小テスト	No.1　方程式・式と証明　整式の乗法と因数分解

	年	組	番	名前	／20

1.　次の式を展開せよ。

(1)　$(x+2)^3$

(2)　$(5x-3y)^3$

(3)　$(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$

2.　次の式を因数分解せよ。

(1)　x^3+27

(2)　$8x^3-125y^3$

(3)　$64x^6-1$

小テスト	No.2　方程式・式と証明　二項定理				
	年	組	番	名前	／20

1. 二項定理を用いて，$(2x-y)^5$ を展開せよ。

2. $(3x^2-2)^6$ において x^8 の係数を求めよ。

3. $(2x-y+z)^5$ の展開式における x^2y^2z の係数を求めよ。

小テスト	No.3　方程式・式と証明　整式の除法

年	組	番	名前	／20

1. 次の整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

$A=x^3+x+3$，　　$B=x^2+2x-1$

2. 次の問に答えよ。

(1) ある整式 A を $3x^2+x-2$ で割ると，商が $x+1$，余りが $2x-1$ である。このとき，整式 A を求めよ。

(2) 整式 $4x^3-8x^2+1$ をある整式 B で割ると，商が $2x-3$，余りが $-5x+4$ である。このとき，整式 B を求めよ。

3. $A=2x^3-11x^2y+8xy^2+6y^3$，$B=2x-3y$ を x についての整式と考えて，整式 A を整式 B で割り，商と余りを求めよ。

小テスト	No.4　方程式・式と証明　分数式とその計算				
	年	組	番	名前	／20

1. 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x^2-9}{x^2-x-2}\div\dfrac{x^3+27}{x^2-5x+6}\times\dfrac{x+1}{x^2-6x+9}$

(2) $\dfrac{x+8}{x^2+x-2}-\dfrac{x+4}{x^2+3x+2}$

(3) $\dfrac{1+\dfrac{4}{x-2}}{1-\dfrac{8}{x-2}}$

小テスト	No.5　方程式・式と証明　複素数とその演算				
年	組	番	名前		／20

1.　次の計算をせよ。

(1)　$(3+4i)(4-3i)$

(2)　$\dfrac{5}{3+4i}$

(3)　$\dfrac{1+i}{1-i}$

(4)　i^5

(5)　$\sqrt{-27}\times\sqrt{-3}$

2.　次の式を満たす実数 x，y を求めよ。

$$(x+2y)+(x-y)i=3i$$

小テスト	No.6　方程式・式と証明　解の公式				
	年	組	番	名前	／20

1. 解の公式を用いて，2 次方程式 $3x^2-6x+4=0$ を解け。

2. 2 次方程式 $5x^2-x+1=0$ の解を判別せよ。

3. k を定数とするとき，2 次方程式 $x^2-kx+2k=0$ の解を判別せよ。

4. 2 次方程式 $x^2-2kx+9=0$ が重解をもつような定数 k の値を求めよ。

小テスト	No.7　方程式・式と証明　解と係数の関係（1）				
	年	組	番	名前	／20

1.　2次方程式 $2x^2+x+2=0$ の2つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha+\beta$

(2)　$\alpha\beta$

(3)　$\alpha^2+\beta^2$

(4)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

(5)　$\alpha^3+\beta^3$

2.　2次方程式 $x^2-mx+m-1=0$ の1つの解が他の解の2倍となるように，定数 m の値を定め，2つの解を求めよ。

小テスト	No.8　方程式・式と証明　解と係数の関係（2）				
	年	組	番	名前	／20

1. 次の 2 次式を複素数の範囲で因数分解せよ。

$2x^2-x+1$

2. 4 次式 x^4-2x^2-3 を，次の範囲で因数分解せよ。

(1)　有理数の範囲

(2)　実数の範囲

(3)　複素数の範囲

3. 和が 2，積が 3 となる 2 数を求めよ。

4. 2 次方程式 $x^2-2x-1=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，$\alpha+3$, $\beta+3$ を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ。

小テスト	No.9　方程式・式と証明　解と係数の関係（3）				
	年	組	番	名前	／20

1.　2 次方程式 $x^2-2(k+1)x+k+3=0$ が，次の条件を満たすような定数 k の値の範囲を求めよ。

(1)　異なる 2 つの正の解をもつ。

(2)　正の解と負の解をもつ。

小テスト	No.10　方程式・式と証明　高次方程式（1）				
年	組	番	名前		／20

1. 次の第 1 式を第 2 式で割ったときの余りを求めよ。

x^3+3x-1，　　$x+1$

2. 整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると 2 余り，$x+3$ で割ると -6 余る。このとき，$P(x)$ を x^2+2x-3 で割ったときの余りを求めよ。

