3節 高次方程式

1 因数定理

剰余の定理

（教科書 p.36）

例1 $P(x)=x^3-2x^2+3$ とすると

$P(2)=$

$P(-1)=$

問1 $P(x)=x^3-3x+1$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $P(-2)$

(2) $P(\sqrt{3})$

(3) $P\left(\frac{1}{3}\right)$

次の（①　　　　　　）が成り立つ。

剰余の定理
整式 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの**余りは** $\boldsymbol{P(\alpha)}$ である。

例2 整式 $P(x)=x^3-2x^2+3$を

$x-1$ で割った余りは　（　　　　　　　　　　　）

$x+2$ で割った余りは　（　　　　　　　　　　　　　　）

問2 次の第 1 式を第 2 式で割ったときの余りを求めよ。

(1) $2x^3-x^2+3,\ x-2$

(2) $x^3+2x^2-6x+1,\ x+4$

問3 次の問に答えよ。

(1) 整式 $P(x)$ を 1 次式 $\boldsymbol{ax+b}$ で割ったときの余りは $\boldsymbol{P\left(-\frac{b}{a}\right)}$ であることを示せ。

(2) $4x^3-2x^2-7$ を $2x-3$ で割ったときの余りを求めよ。

例3 整式 $P(x)=2x^3+ax^2-8$ を $x-3$ で割ったときの余りが 1 であるような定数 a の値を求めてみよう。

剰余の定理により，$P(3)=1$ であるから

よって

問4 整式 $P(x)=x^3-3ax+4$ を $x+3$ で割ったときの余りが -5 であるような定数 a の値を求めよ。

応用例題1 整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると 4 余り，$x+3$ で割ると -11 余る。
このとき， $P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの余りを求めよ。

解

問5 整式 $P(x)$ を $x-4$ で割ると 1 余り，$x+3$ で割ると 8 余る。このとき，$P(x)$ をx^2-x-12 で割ったときの余りを求めよ。

因数定理

（教科書 p.38）

整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れるのは，余り $P(\alpha)$ が 0 となるときであるから，次の（② ）が成り立つ。

因数定理
整式 $P(x)$ が $\boldsymbol{x-\alpha}$ **を因数**にもつ $\iff$ $\boldsymbol{P(\alpha)=0}$

例4 整式 $P(x)=x^3-x^2-7x+3$ とするとき，$P(x)$ が $x-3$ を因数にもつかどうか，また，$x+3$ を因数にもつかどうかを調べてみよう。

$P(3)=$

$P(-3)=$

よって，$P(x)$ は（ ）を因数にもつが，（ ）を因数にもたない。

問6 次の整式が $x-3$ を因数にもつかどうか，また，$x+3$ を因数にもつかどうかを調べよ。

(1) x^3-2x^2-5x+6

(2) $2x^3+x^2-18x-9$

例題 2 因数定理を用いて，$x^3 - 7x - 6$ を因数分解せよ。

解

問7 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

(2) $x^3 + 3x^2 - 4$

(3) $3x^3 + 4x^2 - 17x - 6$

2 簡単な高次方程式

（教科書 p.39）

$P(x)$ を n 次の整式とするとき，$P(x)=0$ の形に表される方程式を（③　　　　　　　）という。また，3 次以上の方程式を（④　　　　　　　）という。

方程式 $x^3=1$ の 3 つの解を，（⑤　　　　　　　）または（⑥　　　　　　　）という。

因数分解による解法

例題 3　方程式 $x^3=1$ を解け。

解

問8　次の方程式を解け。

(1)　$x^3=8$

(2)　$x^3=-1$

(3)　$x^4=-8x$

問9　1 の 3 乗根のうち虚数であるものの 1 つを ω で表すとき，次のことを示せ。

(1)　1 の 3 乗根は，1，ω，ω^2 の 3 つである。

(2)　$\omega^2+\omega+1=0$

例題 4 方程式$x^4-2x^2-3=0$を解け。

解

問 10 次の方程式を解け。

(1) $x^4-3x^2+2=0$

(2) $x^4+3x^2-28=0$

問 11 次の方程式を解け。

(1) $x^3-8x+8=0$

(2) $6x^3+4x^2-x+1=0$

因数定理を利用した解法

（教科書 p.40）

例題 5 方程式 $x^3-x^2-2x-12=0$ を解け。

解

例題 6 方程式 $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ を解け。

解

問 12 次の方程式を解け。

(1) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$

(2) $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$

方程式 $(x-1)(x+2)^2=0$ の解は $x=1,\ -2$ である。このうち，解 $x=-2$ を（⑦　　　　　　　　）という。

同様に，方程式 $(x-1)^3=0$ の解 $x=1$ を（⑧　　　　　　　　）という。

問 13 次の方程式を解け。

（1） $x^3-x^2-8x+12=0$

(2) $x^3+3x^2+3x+1=0$

一般に，複素数の範囲で考えると（⑨　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）ことが知られている。

