2 節 2次方程式

1 複素数とその演算

複素数

（教科書 p.20）

2 乗すると -1 になる“新しい数”を考える。それは，これまでの数とは異なるから，特別な記号（① ）で表し，（② ）とよぶ。

すなわち （③ ）

さらに，a，b を任意の実数として $a+bi$ の形に表される数を考え，これを（④ ）という。たとえば

$$-1+3i,\quad 4-\sqrt{5}i,\quad 2+i$$

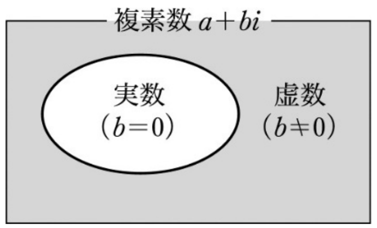
などはいずれも複素数である。

複素数 $a+bi$ において，a を（⑤ ），b を（⑥ ）という。

複素数 $a+bi$ は，$b=0$ のとき $a+0i$ となり，これを実数 a とみなすことにする。

実数でない複素数を（⑦ ）という。

とくに，$a=0$ かつ $b\neq 0$ のとき $0+bi$，すなわち bi を（⑧ ）という。



問1 次の複素数の実部，虚部を答えよ。

(1) $-1+\sqrt{3}i$

(2) $2-i$

(3) $\sqrt{7}i$

(4) -5

複素数の相等

（教科書 p.21）

複素数の相等
a，b，c，d が実数であるとき $a+bi=c+di \iff a=c$ かつ $b=d$ とくに $a+bi=0 \iff a=0$ かつ $b=0$

注意 虚数を扱うとき，数の大小関係や正負は考えない。

例題 1 $(3x-y)+(2x+1)i=7+5i$ を満たす実数 x，y を求めよ。

解

問2 次の等式を満たす実数 x，y を求めよ。

(1) $(3x+2y)+9i=6-3yi$

(2) $(3x-y-3)+(7x-2y-8)i=0$

複素数の演算

（教科書 p.21）

例 1
(1) $3i-5i=$
(2) $4i\cdot(-3i)=$
(3) $i^3=$

問3 次の計算をせよ。
(1) $8i-7i$
(2) $-5i\cdot(-4i)$
(3) $\left(-\sqrt{2}i\right)^2$
(4) i^4

例 2
(1) $(2+3i)+(1-5i)=$
(2) $(2+3i)-(1-5i)=$
(3) $(2+3i)(1-5i)=$

問4 次の計算をせよ。
(1) $(4+5i)+(3-2i)$
(2) $(2-4i)-(1-i)$
(3) $(5+3i)(2-7i)$
(4) $(4+3i)(4-3i)$

a, b が実数であるとき，複素数 $\alpha=a+bi$ に対して（⑨　　　　　　）を α と（⑩　　　　　　）といい，（⑪　　　　）で表す。

問5 次の複素数と共役な複素数を答えよ。
(1) $3+2i$　(2) $\sqrt{5}-\sqrt{2}i$　(3) -4　(4) $3i$

例 3
$$\frac{2+3i}{1-5i}=\frac{(2+3i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)}$$
◀分母と共役な複素数を掛ける
$$=\frac{2+10i+3i+15i^2}{1-25i^2}=\frac{2+13i-15}{1+25}$$
$$=\frac{-13+13i}{26}=$$

問6　例３にならって，次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{1}{3-i}$

(2)　$\dfrac{1-i}{1+i}$

(3)　$\dfrac{2+i}{1+2i}$

(4)　$\dfrac{1}{i}$

複素数 α, β について，実数と同様に次のことが成り立つ。

(⑫　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

負の数の平方根

（教科書 p.23）

例４　方程式 $x^2=-3$ を解くことによって，-3 の平方根を求めてみよう。

$i^2=-1$ より　　$x^2=3i^2$

すなわち　　$x^2-3i^2=0$

ゆえに　　$(x-\sqrt{3}i)(x+\sqrt{3}i)=0$

よって　　$x-\sqrt{3}i=0$　または　$x+\sqrt{3}i=0$

したがって　　$x=\sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}i$

すなわち，-3 の平方根は（　　　　　　）と（　　　　　　）である。

問7　方程式 $x^2=-5$ を解くことによって，-5 の平方根を求めよ。

> $a>0$ のとき，$-a$ の平方根は　$\sqrt{a}i,\ -\sqrt{a}i$
> また，$\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$ と定める。とくに，$\sqrt{-1}=i$ である。

例５　(1)　$\sqrt{-5}=$

(2)　$\sqrt{-49}=$

問8 次の数をi を用いて表せ。

(1) $\sqrt{-8}$

(2) $-\sqrt{-50}$

(3) $\sqrt{-\frac{7}{16}}$

例6
(1) -1 の平方根は $\sqrt{-1}=$, $-\sqrt{-1}=$
(2) -25 の平方根は $\sqrt{-25}=$, $-\sqrt{-25}=$

問9 -18 の平方根を i を用いて表せ。

例題2 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{-4}+\sqrt{-9}$ (2) $\sqrt{-8}\times\sqrt{-6}$ (3) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}$

解

$\boxed{\text{注意}}$ $\sqrt{-8}\times\sqrt{-6}=-4\sqrt{3}$, $\sqrt{(-8)\times(-6)}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

であるから $\sqrt{-8}\times\sqrt{-6}\neq\sqrt{(-8)\times(-6)}$

また $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=-2i$, $\sqrt{\frac{8}{-2}}=\sqrt{-4}=2i$

であるから $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}\neq\sqrt{\frac{8}{-2}}$

問10 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{-48}-\sqrt{-12}$

(2) $\sqrt{-28}\times\sqrt{-35}$

(3) $\frac{6}{\sqrt{-4}}$

2 解の公式

（教科書 p.２５）

次の 2 次方程式の解の公式が成り立つ。

2 次方程式の解の公式
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

例 7 2 次方程式 $4x^2+3x+2=0$ を解いてみよう。

$x=$

問 11 解の公式を用いて，次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2+3x-1=0$

(2) $5x^2-6x+4=0$

(3) $x^2-\sqrt{3}x+1=0$

(4) $4x(x-1)=-1$

判別式

（教科書 p.26）

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

は，b^2-4ac の符号によって，次の 3 つに分類することができる。

$\boxed{1}$ $b^2-4ac>0$ のとき，異なる 2 つの実数
$\boxed{2}$ $b^2-4ac=0$ のとき，ただ 1 つの実数
$\boxed{3}$ $b^2-4ac<0$ のとき，異なる 2 つの虚数

