{c+d}$

問6　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，$\frac{a+2b}{2a+b}=\frac{c+2d}{2c+d}$ を証明せよ。

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk,\ c=dk$

よって

$$\frac{a+2b}{2a+b}=\frac{bk+2b}{2bk+b}=\frac{b(k+2)}{b(2k+1)}$$
$$=\frac{k+2}{2k+1}$$
$$\frac{c+2d}{2c+d}=\frac{dk+2d}{2dk+d}=\frac{d(k+2)}{d(2k+1)}$$
$$=\frac{k+2}{2k+1}$$

ゆえに　$\frac{a+2b}{2a+b}=\frac{c+2d}{2c+d}$

（参考）　比例式の性質

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき

(1)　$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$

(2)　$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$，$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

(3)　$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

(4)　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$　（加比の理）

$\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\right.$ のとき

$$\left.\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}\right)$$

$a:b:c$ を $a,\ b,\ c$ の（⑥　連比　）という。

例題 6　$x:y:z=4:3:2$　ならば　$(x+2y):(2x-y):5z=2:1:2$ であることを証明せよ。

証明　$\frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}=k\ (k\neq 0)$ とおくと

$x=4k,\ y=3k,\ z=2k$

ゆえに　$(x+2y):(2x-y):5z=10k:5k:10k$

$=2:1:2$

問7　$x:y:z=2:3:4$　ならば　$x^2:y^2:z^2=4:9:16$　であることを証明せよ。

$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k\ \ (k\neq 0)$ とおくと

$x=2k,\ y=3k,\ z=4k$

2乗すると

$x^2=4k^2,\ y^2=9k^2,\ z^2=16k^2$

ゆえに

$x^2:y^2:z^2=4k^2:9k^2:16k^2=4:9:16$

2 不等式の証明

不等式の基本性質

（教科書 p.49）

実数 $a,\ b,\ c$ に対して，次の性質が成り立つ。

不等式の性質
$\boxed{1}$ $a > b,\ b > c \implies a > c$
$\boxed{2}$ $a > b \implies a + c > b + c,\quad a - c > b - c$
$\boxed{3}$ $a > b,\ c > 0 \implies ac > bc,\quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
$\boxed{4}$ $a > b,\ c < 0 \implies ac < bc,\quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

例 2 $a > b \iff a - b > 0$ が成り立つことを，性質$\boxed{2}$を利用して証明してみよう。

($\Rightarrow$ の証明) $a > b$ の両辺から b を引くと　$a - b > 0$

($\Leftarrow$ の証明) $a - b > 0$ の両辺に b を加えると　$a > b$

問8 不等式の性質を用いて，次のことを示せ。

(1) $a > 0,\ b > 0 \implies ab > 0$

$a > 0$ の両辺に $b\ (> 0)$ を掛けて

$a \cdot b > 0 \cdot b$

$ab > 0$

(2) $a < 0,\ b < 0 \implies ab > 0$

$a < 0$ の両辺に $b\ (< 0)$ を掛けて

$a \cdot b > 0 \cdot b$

$ab > 0$

(3) $a > b,\ c > d \implies a + c > b + d$

$a > b$ の両辺に c を加えて

$a + c > b + c$　……①

$c > d$ の両辺に b を加えて

$b + c > b + d$　……②

①，②より

$a + c > b + d$

一般に，実数 $a,\ b$ に対して，次の性質が成り立つ。

(⑦ $a,\ b$が同符号 $\Leftrightarrow$ $ab > 0$)

(⑧ $a,\ b$が異符号 $\Leftrightarrow$ $ab < 0$)

例題 7 $a > 1,\ b > 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$ab + 1 > a + b$$

証明

$(ab + 1) - (a + b) = a(b - 1) - (b - 1)$

$= (a - 1)(b - 1)$

$a > 1,\ b > 1$ より，$a - 1 > 0,\ b - 1 > 0$ であるから

$(ab + 1) - (a + b) = (a - 1)(b - 1) > 0$

ゆえに　$ab + 1 > a + b$

問9 $a > c,\ b > d$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$ab + cd > ad + bc$$