応用 例題 7　$x=1+i$ が方程式 $x^3+ax+b=0$ の解であるとき，実数 a，b の値と他の解を求めよ。

解

問 14　$x=2-i$ が方程式 $x^3+ax^2+bx-5=0$ の解であるとき，実数 a，b の値と他の解を求めよ。

問 題

（教科書 p.43）

１５　次の第 1 式が第 2 式で割り切れるように，定数 a の値を定めよ。

⑴　$x^3-ax^2-5x-6,\quad x+2$

⑵　$x^3+ax+a+1,\quad x-4$

⑶　$ax^3-2x^2-12x+8,\quad 3x-2$

１６　整式 $P(x)=ax^3+bx^2-8x-7$ が $x+1$ で割り切れ，$x-2$ で割ったときの余りが -3 となるように，定数 a，b の値を定めよ。

１７　整式 $P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの余りは $5x+7$ である。
このとき，$P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りを求めよ。

１８　1 の 3 乗根のうち虚数であるものの 1 つを ω で表すとき，次の値を求めよ。

⑴　$\omega^4+\omega^2+1$

⑵　$\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}$

１９　次の方程式を解け。

(1)　$x^4-2x^2-8=0$

(2)　$(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$

(3)　$x^3-2x^2-2x+4=0$

(4)　$2x^3-3x^2-11x+6=0$

(5)　$12x^4-16x^3+x^2+4x-1=0$

２０ 方程式 $x^3+ax+b=0$ が $x=1+\sqrt{2}i$ を解にもつとき，実数 a，b の値と他の解を求めよ。

２１ 方程式 $x^3+ax^2+bx-6=0$ が次の値を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

(1) 1 と -2

⑵　2 重解 -1

3節 高次方程式

1 因数定理

剰余の定理

（教科書 p.36）

例1 $P(x)=x^3-2x^2+3$ とすると

$P(2)=2^3-2\cdot 2^2+3=3$

$P(-1)=(-1)^3-2\cdot(-1)^2+3=0$

問1 $P(x)=x^3-3x+1$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $P(-2)$

$P(-2)=(-2)^3-3\cdot(-2)+1=\mathbf{-1}$

(2) $P(\sqrt{3})$

$P(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^3-3\cdot\sqrt{3}+1=\mathbf{1}$

(3) $P\left(\frac{1}{3}\right)$

$P\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+1=\mathbf{\frac{1}{27}}$

次の（① 剰余の定理 ）が成り立つ。

剰余の定理
整式 $P(x)$ を $x-\alpha$ で割ったときの**余りは $P(\alpha)$** である。

例2 整式 $P(x)=x^3-2x^2+3$を

$x-1$ で割った余りは （ $P(1)=1^3-2\cdot 1^2+3=2$ ）

$x+2$ で割った余りは （ $P(-2)=(-2)^3-2\cdot(-2)^2+3=-13$ ）

問2 次の第１式を第２式で割ったときの余りを求めよ。

(1) $2x^3-x^2+3,\ x-2$

第１式を $P(x)$ とする。

$x-2$ で割った余りは

$P(2)=2\cdot 2^3-2^2+3=\mathbf{15}$

(2) $x^3+2x^2-6x+1,\ x+4$

第１式を $P(x)$ とする。

$x+4$ で割った余りは

$P(-4)=(-4)^3+2\cdot(-4)^2-6\cdot(-4)+1=\mathbf{-7}$

問3 次の問に答えよ。

(1) 整式 $P(x)$ を１次式 $\boldsymbol{ax+b}$ で割ったときの余りは $\boldsymbol{P\left(-\frac{b}{a}\right)}$ であることを示せ。

整式 $P(x)$ を $ax+b$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とすると

$P(x)=(ax+b)Q(x)+R$

$x=-\frac{b}{a}$ を代入すると

$P\left(-\frac{b}{a}\right)=0\cdot Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R=R$

よって　$R=P\left(-\frac{b}{a}\right)$

(2) $4x^3-2x^2-7$ を $2x-3$ で割ったときの余りを求めよ。

$P(x)=4x^3-2x^2-7$ とおくと，

$2x-3$ で割った余りは

$P\left(\frac{3}{2}\right)=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-7=\mathbf{2}$

例 3 整式 $P(x)=2x^3+ax^2-8$ を $x-3$ で割ったときの余りが 1 であるような定数 a の値を求めてみよう。

剰余の定理により，$P(3)=1$ であるから

$2\cdot 3^3+a\cdot 3^2-8=1$

よって　$a=-5$

問4 整式 $P(x)=x^3-3ax+4$ を $x+3$ で割ったときの余りが -5 であるような定数 a の値を求めよ。

剰余の定理により，$P(-3)=-5$ であるから

$(-3)^3-3a\cdot(-3)+4=-5$

よって　$\boldsymbol{a=2}$

応用例題 1 整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると 4 余り，$x+3$ で割ると -11 余る。
このとき，$P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの余りを求めよ。

解 $P(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする。
2 次式で割ったときの余りは 1 次以下の整式であるから，それを $ax+b$ とおくと

$P(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$　　……①

このとき，剰余の定理により

$P(2)=4,\quad P(-3)=-11$　　……②

①，②より　$2a+b=4,\quad -3a+b=-11$

これを解くと　$a=3,\ b=-2$

よって，求める余りは　$3x-2$

問5 整式 $P(x)$ を $x-4$ で割ると 1 余り，$x+3$ で割ると 8 余る。このとき，$P(x)$ をx^2-x-12 で割ったときの余りを求めよ。

$P(x)$ を $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$P(x)=(x-4)(x+3)Q(x)+ax+b$