$\boxed{1}$と$\boxed{2}$の場合は，解は実数であるから（⑬　　　　　）といい，$\boxed{3}$の場合は（⑭　　　　　）という。2 次方程式の異なる 2 つの虚数解は互いに共役な複素数である。また，$\boxed{2}$の場合は，2 つの解が重なったものと考え（⑮　　　　　）という。

b^2-4ac を 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の（⑯　　　　　）といい，記号（⑰　　　　　）で表す。

すなわち

（⑱　　　　　　　　）

2 次方程式の解の判別
2 次方程式の判別式 D と解について，次のことが成り立つ。 $\boxed{1}$ $\boldsymbol{D>0}$ $\Leftrightarrow$ **異なる 2 つの実数解をもつ** $\boxed{2}$ $\boldsymbol{D=0}$ $\Leftrightarrow$ **重解をもつ** $\boxed{3}$ $\boldsymbol{D<0}$ $\Leftrightarrow$ **異なる 2 つの虚数解をもつ**

重解も実数解であるから

（⑲　　　　　　　　　　　　）

$ax^2+2b'x+c=0$ の形の 2 次方程式では，$D=4(b'^2-ac)$ であるから，解の判別には（⑳　　　　　　　　）を用いてもよい。

例 8 (1)　2 次方程式 $5x^2-3x+4=0$ の判別式を D とすると

$D=$

であるから，（　　　　　　　　　　　）をもつ。

(2)　2 次方程式 $9x^2-6x+1=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=$

であるから，（　　　　　）をもつ。

問 12 次の 2 次方程式の解を判別せよ。

(1)　$2x^2-11x+10=0$

。

(2)　$3x^2-6x+4=0$

(3)　$49x^2+28x+4=0$

例題 3 k を定数とするとき，2 次方程式 $x^2+kx-k=0$ の解を判別せよ。

解

問 13 k を定数とするとき，2 次方程式 $x^2+(3k-1)x+2k^2-1=0$ の解を判別せよ。

問 14 2 次方程式 $x^2+2kx+2k+3=0$ が重解をもつような定数 k の値を求めよ。また，そのときの重解を求めよ。

3 解と係数の関係　　（教科書 p.28）

2 次方程式の解と係数の間には，次の関係が成り立つ。

2 次方程式の解と係数の関係
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α, β とすると $$\boldsymbol{\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

例 9　2 次方程式 $3x^2-7x+6=0$ の 2 つの解を α, β とすると

$\alpha+\beta=$

$\alpha\beta=$

問 15　次の 2 次方程式の 2 つの解の和と積を求めよ。

(1)　$2x^2+3x-4=0$

(2)　$x^2-x+2=0$

例題 4　2 次方程式 $2x^2+8x+3=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$ の値を求めよ。

解

問 16　2 次方程式 $x^2-4x+5=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$

(2)　$(\alpha-\beta)^2$

(3)　$\alpha^3+\beta^3$

(4)　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

例題 5　2 次方程式 $8x^2-mx+1=0$ の 1 つの解が他の解の 2 倍となるように，定数 m の値を定めよ。

解

問 17 2 次方程式 $4x^2+mx+3=0$ の 1 つの解が他の解に 1 加えた数となるように，定数m の値を定めよ。

2 次式の因数分解

（教科書 p.30）

2次式の因数分解
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α, β とすると $\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)}$

例題 6　次の 2 次式を，複素数の範囲で因数分解せよ。

（1） x^2+2x-1　　（2） $2x^2-3x+2$

解

問 18 次の 2 次式を，複素数の範囲で因数分解せよ。

（1） x^2-x-1

（2） $3x^2-2x+1$

（3） x^2-5

（4） x^2+4

例 10 4 次式 x^4-4 の因数分解を考えてみよう。

$x^4-4=$　　　　（有理数の範囲）

$=$　　　　（実数の範囲）

$=$　　　　（複素数の範囲）

問19 4次式 $x^4 - x^2 - 6$ を，次の範囲で因数分解せよ。

(1)　有理数の範囲

(2)　実数の範囲

(3)　複素数の範囲

与えられた2数を解とする2次方程式

（教科書 p.31）

2数を解とする2次方程式
2数 α，β を解とする2次方程式の1つは，$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$ とすると，次のように表される。 $\boldsymbol{x^2 - px + q = 0}$

例11 2数 $3+\sqrt{2}i$，$3-\sqrt{2}i$ を解とする2次方程式を1つ求めてみよう。

$$(3+\sqrt{2}i)+(3-\sqrt{2}i)=6,\qquad (3+\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i)=11$$

よって，この2数を解とする2次方程式の1つは

問20 次の2数を解とする2次方程式を1つ求めよ。

(1)　1，-2

(2)　$2+\sqrt{5}$，$2-\sqrt{5}$

(3)　$-5+i$，$-5-i$

例12 和が3，積が4となる2数を求めてみよう。

この2数を α，β とおくと

$$\alpha+\beta=3,\qquad \alpha\beta=4$$

であるから，α，β は2次方程式

$$x^2-3x+4=0$$

の2つの解である。これを解くと

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$$

したがって，求める2数は　(　　　　　　)と(　　　　　　)

問21 和と積が次のようになる2数を求めよ。

(1)　和が 1，積が 1

(2)　和が -8，積が 11

応用例題 7
2 次方程式 $x^2-2x+7=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，$\alpha+2$, $\beta+2$ を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

解

問 22 2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

(1) $2\alpha-1$, $2\beta-1$

(2) $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$

(3) α^2, β^2

2 次方程式の実数解の符号

（教科書 p.33）

2 つの実数 α, β について，次のことが成り立つ。

1 $\alpha>0$, $\beta>0$ $\iff$ $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$
2 $\alpha<0$, $\beta<0$ $\iff$ $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$
3 α, β が異符号 $\iff$ $\alpha\beta<0$