$(ab + cd) - (ad + bc)$

$= a(b - d) - c(b - d) = (a - c)(b - d)$

ここで，$a - c > 0,\ b - d > 0$ であるから

$(ab + cd) - (ad + bc)$

$= (a - c)(b - d) > 0$

ゆえに　$ab + cd > ad + bc$

実数の 2 乗と不等式

（教科書 p.50）

$a=0$ のとき $a^2=0$ であるから，次の性質が成り立つ。

実数の２乗	
実数 a に対し	$\boldsymbol{a^2 \geqq 0}$
とくに	$\boldsymbol{a^2=0 \iff a=0}$

例題 8　不等式 $2(x^2+y^2) \geqq (x+y)^2$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

証明　$2(x^2+y^2)-(x+y)^2=2x^2+2y^2-(x^2+2xy+y^2)$

$=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2 \geqq 0$

ゆえに　$2(x^2+y^2) \geqq (x+y)^2$

等号が成り立つのは，$x-y=0$，すなわち $x=y$ のときである。

問 10　不等式 $5(x^2+y^2) \geqq (2x-y)^2$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$5(x^2+y^2)-(2x-y)^2$

$=x^2+4xy+4y^2$

$=(x+2y)^2 \geqq 0$

ゆえに　$5(x^2+y^2) \geqq (2x-y)^2$

等号が成り立つのは　$x+2y=0$

すなわち　$\boldsymbol{x=-2y}$ のときである。

例題 9　不等式 $x^2+1>x$ を証明せよ。

証明　$x^2+1-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

ゆえに　$x^2+1>x$

問 11　不等式 $2x^2+5>4x$ を証明せよ。

$2x^2+5-4x=2(x-1)^2+3>0$

ゆえに　$2x^2+5>4x$

実数 a，b に対して，$a^2 \geqq 0$，$b^2 \geqq 0$ であるから

（⑨　$a^2+b^2 \geqq 0$　）

が成り立つ。ここで，等号が成り立つのは，$a^2=0$ かつ $b^2=0$，すなわち $a=b=0$ のときである。

例題 10　不等式 $a^2+b^2 \geqq ab$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

証明　$a^2+b^2-ab=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+b^2=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2 \geqq 0$，$\frac{3}{4}b^2 \geqq 0$ であるから

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqq 0$$

よって　$a^2+b^2 \geqq ab$

等号が成り立つのは，$a-\frac{b}{2}=0$ かつ $b=0$，すなわち $a=b=0$ のときである。

問 12　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a^2+2b^2 \geqq 2ab$

a^2+2b^2-2ab

$=a^2-2ab+2b^2$

$=(a-b)^2+b^2$

$(a-b)^2 \geqq 0$，$b^2 \geqq 0$ であるから

$(a-b)^2+b^2 \geqq 0$

よって　$a^2+2b^2 \geqq 2ab$

等号が成り立つのは，$a-b=0$ かつ $b=0$

すなわち $\boldsymbol{a=b=0}$ のときである。

(2)　$2x^2 \geqq 6xy-5y^2$

$2x^2-(6xy-5y^2)$

$=2x^2-6xy+5y^2$

$=2\left(x-\frac{3}{2}y\right)^2+\frac{y^2}{2}$

$\left(x-\frac{3}{2}y\right)^2 \geqq 0$，$\frac{y^2}{2} \geqq 0$ であるから

$2\left(x-\frac{3}{2}y\right)^2+\frac{y^2}{2} \geqq 0$

よって　$2x^2 \geqq 6xy-5y^2$

等号が成り立つのは，$x-\frac{3}{2}y=0$ かつ $y=0$

すなわち $\boldsymbol{x=y=0}$ のときである。

相加平均と相乗平均

（教科書 p.52）

一般に，正の実数 a，b に対し

（⑩　$\frac{a+b}{2}$　）を（⑪　a と b の相加平均　），

（⑫　$\sqrt{ab}$　）を（⑬　a と b の相乗平均　）

という。

例 3　$a=6$，$b=24$ のとき

a と b の相加平均は　$\frac{6+24}{2}=15$

a と b の相乗平均は　$\sqrt{6\cdot 24}=\sqrt{144}=12$

相加平均と相乗平均の間には，次のような不等式が成り立つ。

相加平均と相乗平均
$\boldsymbol{a>0}$，$\boldsymbol{b>0}$ のとき　$\frac{\boldsymbol{a+b}}{\boldsymbol{2}} \geqq \sqrt{\boldsymbol{ab}}$ 等号が成り立つのは，$a=b$ のときである。

証明　$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqq 0$$

よって

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは，$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$，すなわち $a=b$ のときである。