剰余の定理により

$P(4)=4a+b=1$

$P(-3)=-3a+b=8$

これを解いて　$a=-1,\ b=5$

よって，求める余りは　$\boldsymbol{-x+5}$

因数定理

（教科書 p.38）

整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れるのは，余り $P(\alpha)$ が 0 となるときであるから，次の（② 因数定理 ）が成り立つ。

因数定理
整式 $P(x)$ が $\boldsymbol{x-\alpha}$ **を因数**にもつ　$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{P(\alpha)=0}$

例 4 整式 $P(x)=x^3-x^2-7x+3$ とするとき，$P(x)$ が $x-3$ を因数にもつかどうか，また，$x+3$ を因数にもつかどうかを調べてみよう。

$P(3)=3^3-3^2-7\cdot 3+3=0$

$P(-3)=(-3)^3-(-3)^2-7\cdot(-3)+3=-12$

よって，$P(x)$ は（ $x-3$ ）を因数にもつが，（ $x+3$ ）を因数にもたない。

問6 次の整式が $x-3$ を因数にもつかどうか，また，$x+3$ を因数にもつかどうかを調べよ。

(1)　x^3-2x^2-5x+6

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ とする。

$P(3)=3^3-2\cdot 3^2-5\cdot 3+6=0$

$P(-3)=(-3)^3-2\cdot(-3)^2-5\cdot(-3)+6$

$=-24\neq 0$

よって，$\boldsymbol{x-3}$ を因数にもつが，$\boldsymbol{x+3}$ を因数にもたない。

(2)　$2x^3+x^2-18x-9$

$P(x)=2x^3+x^2-18x-9$ とする。

$P(3)=2\cdot 3^3+3^2-18\cdot 3-9=0$

$P(-3)=2\cdot(-3)^3+(-3)^2-18\cdot(-3)-9$

$=0$

よって，$\boldsymbol{x-3}$ も $\boldsymbol{x+3}$ も因数にもつ。

例題 2 因数定理を用いて，x^3-7x-6 を因数分解せよ。

解 $P(x)=x^3-7x-6$ とおく。

$P(-1)=(-1)^3-7\cdot(-1)-6$

$=0$

であるから，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

そこで，右のように割り算を行うと

$P(x)=(x+1)(x^2-x-6)$

$=(x+1)(x+2)(x-3)$

$$\begin{array}{rl} & x^2-x-6 \\ x+1 \,\big)\! & x^3 \qquad -7x-6 \\ & x^3+x^2 \\ \hline & -x^2-7x \\ & -x^2-x \\ \hline & -6x-6 \\ & -6x-6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

問7 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3-6x^2+11x-6$

$P(x)=x^3-6x^2+11x-6$ とおくと，

$P(1)=0$ より，$x-1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{rl} & x^2-5x+6 \\ x-1 \,\big)\! & x^3-6x^2+11x-6 \\ & x^3-x^2 \\ \hline & -5x^2+11x \\ & -5x^2+5x \\ \hline & 6x-6 \\ & 6x-6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

〔別解〕教科書 p.56 の組立除法を用いると

1	1	−6	11	−6
+)		1	−5	6
	1	−5	6	0

上の計算より

$x^3-6x^2+11x-6$

$=(x-1)(x^2-5x+6)$

$=\boldsymbol{(x-1)(x-2)(x-3)}$

(2) x^3+3x^2-4

$P(x)=x^3+3x^2-4$ とおくと，

$P(1)=0$ より，$x-1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{rl} & x^2+4x+4 \\ x-1 \,\big)\! & x^3+3x^2 \qquad -4 \\ & x^3-x^2 \\ \hline & 4x^2 \\ & 4x^2-4x \\ \hline & 4x-4 \\ & 4x-4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

〔別解〕組立除法を用いると

1	1	3	0	−4
+)		1	4	4
	1	4	4	0

上の計算より

x^3+3x^2-4

$=(x-1)(x^2+4x+4)$

$=\boldsymbol{(x-1)(x+2)^2}$

(3) $3x^3+4x^2-17x-6$

$P(x)=3x^3+4x^2-17x-6$ とおくと，

$P(2)=0$ より，$x-2$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{rl} & 3x^2+10x+3 \\ x-2 \,\big)\! & 3x^3+4x^2-17x-6 \\ & 3x^3-6x^2 \\ \hline & 10x^2-17x \\ & 10x^2-20x \\ \hline & 3x-6 \\ & 3x-6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

〔別解〕組立除法を用いると

2	3	4	−17	−6
+)		6	20	6
	3	10	3	0

上の計算より

$3x^3+4x^2-17x-6$

$=(x-2)(3x^2+10x+3)$

$=\boldsymbol{(x-2)(x+3)(3x+1)}$

2 簡単な高次方程式

（教科書 p.39）

$P(x)$ を n 次の整式とするとき，$P(x)=0$ の形に表される方程式を（③ n 次方程式 ）という。また，3 次以上の方程式を（④ 高次方程式 ）という。