1，2，3より，実数解をもつ 2 次方程式について，次のことが成り立つ。

2次方程式の実数解の符号
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D，2 つの解を α, β とするとき，次のことが成り立つ。 1 α, β が**ともに正** $\iff$ $\boldsymbol{D\geqq 0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0}$ 2 α, β が**ともに負** $\iff$ $\boldsymbol{D\geqq 0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0}$ 3 α, β が**異符号** $\iff$ $\boldsymbol{\alpha\beta<0}$

応用例題 8 解

2 次方程式 $x^2-kx-k+3=0$ が異なる 2 つの正の解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

問 23 2 次方程式 $x^2+2(k+1)x-2k+6=0$ が，次の条件を満たすような定数 k の値の範囲を求めよ。

(1) 異なる 2 つの負の解をもつ

(2) 正の解と負の解をもつ

問 題

（教科書 p.35）

7 次の等式を満たす実数 a, b を求めよ。

$$(2+3i)a+(3-i)b=7+5i$$

8 次の計算をして，結果を $a+bi$ の形で表せ。

(1) $\sqrt{-98}-\sqrt{-72}+\sqrt{-50}$

(2) $(5-2i)^2$

(3) $\dfrac{2+i}{2-i}+\dfrac{2-i}{2+i}$

(4) $\dfrac{(2-i)^2}{2+3i}$

9 α, β を複素数とするとき，次のことを示せ。

(1) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

(2) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$

１０ 次のそれぞれの場合について $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ が成り立つかどうかを調べよ。

(1) $a=3,\ b=-12$

(2) $a=-2,\ b=-5$

１１ 次の 2 次方程式を解け。

(1) $\sqrt{2}x^2-3x+2\sqrt{2}=0$

(2) $(x-5)^2+(x+2)^2=(x+3)^2$

１２ 2 次方程式 $2x^2-2kx+k^2-3k-8=0$ が虚数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

１３　2 次方程式 $2x^2-4x+1=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$

(2)　$\dfrac{\beta}{\alpha-2}+\dfrac{\alpha}{\beta-2}$

(3)　$\alpha^4+\beta^4$

１４　2 次方程式 $x^2+mx+1=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の問に答えよ。

(1)　$\alpha-3,\ \beta-3$ を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

(2)　$\alpha,\ \beta$ がともに 3 より小さくなるような定数 m の値の範囲を求めよ。

2 節 2次方程式

1 複素数とその演算

複素数

（教科書 p.20）

2 乗すると -1 になる“新しい数”を考える。それは，これまでの数とは異なるから，特別な記号（① i ）で表し，（② 虚数単位 ）とよぶ。

すなわち　（③ $i^2=-1$ ）

さらに，a，b を任意の実数として $a+bi$ の形に表される数を考え，これを（④ 複素数 ）という。たとえば

$$-1+3i,\quad 4-\sqrt{5}i,\quad 2+i$$

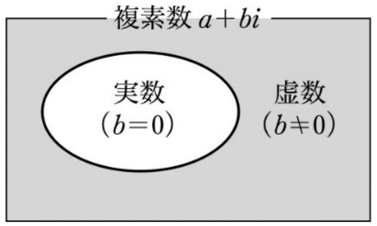
などはいずれも複素数である。

複素数 $a+bi$ において，a を（⑤ 実部 ），b を（⑥ 虚部 ）という。

複素数 $a+bi$ は，$b=0$ のとき $a+0i$ となり，これを実数 a とみなすことにする。

実数でない複素数を（⑦ 虚数 ）という。

とくに，$a=0$ かつ $b\neq 0$ のとき $0+bi$，すなわち bi を（⑧ 純虚数 ）という。



問1　次の複素数の実部，虚部を答えよ。

(1)　$-1+\sqrt{3}i$

実部　-1，　虚部　$\sqrt{3}$

(2)　$2-i$

実部　2，　虚部　-1

(3)　$\sqrt{7}i$

実部　0，　虚部　$\sqrt{7}$

(4)　-5

実部　-5，　虚部　0

複素数の相等

（教科書 p.21）

> **複素数の相等**
>
> a，b，c，d が実数であるとき
>
> $a+bi=c+di \iff a=c$ かつ $b=d$
>
> とくに　$a+bi=0 \iff a=0$ かつ $b=0$

注意　虚数を扱うとき，数の大小関係や正負は考えない。

例題 1　$(3x-y)+(2x+1)i=7+5i$ を満たす実数 x，y を求めよ。

解　x，y が実数であるから，$3x-y$，$2x+1$ も実数である。

したがって　$\begin{cases}3x-y=7\\2x+1=5\end{cases}$

これを解いて　$x=2$，$y=-1$

問2　次の等式を満たす実数 x，y を求めよ。

(1)　$(3x+2y)+9i=6-3yi$

x，y が実数であるから，$3x+2y$，$-3y$ も実数である。

したがって　$\begin{cases}3x+2y=6\\9=-3y\end{cases}$

これを解いて　$x=4$，$y=-3$

(2)　$(3x-y-3)+(7x-2y-8)i=0$

x，y が実数であるから，$3x-y-3$，$7x-2y-8$ も実数である。

したがって　$\begin{cases}3x-y-3=0\\7x-2y-8=0\end{cases}$

これを解いて　$x=2$，$y=3$

複素数の演算

（教科書 p.2１）

例1
(1)　$3i-5i=(3-5)i=-2i$
(2)　$4i\cdot(-3i)=-12i^2=-12\cdot(-1)=12$
(3)　$i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i$

問3　次の計算をせよ。
(1)　$8i-7i$
$=\boldsymbol{i}$

(2)　$-5i\cdot(-4i)$
$=20i^2=20\cdot(-1)=\mathbf{-20}$

(3)　$(-\sqrt{2}i)^2$
$=2i^2=2\cdot(-1)=\mathbf{-2}$

(4)　i^4
$=(i^2)^2=(-1)^2=\mathbf{1}$

例2
(1)　$(2+3i)+(1-5i)=(2+1)+(3i-5i)=3-2i$
(2)　$(2+3i)-(1-5i)=(2-1)+(3i+5i)=1+8i$
(3)　$(2+3i)(1-5i)=2-10i+3i-15i^2$
$=2-7i-15\cdot(-1)=17-7i$