注意　上の公式は「$a>0$，$b>0$」を「$a \geqq 0$，$b \geqq 0$」としても成り立つ。

例題 11　$a>0$ のとき，不等式 $a+\frac{1}{a} \geqq 2$ を証明せよ。
また，等号が成り立つのはどのようなときか。

考え方　$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ と変形したものを利用する。

証明　$a>0$ であるから，a と $\frac{1}{a}$ はいずれも正である。
よって，相加平均と相乗平均の関係より

$$a+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$$

が成り立つ。
等号が成り立つのは，$a=\frac{1}{a}$，すなわち $a^2=1$ のときで，$a>0$ より，$a=1$ のときである。

問 13 $a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1) $a+\frac{9}{a}\geqq 6$

$a>0$，$\frac{9}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$a+\frac{9}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{9}{a}}=6$$

等号が成り立つのは， $a=\frac{9}{a}$，すなわち$a^2=9$ のときで，$a>0$ より $\boldsymbol{a=3}$ **のとき**である。

(2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqq 4$

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2$$

$\frac{b}{a}$，$\frac{a}{b}$はともに正であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$$

ゆえに　$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqq 2+2=4$

等号が成り立つのは　$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$

すなわち $a^2=b^2$ のときで，$a>0$，$b>0$ より，$\boldsymbol{a=b}$ **のとき**である。

平方による比較

（教科書 p.53）

正の数の大小と２乗
$\boldsymbol{A>0}$，$\boldsymbol{B>0}$ のとき $\boldsymbol{A\geqq B \iff A^2\geqq B^2}$

注意　この性質は，$A\geqq 0$，$B\geqq 0$ としても成り立つ。

例題 12　$a\geqq 0$，$b\geqq 0$ のとき，不等式 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqq\sqrt{a+b}$ を証明せよ。
また，等号が成り立つのはどのようなときか。

証明　両辺の平方の差を考えると

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{a+b}\right)^2=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)$$
$$=2\sqrt{ab}\geqq 0$$

したがって　$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\geqq\left(\sqrt{a+b}\right)^2$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqq 0$，$\sqrt{a+b}\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqq\sqrt{a+b}$$

等号が成り立つのは，$ab=0$ のときである。

問 14　$a>0$ のとき，不等式 $\sqrt{1+a}<1+\frac{a}{2}$ を証明せよ。

両辺の平方の差を考えると

$$\left(1+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\sqrt{1+a}\right)^2$$
$$=1+a+\frac{a^2}{4}-(1+a)=\frac{a^2}{4}>0$$

したがって

$$\left(\sqrt{1+a}\right)^2<\left(1+\frac{a}{2}\right)^2$$

$\sqrt{1+a}>0$，$1+\frac{a}{2}>0$ であるから

$$\sqrt{1+a}<1+\frac{a}{2}$$

応用例題 13　不等式 $|a|+|b| \geqq |a+b|$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

証明　両辺の平方の差を考えると

$$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$$
$$=a^2+2|a||b|+b^2-(a^2+2ab+b^2)$$
$$=2(|ab|-ab) \geqq 0$$

◀ $|A| \geqq A$

したがって　$(|a|+|b|)^2 \geqq |a+b|^2$

$|a|+|b| \geqq 0$，$|a+b| \geqq 0$ であるから

$$|a|+|b| \geqq |a+b|$$

等号が成り立つのは，$|ab|=ab$，すなわち $ab \geqq 0$ のときである。

問 15　不等式 $|a|+|b| \geqq |a-b|$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

両辺の平方の差を考えると

$$(|a|+|b|)^2-|a-b|^2$$
$$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a-b)^2$$
$$=a^2+2|a||b|+b^2-(a^2-2ab+b^2)$$
$$=2(|ab|+ab) \geqq 0$$