方程式 $x^3=1$ の 3 つの解を，（⑤ **1 の 3 乗根** ）または（⑥ 立方根 ）という。

因数分解による解法

例題 3 方程式 $x^3=1$ を解け。

解 1 を左辺に移項すると $x^3-1=0$

左辺を因数分解すると $(x-1)(x^2+x+1)=0$

よって

$x-1=0$ または $x^2+x+1=0$

ゆえに

$$x=1,\quad \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

問8 次の方程式を解け。

(1) $x^3=8$

$x^3-8=0$ より

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

これを解くと

$\boldsymbol{x=2,\ -1\pm\sqrt{3}i}$

(2) $x^3=-1$

$x^3+1=0$ より

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

これを解くと

$$\boldsymbol{x=-1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$$

(3) $x^4=-8x$

$x^4+8x=0$ より

$x(x+2)(x^2-2x+4)=0$

これを解くと

$\boldsymbol{x=0,\ -2,\ 1\pm\sqrt{3}i}$

問9 1 の 3 乗根のうち虚数であるものの 1 つを ω で表すとき，次のことを示せ。

(1) 1 の 3 乗根は，1，ω，ω^2 の 3 つである。

1 の 3 乗根は 1，$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ である。

(i) $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると

$$\omega^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

となり，ω^2 はもう 1 つの 1 の虚数の 3 乗根となる。

(ii) $\omega=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ とすると

$\omega^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ となり，ω^2 はもう 1 つの1 の虚数の 3 乗根となる。

(i)，(ii) より，ω を $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ としても，$\omega=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ としても，1 の 3 乗根は 1，ω，ω^2 の 3 つである。

(2) $\omega^2+\omega+1=0$

ω は $x^2+x+1=0$ の解であるから

$\omega^2+\omega+1=0$

〔別解〕(1) より，ω が $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ にしろ

$\omega=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ にしろ

$\omega^2+\omega+1$

$$=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1=0$$

例題 4　方程式$x^4-2x^2-3=0$を解け。

解　$(x^2)^2-2x^2-3=0$ とみて，左辺を因数分解すると

$(x^2-3)(x^2+1)=0$

よって　$x^2=3$　または　$x^2=-1$

ゆえに　$x=\pm\sqrt{3},\ \pm i$

問 10　次の方程式を解け。

(1)　$x^4-3x^2+2=0$

$(x^2)^2-3x^2+2=0$

$(x^2-1)(x^2-2)=0$

よって　$x^2=1,\ 2$

ゆえに　$\boldsymbol{x=\pm1,\ \pm\sqrt{2}}$

(2)　$x^4+3x^2-28=0$

$(x^2)^2+3x^2-28=0$

$(x^2-4)(x^2+7)=0$

よって　$x^2=4,\ -7$

ゆえに　$\boldsymbol{x=\pm2,\ \pm\sqrt{7}i}$

因数定理を利用した解法

（教科書 p.40）

例題 5　方程式 $x^3-x^2-2x-12=0$ を解け。

解　$P(x)=x^3-x^2-2x-12$ とおく。

$P(3)=3^3-3^2-2\cdot3-12=0$

であるから，$P(x)$ は $x-3$ を因数にもつ。

$P(x)=(x-3)(x^2+2x+4)$

よって

$(x-3)(x^2+2x+4)=0$

$x-3=0$　または　$x^2+2x+4=0$

ゆえに

$x=3,\quad -1\pm\sqrt{3}i$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+4 \\ \hline
x-3 & x^3-x^2-2x-12 \\
 & x^3-3x^2 \\ \hline
 & 2x^2-2x \\
 & 2x^2-6x \\ \hline
 & 4x-12 \\
 & 4x-12 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

問 11　次の方程式を解け。

(1)　$x^3-8x+8=0$

$P(x)=x^3-8x+8$ とおくと，

$P(2)=0$ より，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x-4 \\ \hline
x-2 & x^3\qquad-8x+8 \\
 & x^3-2x^2 \\ \hline
 & 2x^2-8x \\
 & 2x^2-4x \\ \hline
 & -4x+8 \\
 & -4x+8 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

〔別解〕

$$
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 1 & 0 & -8 & 8 \\
+) & & 2 & 4 & -8 \\ \hline
 & 1 & 2 & -4 & \boxed{0}
\end{array}
$$

上の計算より

$P(x)=(x-2)(x^2+2x-4)$

よって

$(x-2)(x^2+2x-4)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=2,\ -1\pm\sqrt{5}}$

(2)　$6x^3+4x^2-x+1=0$

$P(x)=6x^3+4x^2-x+1$ とおくと，

$P(-1)=0$ より，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 6x^2-2x+1 \\ \hline
x+1 & 6x^3+4x^2-x+1 \\
 & 6x^3+6x^2 \\ \hline
 & -2x^2-x \\
 & -2x^2-2x \\ \hline
 & x+1 \\
 & x+1 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

〔別解〕

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 6 & 4 & -1 & 1 \\
+) & & -6 & 2 & -1 \\ \hline
 & 6 & -2 & 1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

上の計算より

$P(x)=(x+1)(6x^2-2x+1)$

よって

$(x+1)(6x^2-2x+1)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=-1,\ \frac{1\pm\sqrt{5}i}{6}}$