問4　次の計算をせよ。
(1)　$(4+5i)+(3-2i)$
$=\boldsymbol{7+3i}$

(2)　$(2-4i)-(1-i)$
$=\boldsymbol{1-3i}$

(3)　$(5+3i)(2-7i)$
$=10-35i+6i-21i^2$
$=10-29i-21\cdot(-1)$
$=\boldsymbol{31-29i}$

(4)　$(4+3i)(4-3i)$
$=16-9i^2$
$=16-9\cdot(-1)=\mathbf{25}$

a，b が実数であるとき，複素数 $\alpha=a+bi$ に対して（⑨　$a-bi$　）を α と（⑩　共役な複素数　）といい，（⑪　$\overline{\alpha}$　）で表す。

問5　次の複素数と共役な複素数を答えよ。
(1)　$3+2i$　　(2)　$\sqrt{5}-\sqrt{2}i$　　(3)　-4　　(4)　$3i$

$\boldsymbol{3-2i}$　　$\boldsymbol{\sqrt{5}+\sqrt{2}i}$　　$\mathbf{-4}$　　$\boldsymbol{-3i}$

例3

$$\frac{2+3i}{1-5i}=\frac{(2+3i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)}$$

◀分母と共役な複素数を掛ける

$$=\frac{2+10i+3i+15i^2}{1-25i^2}=\frac{2+13i-15}{1+25}$$

$$=\frac{-13+13i}{26}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

問6 例 3 にならって，次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{1}{3-i}$

$=\dfrac{3+i}{(3-i)(3+i)}=\dfrac{3+i}{9-i^2}$

$=\frac{3+i}{9+1}=\frac{3+i}{10}=\boldsymbol{\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i}$

(2) $\dfrac{1-i}{1+i}$

$=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}$

$=\dfrac{1-2i+i^2}{1-i^2}=\dfrac{1-2i-1}{1+1}$

$=\dfrac{-2i}{2}=\boldsymbol{-i}$

(3) $\dfrac{2+i}{1+2i}$

$=\dfrac{(2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$=\dfrac{2-4i+i-2i^2}{1-4i^2}=\dfrac{2-3i+2}{1+4}$

$=\dfrac{4-3i}{5}=\boldsymbol{\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i}$

(4) $\dfrac{1}{i}$

$=\dfrac{i}{i^2}=\dfrac{i}{-1}=\boldsymbol{-i}$

複素数 α, β について，実数と同様に次のことが成り立つ。

（⑫ $\boldsymbol{\alpha\beta=0}$ ⇔ $\boldsymbol{\alpha=0}$ **または** $\boldsymbol{\beta=0}$ ）

負の数の平方根

（教科書 p.23）

例 4 方程式 $x^2=-3$ を解くことによって，-3 の平方根を求めてみよう。

$i^2=-1$ より　$x^2=3i^2$

すなわち　$x^2-3i^2=0$

ゆえに　$(x-\sqrt{3}i)(x+\sqrt{3}i)=0$

よって　$x-\sqrt{3}i=0$ または $x+\sqrt{3}i=0$

したがって　$x=\sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}i$

すなわち，-3 の平方根は（ $\sqrt{3}i$ ）と（ $-\sqrt{3}i$ ）である。

問7 方程式 $x^2=-5$ を解くことによって，-5 の平方根を求めよ。

$i^2=-1$ より　$x^2=5i^2$

$x^2-5i^2=0$

$(x-\sqrt{5}i)(x+\sqrt{5}i)=0$

よって

$x-\sqrt{5}i=0$ または $x+\sqrt{5}i=0$

したがって　$x=\pm\sqrt{5}i$

すなわち，-5 の平方根は $\boldsymbol{\sqrt{5}i}$ と $\boldsymbol{-\sqrt{5}i}$

である。

$a>0$ のとき，$-a$ の平方根は　$\boldsymbol{\sqrt{a}i,\ -\sqrt{a}i}$

また，$\boldsymbol{\sqrt{-a}=\sqrt{a}i}$ と定める。とくに，$\boldsymbol{\sqrt{-1}=i}$である。

例 5 (1) $\sqrt{-5}=\sqrt{5}i$

(2) $\sqrt{-49}=\sqrt{49}i=7i$

問8　次の数をiを用いて表せ。

(1)　$\sqrt{-8}$

$=\sqrt{8}i=\mathbf{2\sqrt{2}i}$

(2)　$-\sqrt{-50}$

$=-\sqrt{50}i=\mathbf{-5\sqrt{2}i}$

(3)　$\sqrt{-\frac{7}{16}}$

$=\sqrt{\frac{7}{16}}i=\mathbf{\frac{\sqrt{7}}{4}i}$

例 6

(1)　-1 の平方根は　$\sqrt{-1}=i$，$-\sqrt{-1}=-i$

(2)　-25 の平方根は　$\sqrt{-25}=\sqrt{25}i=5i$，$-\sqrt{-25}=-5i$

問9　-18 の平方根を i を用いて表せ。

$\sqrt{-18}=\sqrt{18}i=3\sqrt{2}i$

$-\sqrt{-18}=-\sqrt{18}i=-3\sqrt{2}i$

よって　　$\mathbf{3\sqrt{2}i}$ と $\mathbf{-3\sqrt{2}i}$

例題 2　次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt{-4}+\sqrt{-9}$　　(2)　$\sqrt{-8}\times\sqrt{-6}$　　(3)　$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}$

解

(1)　$\sqrt{-4}+\sqrt{-9}=\sqrt{4}i+\sqrt{9}i=2i+3i=5i$

(2)　$\sqrt{-8}\times\sqrt{-6}=\sqrt{8}i\times\sqrt{6}i=\sqrt{8}\times\sqrt{6}\times i^2=-4\sqrt{3}$

(3)　$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}i}=\frac{2}{i}=\frac{2i}{i^2}=\frac{2i}{-1}=-2i$