したがって　$(|a|+|b|)^2 \geqq |a-b|^2$

$|a|+|b| \geqq 0$，$|a-b| \geqq 0$ であるから

$$|a|+|b| \geqq |a-b|$$

等号が成り立つのは，$|ab|=-ab$，すなわち $\boldsymbol{ab \leqq 0}$ のときである。

〔別解〕教科書 p. 54 応用例題 13 の不等式において，b を $(-b)$ に置き換えると

$$|a|+|-b| \geqq |a+(-b)|$$

よって　$|a|+|b| \geqq |a-b|$

問 題 （教科書 p.55）

２２ 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a, b, c の値を定めよ。

(1) $a(x-1)^2+b(x-1)(x+2)+c(x+2)^2=9$

左辺を整理すると

$(a+b+c)x^2+(-2a+b+4c)x+(a-2b+4c)=9$

この等式が恒等式となるためには

$a+b+c=0$

$-2a+b+4c=0$

$a-2b+4c=9$

これを解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=-2,\ c=1}$

〔別解〕$a(x-1)^2+b(x-1)(x+2)+c(x+2)^2=9$

の両辺に，$x=1$, $x=0$, $x=-2$ をそれぞれ代入すると

$9c=9$, $a-2b+4c=9$, $9a=9$

よって　$a=1$, $b=-2$, $c=1$

逆に，これらを等式に代入すると，左辺＝右辺となって，x についての恒等式となる。

よって　$a=1$, $b=-2$, $c=1$

(2) $\frac{3x+4}{x(x^2+2)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+2}$

両辺に $x(x^2+2)$ を掛けると

$3x+4=a(x^2+2)+(bx+c)x$

この等式が恒等式であればよい。

右辺を整理すると

$3x+4=(a+b)x^2+cx+2a$

よって　$a+b=0$, $c=3$, $2a=4$

ゆえに　$\boldsymbol{a=2,\ b=-2,\ c=3}$

２３ 次の等式を証明せよ。

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$$

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)-\{ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)\}$

$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2-a^2b+ab^2-b^2c+bc^2-ac^2+a^2c$

$=0$

よって

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$\quad=ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

２４ $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=-3abc$$

$a+b+c=0$ より，$c=-(a+b)$ を代入すると

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$

$=a^2(-a)+b^2(-b)+(a+b)^3$

$=(a+b)^3-(a^3+b^3)=3a^2b+3ab^2-3abc$

$=-3ab\{-(a+b)\}=3a^2b+3ab^2$

よって

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)=-3abc$

２５ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(c+d)^2}{cd}$$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk$, $c=dk$

$$\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(bk+b)^2}{bk\cdot b}=\frac{b^2(k+1)^2}{b^2\cdot k}=\frac{(k+1)^2}{k}$$

$$\frac{(c+d)^2}{cd}=\frac{(dk+d)^2}{dk\cdot d}=\frac{d^2(k+1)^2}{d^2\cdot k}=\frac{(k+1)^2}{k}$$

よって　$\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(c+d)^2}{cd}$

２６　a, b, c, d が正の数のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$(a+b)(c+d) \geqq 4\sqrt{abcd}$

a，b，c，d は正の数であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$，$c+d \geqq 2\sqrt{cd}$

これらの不等式の辺々はすべて正であるから，辺々を掛け合わせて

$(a+b)(c+d) \geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{cd} = 4\sqrt{abcd}$

等号が成り立つのは，$\boldsymbol{a=b}$，$\boldsymbol{c=d}$ のときである。

(2)　$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$

a，b，c は正の数であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$，$b+c \geqq 2\sqrt{bc}$，

$c+a \geqq 2\sqrt{ca}$

これらの不等式の辺々はすべて正であるから，辺々を掛け合わせて

$(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}$

$= 8abc$

等号が成り立つのは　$a=b$，$b=c$，$c=a$

すなわち，**$\boldsymbol{a=b=c}$ のときである。**

２７　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$a^2+b^2 \geqq 2(a+b-1)$

$(a^2+b^2)-2(a+b-1)$

$=(a-1)^2+(b-1)^2 \geqq 0$

よって　$a^2+b^2 \geqq 2(a+b-1)$

等号が成り立つのは，$\boldsymbol{a=b=1}$ のときである。

(2)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2$

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2$

$=(ay-bx)^2 \geqq 0$

よって

$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

等号が成り立つのは　$ay-bx=0$

すなわち，**$\boldsymbol{ay=bx}$ のときである。**

(参考)コーシー・シュワルツの不等式である。

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

も成り立つ。

２８　$a \geqq b \geqq 0$ のとき，不等式

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} \leqq \sqrt{a-b}$$

を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

両辺の平方の差をとって

$$\left(\sqrt{a-b}\right)^2-\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$
$$=a-b-\left(a-2\sqrt{ab}+b\right)$$
$$=2\sqrt{ab}-2b$$
$$=2\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$$