例題 6 方程式 $x^4-x^3-3x^2+x+2=0$ を解け。

解

$P(x)=x^4-x^3-3x^2+x+2$ とおく。

$P(1)=1^4-1^3-3\cdot1^2+1+2=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{rl}
 & x^3 -3x -2 \\
x-1\,\big) & x^4-x^3-3x^2+x+2 \\
 & x^4-x^3 \\ \hline
 & -3x^2+x \\
 & -3x^2+3x \\ \hline
 & -2x+2 \\
 & -2x+2 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$P(x)=(x-1)(x^3-3x-2)$

ここで，$Q(x)=x^3-3x-2$ とおくと

$Q(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)-2=0$

よって，$Q(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2-x-2 \\
x+1\,\big) & x^3 -3x-2 \\
 & x^3+x^2 \\ \hline
 & -x^2-3x \\
 & -x^2-x \\ \hline
 & -2x-2 \\
 & -2x-2 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$Q(x)=(x+1)(x^2-x-2)$

このとき

$P(x)=(x-1)(x+1)(x^2-x-2)$

$=(x-1)(x+1)(x+1)(x-2)$

$=(x-1)(x-2)(x+1)^2$

よって　$(x-1)(x-2)(x+1)^2=0$

$x-1=0$　または　$x-2=0$　または　$(x+1)^2=0$

ゆえに　$x=1,\ 2,\ -1$

問 12 次の方程式を解け。

(1)　$x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0$

$P(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$ とおく。

$P(2)=2^4-2\cdot2^3-7\cdot2^2+8\cdot2+12=0$

であるから，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{rl}
 & x^3 -7x-6 \\
x-2\,\big) & x^4-2x^3-7x^2+8x+12 \\
 & x^4-2x^3 \\ \hline
 & -7x^2+8x \\
 & -7x^2+14x \\ \hline
 & -6x+12 \\
 & -6x+12 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

〔別解〕

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & -2 & -7 & 8 & 12 \\
+) & & 2 & 0 & -14 & -12 \\ \hline
 & 1 & 0 & -7 & -6 & \boxed{0}
\end{array}
$$

上の計算より

$P(x)=(x-2)(x^3-7x-6)$

ここで，$Q(x)=x^3-7x-6$ とおくと

$Q(-1)=(-1)^3-7\cdot(-1)-6=0$

であるから，$Q(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2-x-6 \\
x+1\,\big) & x^3 -7x-6 \\
 & x^3+x^2 \\ \hline
 & -x^2-7x \\
 & -x^2-x \\ \hline
 & -6x-6 \\
 & -6x-6 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

〔別解〕

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\
+) & & -1 & 1 & 6 \\ \hline
 & 1 & -1 & -6 & \boxed{0}
\end{array}
$$

上の計算より

$Q(x)=(x+1)(x^2-x-6)$

このとき

$P(x)=(x-2)(x+1)(x^2-x-6)$

$=(x-2)(x+1)(x-3)(x+2)$

よって　$(x-2)(x+1)(x-3)(x+2)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=-2,\ -1,\ 2,\ 3}$

(2)　$2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$

$P(x)=2x^4+x^3-6x^2+x+2$

とおく。

$P(1)=2\cdot1^4+1^3-6\cdot1^2+1+2=0$

であるから，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^3+3x^2-3x-2 \\
\hline
x-1 & 2x^4+x^3-6x^2+x+2 \\
 & 2x^4-2x^3 \\
\hline
 & \quad 3x^3-6x^2 \\
 & \quad 3x^3-3x^2 \\
\hline
 & \qquad -3x^2+x \\
 & \qquad -3x^2+3x \\
\hline
 & \qquad\quad -2x+2 \\
 & \qquad\quad -2x+2 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

〔別解〕

1	2	1	−6	1	2
+)		2	3	−3	−2
	2	3	−3	−2	$\boxed{0}$

上の計算より

$P(x)=(x-1)(2x^3+3x^2-3x-2)$

ここで，$Q(x)=2x^3+3x^2-3x-2$ とおくと

$Q(1)=2\cdot1^3+3\cdot1^2-3\cdot1-2=0$

であるから，$Q(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+5x+2 \\
\hline
x-1 & 2x^3+3x^2-3x-2 \\
 & 2x^3-2x^2 \\
\hline
 & \quad 5x^2-3x \\
 & \quad 5x^2-5x \\
\hline
 & \qquad 2x-2 \\
 & \qquad 2x-2 \\
\hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

〔別解〕

1	2	3	−3	−2
+)		2	5	2
	2	5	2	$\boxed{0}$

上の計算より

$Q(x)=(x-1)(2x^2+5x+2)$

このとき

$P(x)=(x-1)^2(2x^2+5x+2)$

$\quad=(x-1)^2(2x+1)(x+2)$

よって　$(x-1)^2(2x+1)(x+2)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=1,\ -\frac{1}{2},\ -2}$

〔別解〕(偶数次数(この場合は 4 次)の相反方程式

$(ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0)$ は両辺を x^2 で割って解くことができる。)

$x=0$ はこの方程式の解ではないので，両辺を x^2 で割ると

$2x^2+x-6+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0$

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$

$2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}+\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$