注意　$\sqrt{-8}\times\sqrt{-6}=-4\sqrt{3}$, $\sqrt{(-8)\times(-6)}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

であるから　$\sqrt{-8}\times\sqrt{-6}\neq\sqrt{(-8)\times(-6)}$

また　$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=-2i$, $\sqrt{\frac{8}{-2}}=\sqrt{-4}=2i$

であるから　$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}\neq\sqrt{\frac{8}{-2}}$

問 10　次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt{-48}-\sqrt{-12}$

$=\sqrt{48}i-\sqrt{12}i$

$=4\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i=\mathbf{2\sqrt{3}i}$

(2)　$\sqrt{-28}\times\sqrt{-35}$

$=2\sqrt{7}i\times\sqrt{35}i$

$=14\sqrt{5}i^2=\mathbf{-14\sqrt{5}}$

(3)　$\frac{6}{\sqrt{-4}}$

$=\frac{6}{2i}=\frac{3}{i}=\frac{3i}{i^2}=\frac{3i}{-1}=\mathbf{-3i}$

2 解の公式

（教科書 p.25）

次の 2 次方程式の解の公式が成り立つ。

2 次方程式の解の公式
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $\boldsymbol{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

例 7 2 次方程式 $4x^2+3x+2=0$ を解いてみよう。

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot4\cdot2}}{2\cdot4}=\frac{-3\pm\sqrt{-23}}{8}=\frac{-3\pm\sqrt{23}i}{8}$$

問 11 解の公式を用いて，次の 2 次方程式を解け。

(1)　$x^2+3x-1=0$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}}$$

(2)　$5x^2-6x+4=0$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot5\cdot4}}{2\cdot5}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{-44}}{10}=\frac{6\pm2\sqrt{11}i}{10}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3\pm\sqrt{11}i}{5}}$$

[別解]$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-5\cdot4}}{5}$

$$=\frac{3\pm\sqrt{-11}}{5}=\frac{3\pm\sqrt{11}i}{5}$$

(3)　$x^2-\sqrt{3}x+1=0$

$$x=\frac{-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}\pm i}{2}}$$

(4)　$4x(x-1)=-1$

整理して　　$4x^2-4x+1=0$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

[別解]$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1}}{4}=\dfrac{1}{2}$

判別式

（教科書 p.26）

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

は，b^2-4ac の符号によって，次の 3 つに分類することができる。

1. $b^2-4ac>0$ のとき，異なる 2 つの実数
2. $b^2-4ac=0$ のとき，ただ 1 つの実数
3. $b^2-4ac<0$ のとき，異なる 2 つの虚数

1と2の場合は，解は実数であるから（⑬ 実数解 ）といい，3の場合は（⑭ 虚数解 ）という。2 次方程式の異なる 2 つの虚数解は互いに共役な複素数である。また，2の場合は，2 つの解が重なったものと考え（⑮ 重解 ）という。

b^2-4ac を 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の（⑯ 判別式 ）といい，記号（⑰ D ）で表す。

すなわち

（⑱ $D=b^2-4ac$ ）

2 次方程式の解の判別
2 次方程式の判別式 D と解について，次のことが成り立つ。 1 $D>0$ ⇔ **異なる 2 つの実数解をもつ** 2 $D=0$ ⇔ **重解をもつ** 3 $D<0$ ⇔ **異なる 2 つの虚数解をもつ**

重解も実数解であるから

（⑲ $D\geqq 0$ ⇔ 実数解をもつ ）

$ax^2+2b'x+c=0$ の形の 2 次方程式では，$D=4(b'^2-ac)$ であるから，解の判別には

（⑳ $\boldsymbol{\frac{D}{4}=b'^2-ac}$ ）を用いてもよい。

例 8 (1) 2 次方程式 $5x^2-3x+4=0$ の判別式を D とすると

$D=(-3)^2-4\cdot5\cdot4=-71<0$

であるから，（ 異なる 2 つの虚数解 ）をもつ。

(2) 2 次方程式 $9x^2-6x+1=0$ の判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=(-3)^2-9\cdot1=0$

であるから，（ 重解 ）をもつ。

問 12 次の 2 次方程式の解を判別せよ。

(1) $2x^2-11x+10=0$

$D=(-11)^2-4\cdot2\cdot10=41>0$

であるから，異なる 2 つの実数解をもつ。

(2) $3x^2-6x+4=0$

$\frac{D}{4}=(-3)^2-3\cdot4=-3<0$

であるから，異なる 2 つの虚数解をもつ。

(3) $49x^2+28x+4=0$

$\frac{D}{4}=14^2-49\cdot4=0$

であるから，重解をもつ。

例題 3　k を定数とするとき，2 次方程式 $x^2+kx-k=0$ の解を判別せよ。

解　この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=k^2-4\cdot1\cdot(-k)=k^2+4k=k(k+4)$

よって，方程式の解は次のようになる。

$D>0$，すなわち $k<-4$，$0<k$ のとき　異なる 2 つの実数解

$D=0$，すなわち $k=-4$，0 のとき　重解

$D<0$，すなわち $-4<k<0$ のとき　異なる 2 つの虚数解

問 13　k を定数とするとき，2 次方程式 $x^2+(3k-1)x+2k^2-1=0$ の解を判別せよ。

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=(3k-1)^2-4\cdot1\cdot(2k^2-1)$

$=k^2-6k+5$

$=(k-1)(k-5)$

よって，方程式の解は次のようになる。

$D>0$　すなわち　$\boldsymbol{k<1}$，$\boldsymbol{5<k}$ のとき
異なる **2** つの実数解

$D=0$　すなわち　$\boldsymbol{k=1}$，$\boldsymbol{5}$ のとき
重解

$D<0$　すなわち　$\boldsymbol{1<k<5}$ のとき
異なる **2** つの虚数解

問 14　2 次方程式 $x^2+2kx+2k+3=0$ が重解をもつような定数 k の値を求めよ。また，そのときの重解を求めよ。

2 次方程式 $x^2+2kx+2k+3=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=k^2-1\cdot(2k+3)$