$a \geqq b \geqq 0$ より　$\sqrt{a} \geqq \sqrt{b}$

すなわち　　$2\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) \geqq 0$

よって　　$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \leqq \left(\sqrt{a-b}\right)^2$

$\sqrt{a}-\sqrt{b} \geqq 0$，$\sqrt{a-b} \geqq 0$ であるから

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} \leqq \sqrt{a-b}$$

等号が成り立つのは

$\sqrt{b}=0$　または　$\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$

すなわち，$\boldsymbol{b=0}$ **または** $\boldsymbol{a=b}$ のときである。

２９　不等式 $|a|-|b| \leqq |a-b|$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(i) $|a|-|b|<0$　のとき

$|a-b| \geqq 0$ より

$$|a|-|b|<|a-b|$$

(ii)　$|a|-|b| \geqq 0$ のとき

両辺はいずれも負でないから

$$(|a|-|b|)^2 \leqq |a-b|^2$$

を示せばよい。

$$|a-b|^2-(|a|-|b|)^2$$
$$=a^2-2ab+b^2-(a^2-2|a||b|+b^2)$$
$$=2(|ab|-ab) \geqq 0$$

(i)，(ii) より　　$|a|-|b| \leqq |a-b|$

等号が成り立つのは

$|a| \geqq |b|$　かつ　$|ab|=ab$

のときである。

すなわち，$\boldsymbol{a \geqq b \geqq 0}$ **または** $\boldsymbol{a \leqq b \leqq 0}$ のときである。

〔別解〕

教科書 p. 54 の応用例題 13 の不等式において，a を $a-b$ に置き換えると

$$|a-b|+|b| \geqq |(a-b)+b|$$
$$|a-b|+|b| \geqq |a|$$

ゆえに　　$|a-b| \geqq |a|-|b|$

等号が成り立つのは　$(a-b)b \geqq 0$

すなわち，$a \geqq b \geqq 0$ または $a \leqq b \leqq 0$ のときである。

(参考)　三角不等式

$$|a|-|b| \leqq |a+b| \leqq |a|+|b|$$
$$|a|-|b| \leqq |a-b| \leqq |a|+|b|$$

参考　組立除法

（教科書 p.56）

計算を次の形式で行う。

$$
\begin{array}{c|cccc}
\alpha & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
+) & & \alpha b_0 & \alpha b_1 & \alpha b_2 \\
\hline
 & b_0 & b_1 & b_2 & \boxed{R} \\
 & \| & \| & \| & \| \\
 & a_0 & a_1+\alpha b_0 & a_2+\alpha b_1 & a_3+\alpha b_2
\end{array}
$$

この方法を（⑭　組立除法　）という。

問１　次の第１式を第２式で割り，商と余りを求めよ。

(1) $x^3-5x^2+8x-3,\ x-3$

$$
\begin{array}{c|cccc}
3 & 1 & -5 & 8 & -3 \\
+) & & 3 & -6 & 6 \\
\hline
 & 1 & -2 & 2 & \boxed{3}
\end{array}
$$

商　$\boldsymbol{x^2-2x+2}$，余り　**3**

(2) $x^4-x^2+3x-6,\ x+2$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
-2 & 1 & 0 & -1 & 3 & -6 \\
+) & & -2 & 4 & -6 & 6 \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & -3 & \boxed{0}
\end{array}
$$

商　$\boldsymbol{x^3-2x^2+3x-3}$，余り　**0**

発 展　３次方程式の解と係数の関係

（教科書 p.57）

３次方程式の解と係数の関係

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると

$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}}$$

例題 1　3 次方程式 $x^3-5x^2+3x+1=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2)　$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$

解　3 次方程式の解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=5,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=-1$

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=5^2-2\cdot 3=19$

(2)　$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{-1}=-3$

問 1　3 次方程式 $2x^3-4x^2+x-6=0$ の 3 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，次の式の値を求めよ。

3 次方程式の解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=2$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{2}$

$\alpha\beta\gamma=3$

(1)　$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$

$=3-\frac{1}{2}+2-1=\boldsymbol{\frac{7}{2}}$

〔別解〕　3 次方程式 $2x^3-4x^2+x-6=0$の左辺は次のように因数分解できる。

$2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

よって

$2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$=2x^3-4x^2+x-6$

$x=1$ を代入して

$2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=2\cdot 1^3-4\cdot 1^2+1-6$

$=-7$

したがって

$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=\frac{7}{2}$

(2)　$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}$

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$