$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$

$\left\{2\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right\}=0$

$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$，$x+\frac{1}{x}=2$

$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$ の両辺に $2x$ を掛けて整理すると

$2x^2+5x+2=0$

$(2x+1)(x+2)=0$

$x=-\frac{1}{2}$，-2

$x+\frac{1}{x}=2$ の両辺に x を掛けて整理すると

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=1$

以上より，求める解は

$x=1$，$-\frac{1}{2}$，-2

方程式 $(x-1)(x+2)^2=0$ の解は $x=1,\ -2$ である。このうち，解 $x=-2$ を（⑦　2 重解　）という。

同様に，方程式 $(x-1)^3=0$ の解 $x=1$ を（⑧　3 重解　）という。

問 13 次の方程式を解け。

(1)　$x^3-x^2-8x+12=0$

$P(x)=x^3-x^2-8x+12$ とおく。

$P(2)=2^3-2^2-8\cdot2+12=0$

であるから，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x-6 \\ \hline x-2 & x^3-x^2-8x+12 \\ & x^3-2x^2 \\ \hline & \quad x^2-8x \\ & \quad x^2-2x \\ \hline & \quad\quad -6x+12 \\ & \quad\quad -6x+12 \\ \hline & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

〔別解〕

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -8 & 12 \\ +) & & 2 & 2 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

上の計算より

$P(x)=(x-2)(x^2+x-6)$

よって　$(x-2)(x^2+x-6)=0$

$(x-2)^2(x+3)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=2,\ -3}$

(2)　$x^3+3x^2+3x+1=0$

$P(x)=x^3+3x^2+3x+1$ とおく。

$P(-1)=(-1)^3+3\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+1$

$=0$

であるから，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ。

$$\begin{array}{r|l} & x^2+2x+1 \\ \hline x+1 & x^3+3x^2+3x+1 \\ & x^3+x^2 \\ \hline & \quad 2x^2+3x \\ & \quad 2x^2+2x \\ \hline & \quad\quad x+1 \\ & \quad\quad x+1 \\ \hline & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

〔別解〕

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ +) & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

上の計算より

$P(x)=(x+1)(x^2+2x+1)$

よって　$(x+1)(x^2+2x+1)=0$

$(x+1)^3=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=-1}$

〔注意〕　左辺を $(x+1)^3$ と因数分解して解いてもよい。

一般に，複素数の範囲で考えると（⑨ **“n 次方程式はつねに n 個の解をもつ”** ）ことが知られている。

応用例題 7 $x=1+i$ が方程式 $x^3+ax+b=0$ の解であるとき，実数 a，b の値と他の解を求めよ。

解 $x=1+i$ が方程式の解であるから

$(1+i)^3+a(1+i)+b=0$

すなわち　$-2+2i+a+ai+b=0$

整理すると

$(a+b-2)+(a+2)i=0$

a，b は実数であるから，$a+b-2$，$a+2$ も実数である。

よって　$a+b-2=0$，$a+2=0$　◀ $A+Bi=0 \Longleftrightarrow A=0$，$B=0$

これを解くと　$a=-2$，$b=4$　……答

このとき，もとの方程式は　$x^3-2x+4=0$

左辺を因数分解すると　$(x+2)(x^2-2x+2)=0$

ゆえに　$x=-2$，$1\pm i$

よって，他の解は　$x=-2$，$1-i$　……答

問 14 $x=2-i$ が方程式 $x^3+ax^2+bx-5=0$ の解であるとき，実数 a，b の値と他の解を求めよ。

$x=2-i$ が方程式の解であるから

$(2-i)^3+a(2-i)^2+b(2-i)-5=0$

$2-11i+a(3-4i)+b(2-i)-5=0$

$(3a+2b-3)-(4a+b+11)i=0$

a，b は実数であるから

$$\begin{cases} 3a+2b-3=0 \\ 4a+b+11=0 \end{cases}$$

これを解いて

$\boldsymbol{a=-5}$，$\boldsymbol{b=9}$

このとき，もとの方程式は

$x^3-5x^2+9x-5=0$

$(x-1)(x^2-4x+5)=0$

よって　$x=1$，$2\pm i$

ゆえに，他の解は　$\boldsymbol{x=1}$，$\boldsymbol{2+i}$

〔別解 1〕教科書 p. 42 の「係数が実数である高次方程式が虚数解 $a+bi$ をもつならば，それと共役な複素数 $a-bi$ もこの方程式の解である」ことを用いると，$x=2+i$ も解であることがわかる。$x=2\pm i$ を解とする 2 次方程式で，x^2の係数が 1 のものは