$=k^2-2k-3$

$=(k+1)(k-3)$

重解をもつ条件は $D=0$ であるから

$(k+1)(k-3)=0$

よって　$\boldsymbol{k=-1}$，$\boldsymbol{3}$

また，解の公式により，$D=0$ のとき重解は

$x=\dfrac{-k}{1}=-k$

であるから，

$\boldsymbol{k=-1}$ のとき　$\boldsymbol{x=-(-1)=1}$

$\boldsymbol{k=3}$ のとき　$\boldsymbol{x=-3}$

3 解と係数の関係

（教科書 p.28）

2 次方程式の解と係数の間には，次の関係が成り立つ。

2 次方程式の解と係数の関係
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると $$\boldsymbol{\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}}$$

例 9 2 次方程式 $3x^2-7x+6=0$ の 2 つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{-7}{3}=\frac{7}{3}$$

$$\alpha\beta=\frac{6}{3}=2$$

問 15 次の 2 次方程式の 2 つの解の和と積を求めよ。

(1) $2x^2+3x-4=0$

2 つの解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{2},\quad \alpha\beta=-2$$

よって　和 $-\frac{3}{2}$，**積 -2**

(2) $x^2-x+2=0$

2 つの解を α，β とすると

$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=2$

よって　**和 1，積 2**

例題 4 2 次方程式 $2x^2+8x+3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$ の値を求めよ。

解 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\frac{8}{2}=-4$，$\alpha\beta=\frac{3}{2}$ であるから

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-4)^2-2\cdot\frac{3}{2}=13$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-4)^3-3\cdot\frac{3}{2}\cdot(-4)=-46$$

問 16 2 次方程式 $x^2-4x+5=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

解と係数の関係より $\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=5$ であるから

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=4^2-2\cdot5=\mathbf{6}$

(2) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=4^2-4\cdot5=\mathbf{-4}$

(3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=4^3-3\cdot5\cdot4=\mathbf{4}$

(4) $$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\mathbf{\frac{6}{5}}$$

例題 5 2 次方程式 $8x^2-mx+1=0$ の 1 つの解が他の解の 2 倍となるように，定数 m の値を定めよ。

解 2 つの解を α，2α とおくと，解と係数の関係より

$\alpha+2\alpha=\frac{m}{8}$　……①

$\alpha\cdot2\alpha=\frac{1}{8}$　……②

②より　$\alpha^2=\frac{1}{16}$

よって　$\alpha=\pm\frac{1}{4}$

したがって，①より　$m=24\alpha=\pm6$

問 17 2 次方程式 $4x^2+mx+3=0$ の 1 つの解が他の解に 1 加えた数となるように，定数m の値を定めよ。

2 つの解を α，$\alpha+1$ とおくと，解と係数の関係より

$\alpha+(\alpha+1)=-\frac{m}{4}$ ……①

$\alpha\cdot(\alpha+1)=\frac{3}{4}$ ……②

②より　$4\alpha^2+4\alpha-3=0$

$(2\alpha-1)(2\alpha+3)=0$

よって　$\alpha=\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{2}$

したがって，①より

$m=-4(2\alpha+1)=\mathbf{-8}$，$\mathbf{8}$

2 次式の因数分解

（教科書 p.30）

2次式の因数分解
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α，β とすると $\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)}$

例題 6 次の 2 次式を，複素数の範囲で因数分解せよ。

（1）　x^2+2x-1　　　（2）　$2x^2-3x+2$

解 （1）$x^2+2x-1=0$ を解くと　$x=-1\pm\sqrt{2}$

したがって

$x^2+2x-1=\{x-(-1+\sqrt{2})\}\{x-(-1-\sqrt{2})\}$

$=(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

（2）$2x^2-3x+2=0$ を解くと　$x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{4}$

したがって

$$2x^2-3x+2=2\left(x-\frac{3+\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{7}i}{4}\right)$$

問 18 次の 2 次式を，複素数の範囲で因数分解せよ。

（1）　x^2-x-1

$x^2-x-1=0$ の解は　$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

よって

x^2-x-1

$$=\boldsymbol{\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

（2）　$3x^2-2x+1$

$3x^2-2x+1=0$ の解は　$x=\frac{1\pm\sqrt{2}i}{3}$

よって

$3x^2-2x+1$

$$=\boldsymbol{3\left(x-\frac{1+\sqrt{2}i}{3}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{2}i}{3}\right)}$$

（3）　x^2-5

$x^2-5=0$ の解は　$x=\pm\sqrt{5}$

よって　$x^2-5=\boldsymbol{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}$

（4）　x^2+4

$x^2+4=0$ の解は　$x=\pm2i$

よって　$x^2+4=\boldsymbol{(x-2i)(x+2i)}$

例 10 4 次式 x^4-4 の因数分解を考えてみよう。

$x^4-4=(x^2+2)(x^2-2)$　（有理数の範囲）

$=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$　（実数の範囲）

$=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$　（複素数の範囲）

問 19 4 次式 x^4-x^2-6 を，次の範囲で因数分解せよ。

(1) 有理数の範囲

$(x^2+2)(x^2-3)$

(2) 実数の範囲

$(x^2+2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

(3) 複素数の範囲

$(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

与えられた 2 数を解とする 2 次方程式

（教科書 p.31）

2数を解とする2次方程式

2 数 α，β を解とする 2 次方程式の 1 つは，$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$ とすると，次のように表される。

$$x^2-px+q=0$$

例 11 2 数 $3+\sqrt{2}i$，$3-\sqrt{2}i$ を解とする 2 次方程式を 1 つ求めてみよう。

$(3+\sqrt{2}i)+(3-\sqrt{2}i)=6$，　$(3+\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i)=11$