$(2+i)+(2-i)=4$

$(2+i)(2-i)=5$

であるから　$x^2-4x+5=0$

残りの解を γ とすると，$x=2\pm i$，γ を解とする 3 次方程式で，x^3 の係数が 1のものは

$(x-\gamma)(x^2-4x+5)=0$

すなわち

$x^3-(\gamma+4)x^2+(4\gamma+5)x-5\gamma=0$

係数を比較して

$-(\gamma+4)=a$　……①

$4\gamma+5=b$　……②

$-5\gamma=-5$　……③

③より　$\gamma=1$

①，②に代入して　$a=-5$，$b=9$

〔別解 2〕さらに，教科書 p. 57 の「発展　3 次方程式の解と係数の関係」を用いると，残りの解を γ として

$(2+i)+(2-i)+\gamma=-a$　……①

$(2+i)(2-i)+(2-i)\gamma+\gamma(2+i)=b$　……②

$(2+i)(2-i)\gamma=5$　……③

が成り立つ。

③より　$\gamma=1$

①，②に代入して　$a=-5$，$b=9$

問 題

（教科書 p.43）

１５　次の第１式が第２式で割り切れるように，定数 a の値を定めよ。

(1)　$x^3-ax^2-5x-6,\quad x+2$

$P(x)=x^3-ax^2-5x-6$ とおくと，

$P(x)$ が $x+2$ で割り切れるから

$P(-2)=-4a-4=0$

よって　$\boldsymbol{a=-1}$

(2)　$x^3+ax+a+1,\quad x-4$

$P(x)=x^3+ax+a+1$ とおくと，

$P(x)$ が $x-4$ で割り切れるから

$P(4)=5a+65=0$

よって　$\boldsymbol{a=-13}$

(3)　$ax^3-2x^2-12x+8,\quad 3x-2$

$P(x)=ax^3-2x^2-12x+8$ とおくと，

$P(x)$ が $3x-2$ で割り切れるから

$P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}a-\frac{8}{9}=0$

よって　$\boldsymbol{a=3}$

１６　整式 $P(x)=ax^3+bx^2-8x-7$ が $x+1$ で割り切れ，$x-2$ で割ったときの余りが -3 となるように，定数 a，b の値を定めよ。

$P(x)=ax^3+bx^2-8x-7$ が

$x+1$ で割り切れるから　$P(-1)=0$

$x-2$ で割った余りが -3 より　$P(2)=-3$

よって

$$\begin{cases}-a+b+1=0\\8a+4b-23=-3\end{cases}$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=1}$

１７　整式 $P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの余りは $5x+7$ である。このとき，$P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りを求めよ。

$P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$P(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+5x+7$

よって，$P(x)$ を $x+1$ で割った余りは

$P(-1)=(-1+1)(-1-2)Q(-1)+5\cdot(-1)+7$

$\quad=\boldsymbol{2}$

１８　１の３乗根のうち虚数であるものの１つを ω で表すとき，次の値を求めよ。

$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$ である。

(1)　$\omega^4+\omega^2+1$

$\omega^4+\omega^2+1=\omega^3\cdot\omega+\omega^2+1$

$\quad=\omega^2+\omega+1=\boldsymbol{0}$

(2)　$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}$

$\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2}{\omega^3}=\omega^2$，$\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega}{\omega^3}=\omega$ であるから

$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2+\omega=(\omega^2+\omega+1)-1$

$\quad=\boldsymbol{-1}$

１９　次の方程式を解け。

(1)　$x^4-2x^2-8=0$

$(x^2)^2-2x^2-8=0$

$(x^2-4)(x^2+2)=0$

$x^2=4,\quad -2$

よって　　$\boldsymbol{x=\pm 2,\quad \pm\sqrt{2}i}$

(2)　$(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$

$\{(x^2-x)-6\}\{(x^2-x)+2\}=0$

$(x^2-x-6)(x^2-x+2)=0$

$(x+2)(x-3)(x^2-x+2)=0$

よって　　$\boldsymbol{x=-2,\ 3,\ \frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}}$

(3)　$x^3-2x^2-2x+4=0$

$P(x)=x^3-2x^2-2x+4$ とおく。

$P(2)=2^3-2\cdot 2^2-2\cdot 2+4=0$

であるから，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$P(x)=(x-2)(x^2-2)$

$(x-2)(x^2-2)=0$

よって　　$\boldsymbol{x=2,\quad \pm\sqrt{2}}$

〔別解〕x^3-2x^2-2x+4

$=x^2(x-2)-2(x-2)$

$=(x-2)(x^2-2)$

と因数分解してもよい。

(4)　$2x^3-3x^2-11x+6=0$

$P(x)=2x^3-3x^2-11x+6$ とおく。

$P(-2)=2\cdot(-2)^3-3\cdot(-2)^2-11\cdot(-2)+6=0$

であるから，$P(x)$ は $x+2$ を因数にもつ。

$P(x)=(x+2)(2x^2-7x+3)$

よって　　$(x+2)(2x^2-7x+3)=0$

$(x+2)(2x-1)(x-3)=0$

ゆえに　　$\boldsymbol{x=-2,\ \frac{1}{2},\ 3}$

(5)　$12x^4-16x^3+x^2+4x-1=0$

$P(x)=12x^4-16x^3+x^2+4x-1$ とおく。

$P(1)=12\cdot 1^4-16\cdot 1^3+1^2+4\cdot 1-1=0$

であるから，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$P(x)=(x-1)(12x^3-4x^2-3x+1)$

ここで，$Q(x)=12x^3-4x^2-3x+1$ とおくと

$$Q\left(\frac{1}{2}\right)=12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+1=0$$

であるから，$Q(x)$ は $2x-1$ を因数にもつ。

$Q(x)=(2x-1)(6x^2+x-1)$

このとき

$P(x)=(x-1)(2x-1)(6x^2+x-1)$

$=(x-1)(2x-1)(2x+1)(3x-1)$

よって　　$(x-1)(2x-1)(2x+1)(3x-1)=0$

ゆえに　　$\boldsymbol{x=1,\ \pm\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}}$