よって，この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2-6x+11=0$

問 20 次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

(1) 1，-2

$1+(-2)=-1$，$1\cdot(-2)=-2$ より

$x^2+x-2=0$

(2) $2+\sqrt{5}$，$2-\sqrt{5}$

$(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$

$(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=-1$ より

$x^2-4x-1=0$

(3) $-5+i$，$-5-i$

$(-5+i)+(-5-i)=-10$

$(-5+i)(-5-i)=26$ より

$x^2+10x+26=0$

例 12 和が 3，積が 4 となる 2 数を求めてみよう。

この 2 数を α，β とおくと

$\alpha+\beta=3$，　$\alpha\beta=4$

であるから，α，β は 2 次方程式

$x^2-3x+4=0$

の 2 つの解である。これを解くと

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$$

したがって，求める 2 数は （ $\frac{3+\sqrt{7}i}{2}$ ）と（ $\frac{3-\sqrt{7}i}{2}$ ）

問 21 和と積が次のようになる 2 数を求めよ。

(1) 和が 1，積が 1

2 数は 2 次方程式 $x^2-x+1=0$ の 2つの解であるから

$\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ と $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

(2) 和が -8，積が 11

2 数は 2 次方程式 $x^2+8x+11=0$の 2 つの解であるから

$-4+\sqrt{5}$ と $-4-\sqrt{5}$

応用例題 7
2 次方程式 $x^2-2x+7=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，$\alpha+2,\ \beta+2$ を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

解 解と係数の関係より　$\alpha+\beta=2,\quad \alpha\beta=7$
であるから

$$(\alpha+2)+(\beta+2)=(\alpha+\beta)+4$$
$$=2+4=6$$
$$(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$$
$$=7+2\cdot2+4=15$$

よって，$\alpha+2,\ \beta+2$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-6x+15=0$$

問 22 2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次の 2 数を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=3$$

(1)　$2\alpha-1,\ 2\beta-1$

$$(2\alpha-1)+(2\beta-1)=2(\alpha+\beta)-2$$
$$=2\cdot(-2)-2=-6$$
$$(2\alpha-1)(2\beta-1)=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1$$
$$=4\cdot3-2\cdot(-2)+1=17$$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2+6x+17=0}$$

(2)　$\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{3}$$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは

$$x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}=0$$

両辺に 3 を掛けて

$$\boldsymbol{3x^2+2x+1=0}$$

(3)　$\alpha^2,\ \beta^2$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot3=-2$$
$$\alpha^2\cdot\beta^2=(\alpha\beta)^2=3^2=9$$

よって，求める 2 次方程式の 1 つは

$$\boldsymbol{x^2+2x+9=0}$$

2 次方程式の実数解の符号

（教科書 p.33）

2 つの実数 $\alpha,\ \beta$ について，次のことが成り立つ。

$\boxed{1}$　$\alpha>0,\ \beta>0 \iff \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$
$\boxed{2}$　$\alpha<0,\ \beta<0 \iff \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$
$\boxed{3}$　$\alpha,\ \beta$ が異符号 $\iff \alpha\beta<0$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$より，実数解をもつ 2 次方程式について，次のことが成り立つ。

2次方程式の実数解の符号
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D，2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき，次のことが成り立つ。 $\boxed{1}$　$\alpha,\ \beta$ が**ともに正** $\iff$ $\boldsymbol{D\geqq0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0}$ $\boxed{2}$　$\alpha,\ \beta$ が**ともに負** $\iff$ $\boldsymbol{D\geqq0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0}$ $\boxed{3}$　$\alpha,\ \beta$ が**異符号** $\iff$ $\boldsymbol{\alpha\beta<0}$

応用例題 8

2 次方程式 $x^2-kx-k+3=0$ が異なる 2 つの正の解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

解 2 つの正の解を α, β とし，判別式を D とする。

$$D=(-k)^2-4(-k+3)$$
$$=k^2+4k-12$$
$$=(k+6)(k-2)$$

異なる 2 つの実数解をもつから，$D>0$ より

$k<-6,\quad 2<k$ ……①

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=k,\quad \alpha\beta=-k+3$

であり，α, β がともに正であるから

$\alpha+\beta>0,\quad \alpha\beta>0$

が成り立つ。

ゆえに

$k>0,\quad -k+3>0$

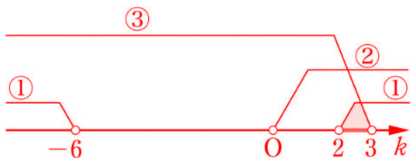
よって $k>0$ ……②

$k<3$ ……③

①，②，③より k の値の範囲は

$2<k<3$

である。



問 23 2 次方程式 $x^2+2(k+1)x-2k+6=0$ が，次の条件を満たすような定数 k の値の範囲を求めよ。

(1) 異なる 2 つの負の解をもつ

(2) 正の解と負の解をもつ

2 つの解を α，β，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-1\cdot(-2k+6)$$
$$=k^2+4k-5=(k+5)(k-1)$$

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-2(k+1)$，$\alpha\beta=-2k+6$

(1) $\frac{D}{4}>0$より $k<-5$，$1<k$ ……①

$\alpha+\beta<0$より $k>-1$ ……②

$\alpha\beta>0$より $k<3$ ……③

①，②，③より $\mathbf{1<k<3}$

(2) $\alpha\beta<0$ より $\mathbf{k>3}$

問 題

（教科書 p.35）

7 次の等式を満たす実数 a, b を求めよ。

$$(2+3i)a+(3-i)b=7+5i$$

$(2+3i)a+(3-i)b=7+5i$ より

$(2a+3b)+(3a-b)i=7+5i$

a, b は実数であるから

$$\begin{cases} 2a+3b=7 \\ 3a-b=5 \end{cases}$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=2,\ b=1}$

8 次の計算をして，結果を $a+bi$ の形で表せ。

(1) $\sqrt{-98}-\sqrt{-72}+\sqrt{-50}$

$=7\sqrt{2}i-6\sqrt{2}i+5\sqrt{2}i$

$=\boldsymbol{6\sqrt{2}i}$

(2) $(5-2i)^2$

$=25-20i+4i^2$

$=\boldsymbol{21-20i}$

(3) $\dfrac{2+i}{2-i}+\dfrac{2-i}{2+i}$

$=\dfrac{(2+i)^2+(2-i)^2}{(2-i)(2+i)}$

$=\dfrac{(3+4i)+(3-4i)}{5}=\boldsymbol{\dfrac{6}{5}}$

(4) $\dfrac{(2-i)^2}{2+3i}$

$=\dfrac{3-4i}{2+3i}$

$=\dfrac{(3-4i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$

$=\dfrac{-6-17i}{13}=\boldsymbol{-\dfrac{6}{13}-\dfrac{17}{13}i}$

9 α, β を複素数とするとき，次のことを示せ。

(1) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$（a，b，c，d は実数）とおくと

$\overline{\alpha+\beta}=\overline{(a+bi)+(c+di)}$

$=\overline{(a+c)+(b+d)i}$

$=(a+c)-(b+d)i$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=(a-bi)+(c-di)$

$=(a+c)-(b+d)i$

よって　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

(2) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\overline{\beta}$

$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$（a，b，c，d は実数）とおくと

$\overline{\alpha\beta}=\overline{(a+bi)\cdot(c+di)}$

$=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$

$=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\overline{\alpha}\overline{\beta}=(a-bi)(c-di)$

$=(ac-bd)-(ad+bc)i$

よって　$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\overline{\beta}$

（参考） (1) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$，(2) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\overline{\beta}$ の他に

(3) a が実数のとき　$\overline{a\alpha}=a\overline{\alpha}$

(2) において，$\beta=\alpha$ とすると

(2)′ $\overline{\alpha^2}=\overline{\alpha}\,\overline{\alpha}$

一般に　$\overline{\alpha^n}=\underbrace{\overline{\alpha}\,\overline{\alpha}\cdots\overline{\alpha}}_{n個}=(\overline{\alpha})^n$

が成り立つ。

これを用いると，教科書 p.42 の「係数が実数である高次方程式が虚数解 α をもつならば，それと共役な $\overline{\alpha}$ もこの方程式の解である」ことを証明することができる。

3 次方程式について証明してみよう。

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ が虚数解 α を解にもつとすると

$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$

複素数 z が $z=0$ のとき，$\overline{z}=0$ であるから

$\overline{a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d}=0$

(1) の性質を用いて

$\overline{a\alpha^3}+\overline{b\alpha^2}+\overline{c\alpha}+\overline{d}=0$

(3) の性質を用いて

$a\overline{\alpha^3}+b\overline{\alpha^2}+c\overline{\alpha}+d=0$

(2)′ の性質を用いて

$a\overline{\alpha}\,\overline{\alpha}\,\overline{\alpha}+b\overline{\alpha}\,\overline{\alpha}+c\overline{\alpha}+d=0$

すなわち

$a(\overline{\alpha})^3+b(\overline{\alpha})^2+c\overline{\alpha}+d=0$

これは α と共役な虚数 $\overline{\alpha}$ が

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解であることを示している。

１０ 次のそれぞれの場合について $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ が成り立つかどうかを調べよ。

(1) $a=3,\ b=-12$

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}i=6i$

$\sqrt{ab}=\sqrt{-36}=6i$

よって　$\boldsymbol{\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}}$

また　$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}i}=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{-\frac{1}{4}}=\frac{i}{2}$$

よって　$\boldsymbol{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\neq\sqrt{\frac{a}{b}}}$

(2) $a=-2,\ b=-5$

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{5}i=-\sqrt{10}$

$\sqrt{ab}=\sqrt{10}$

よって　$\boldsymbol{\sqrt{a}\sqrt{b}\neq\sqrt{ab}}$

また　$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}i}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

よって　$\boldsymbol{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}}$

１１ 次の２次方程式を解け。

(1) $\sqrt{2}x^2-3x+2\sqrt{2}=0$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2\sqrt{2}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{14}i}{4}}$$

(2) $(x-5)^2+(x+2)^2=(x+3)^2$

$(x^2-10x+25)+(x^2+4x+4)=x^2+6x+9$

整理して　$x^2-12x+20=0$

$(x-2)(x-10)=0$

ゆえに　$\boldsymbol{x=2,\ 10}$

１２ ２次方程式 $2x^2-2kx+k^2-3k-8=0$ が虚数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

判別式を D とすると，虚数解をもつ条件は

$D<0$ である。

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-3k-8)$$

$$=-k^2+6k+16=-(k+2)(k-8)$$

よって　$-(k+2)(k-8)<0$

$(k+2)(k-8)>0$

ゆえに　$\boldsymbol{k<-2,\ 8<k}$

１３　2 次方程式 $2x^2-4x+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=\frac{1}{2}$

（1）$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$

$=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

$=2^2-\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha-2}+\dfrac{\alpha}{\beta-2}$

$=\dfrac{\beta(\beta-2)+\alpha(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\beta-2)}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4}$

$=\dfrac{2^2-2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot2}{\frac{1}{2}-2\cdot2+4}=\boldsymbol{-2}$

(3) $\alpha^4+\beta^4$

$=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

$=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-2(\alpha\beta)^2$

$=\left(2^2-2\cdot\dfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{17}{2}}$

１４　2 次方程式 $x^2+mx+1=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の問に答えよ。

（1）$\alpha-3$，$\beta-3$ を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-m$，$\alpha\beta=1$

よって

$(\alpha-3)+(\beta-3)=(\alpha+\beta)-6$

$=-m-6$

$(\alpha-3)(\beta-3)=\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9$

$=3m+10$

したがって，$\alpha-3$，$\beta-3$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$\boldsymbol{x^2+(m+6)x+3m+10=0}$

(2) α，β がともに 3 より小さくなるような定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)で求めた 2 次方程式の 2 つの解をα'，β'，

すなわち

$\alpha'=\alpha-3$，$\beta'=\beta-3$

とおくと，α，β がともに 3 より小さくなるためには，α'，β' がともに負の実数であればよいから，2 次方程式 $x^2+(m+6)x+3m+10=0$ の判別式を D とすると

$D\geqq0$

$\alpha'+\beta'<0$

$\alpha'\beta'>0$

となればよい。

$D=(m+6)^2-4(3m+10)$

$=m^2-4\geqq0$

よって　$m\leqq-2$，$2\leqq m$　……①

$\alpha'+\beta'=-(m+6)<0$ より

$m>-6$　……②

$\alpha'\beta'=3m+10>0$ より

$m>-\frac{10}{3}$　……③

①，②，③より

$\boldsymbol{-\dfrac{10}{3}<m\leqq-2,\ 2\leqq m}$