〔注意〕$Q(x)=4x^2(3x-1)-(3x-1)$

$=(4x^2-1)(3x-1)$

$=(2x+1)(2x-1)(3x-1)$

と因数分解することもできる。

２０　方程式 $x^3+ax+b=0$ が $x=1+\sqrt{2}i$ を解にもつとき，実数 a，b の値と他の解を求めよ。

$x=1+\sqrt{2}i$ が方程式の解であるから

$(1+\sqrt{2}i)^3+a(1+\sqrt{2}i)+b=0$

すなわち　$-5+\sqrt{2}i+a+\sqrt{2}ai+b=0$

実部と虚部に整理すると

$(a+b-5)+\sqrt{2}(a+1)i=0$

a，b は実数であるから

$a+b-5=0$，$a+1=0$

これを解いて　$\boldsymbol{a=-1}$，$\boldsymbol{b=6}$

このとき，もとの方程式は　$x^3-x+6=0$

左辺を因数分解して　$(x+2)(x^2-2x+3)=0$

ゆえに　$x=-2$，$1\pm\sqrt{2}i$

よって，他の解は　$\boldsymbol{x=-2}$，$\boldsymbol{1-\sqrt{2}i}$

〔別解〕問 14 と同様にして解くこともできる。

２１　方程式 $x^3+ax^2+bx-6=0$ が次の値を解にもつとき，定数 a，b の値と他の解を求めよ。

$P(x)=x^3+ax^2+bx-6$ とおく。

(1)　1 と -2

方程式 $P(x)=0$ が 1 と -2 を解にもつから

$P(1)=0$，$P(-2)=0$

よって

$P(1)=a+b-5=0$

$P(-2)=4a-2b-14=0$

これを解いて　$\boldsymbol{a=4}$，$\boldsymbol{b=1}$

このとき，もとの方程式は

$x^3+4x^2+x-6=0$

左辺は $(x-1)(x+2)$，すなわち

x^2+x-2

を因数にもつ。

$$
\begin{array}{r}
x+3 \\
x^2+x-2\,\overline{)\,x^3+4x^2+x-6} \\
\underline{x^3+x^2-2x} \\
3x^2+3x-6 \\
\underline{3x^2+3x-6} \\
0
\end{array}
$$

上の計算より，もとの方程式の左辺は

$(x-1)(x+2)(x+3)=0$

と，因数分解される。

よって，他の解は　$\boldsymbol{x=-3}$

〔別解〕（教科書 p.57「発展　3 次方程式の解と係数の関係」を用いると）

他の解を γ として

$$
\begin{cases}
1+(-2)+\gamma=-a & \cdots\cdots ① \\
1\cdot(-2)+(-2)\gamma+\gamma\cdot 1=b & \cdots\cdots ② \\
1\cdot(-2)\cdot\gamma=6 & \cdots\cdots ③
\end{cases}
$$

③より　$\gamma=-3$

これを①，②に代入して

$a=4$，$b=1$

$P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 6$ とおく。

(2)　2 重解 -1

方程式 $P(x) = 0$ の他の解を γ とすると

$$P(x) = (x - \gamma)(x + 1)^2$$
$$= x^3 + (2 - \gamma)x^2 + (1 - 2\gamma)x - \gamma$$

係数を比較して

$$2 - \gamma = a,\quad 1 - 2\gamma = b,\quad -\gamma = -6$$

これを解いて

$\boldsymbol{a = -4,\ b = -11}$　**他の解は**　$\boldsymbol{x = 6}$

〔別解 1〕　$P(x)$ は $(x+1)^2$ で割り切れるから

$$\begin{array}{r|l}
 & x + (a-2) \\ \hline
x^2+2x+1 & x^3 + ax^2 + \qquad bx - 6 \\
 & x^3 + 2x^2 + \qquad x \\ \cline{2-2}
 & (a-2)x^2 + \ (b-1)x - 6 \\
 & (a-2)x^2 + (2a-4)x + a - 2 \\ \cline{2-2}
 & (-2a+b+3)x - a - 4
\end{array}$$

$$\begin{cases} -2a + b + 3 = 0 \\ -a - 4 = 0 \end{cases}$$

これを解いて　$a = -4,\ b = -11$

このとき

$$P(x) = (x+1)^2(x + a - 2)$$
$$= (x+1)^2(x - 6)$$

よって，他の解は　$x = 6$

〔別解 2〕方程式 $P(x) = 0$ が $x = -1$ を解にもつから　$P(-1) = 0$

よって

$$P(-1) = a - b - 7 = 0$$

これより，$b = a - 7$ であるから

$$P(x) = x^3 + ax^2 + (a-7)x - 6$$
$$= a(x^2 + x) + x^3 - 7x - 6$$
$$= ax(x+1) + (x+1)(x^2 - x - 6)$$
$$= (x+1)\{ax + (x^2 - x - 6)\}$$
$$= (x+1)\{x^2 + (a-1)x - 6\}$$

$Q(x) = x^2 + (a-1)x - 6$ とおくと，$Q(x)$ は $x = -1$ を解にもつから

$$Q(-1) = 0$$

よって

$$Q(-1) = -a - 4 = 0$$

したがって　$a = -4$

$$b = a - 7 = -11$$

このとき

$$Q(x) = x^2 - 5x - 6$$
$$= (x+1)(x-6)$$

であるから

$$P(x) = (x+1)Q(x) = (x+1)^2(x-6)$$

ゆえに，他の解は　$x = 6$