3. x^3-2x^2-4x+a が $x+3$ を因数にもつように，定数 a の値を定めよ。

4. x^3-3x^2+4 を因数分解せよ。

小テスト	No.11　方程式・式と証明　高次方程式（2）				
	年	組	番	名前	／20

1.　次の方程式を解け。

(1)　$x^3=-8$

(2)　$x^4+x^2-2=0$

(3)　$x^3-x-6=0$

(4)　$x^4-5x^3+x^2+21x-18=0$

小テスト	No.12　方程式・式と証明　高次方程式（3）

年	組	番	名前	／20

1. 方程式 $x^3-3x^2+ax+b=0$ が 1 と 2 を解にもつとき，実数 a，b の値と他の解を求めよ。

2. $x=1-i$ が方程式 $x^3+ax^2+b=0$ の解であるとき, 実数 a , b の値と他の解を求めよ。

小テスト	No.13　方程式・式と証明　恒等式（1）				
	年	組	番	名前	／20

1. 次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$a(x+1)^2+b(x+1)(x-1)+c(x-1)^2=8x-4$

(2)　$3(x^2-3)=a(x-1)(x+1)+b(x+1)(x-2)+c(x-1)(x-2)$

(3)　$\dfrac{9x+11}{x^2+3x-4}=\dfrac{a}{x+4}+\dfrac{b}{x-1}$

小テスト	No.14　方程式・式と証明　恒等式（2）				
	年	組	番	名前	／20

1. 等式 $(a^2+1)(b^2+1)=(ab-1)^2+(a+b)^2$ を証明せよ。

2. $x+y=1$ のとき，等式 $x^2+y^2=1-2xy$ を証明せよ。

3. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{ad+bc}{2bd}$ を証明せよ。

小テスト	No.15　方程式・式と証明　不等式の証明（1）				
	年	組	番	名前	／20

1. $a>2$，$b>1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$ab+2>a+2b$

2. 不等式 $5(2x^2+3y^2)\geqq 6(x+y)^2$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

3. 不等式 $a^2+3b^2\geqq 3ab$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

小テスト	No.16　方程式・式と証明　不等式の証明（2）

年	組	番	名前	／20

1. $a>0$ のとき，不等式 $4a+\dfrac{1}{a}\geqq 4$ を証明せよ。

また，等号が成り立つのはどのようなときか。

2. $a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\geqq 9$ を証明せよ。

また，等号が成り立つのはどのようなときか。

小テスト	No.17　方程式・式と証明　不等式の証明（3）				
年	組	番	名前		／20

1. $a \geqq 1$ のとき，不等式 $\sqrt{a-1} \geqq \sqrt{a}-1$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

2. 不等式 $|a|+1 \geqq |a+1|$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$\boxed{\text{小テスト解答}}$　No.1　方程式・式と証明　整式の乗法と因数分解

1. (1) $(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$

$=x^3+6x^2+12x+8$

(3 点)

(2) $(5x-3y)^3=(5x)^3-3\cdot(5x)^2\cdot 3y+3\cdot 5x\cdot(3y)^2-(3y)^3$

$=125x^3-225x^2y+135xy^2-27y^3$

(3 点)

(3) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)=(2x+y)\{(2x)^2-2x\cdot y+y^2\}$

$=(2x)^3+y^3$

$=8x^3+y^3$

(3 点)

2. (1) $x^3+27=x^3+3^3$

$=(x+3)(x^2-3x+9)$

(3 点)

(2) $8x^3-125y^3=(2x)^3-(5y)^3$

$=(2x-5y)(4x^2+10xy+25y^2)$

(4 点)

(3) $64x^6-1=(8x^3)^2-1^2$

$=(8x^3+1)(8x^3-1)$

$=\{(2x)^3+1^3\}\{(2x)^3-1^3\}$

$=(2x+1)(4x^2-2x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)$

$=(2x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)(4x^2-2x+1)$

(4 点)

$\boxed{\text{小テスト解答}}$　No.2　方程式・式と証明　二項定理

1. $(2x-y)^5$

$={}_5C_0(2x)^5+{}_5C_1(2x)^4(-y)^1+{}_5C_2(2x)^3(-y)^2+{}_5C_3(2x)^2(-y)^3+{}_5C_4(2x)^1(-y)^4+{}_5C_5(-y)^5$

$=32x^5-80x^4y+80x^3y^2-40x^2y^3+10xy^4-y^5$

(6 点)

2. $(3x^2-2)^6$ の展開式における一般項は

$${}_6C_r(3x^2)^{6-r}(-2)^r={}_6C_r3^{6-r}(x^2)^{6-r}(-2)^r$$
$$={}_6C_r3^{6-r}x^{2(6-r)}(-2)^r$$
$$={}_6C_r3^{6-r}(-2)^rx^{12-2r}$$

ここで，$12-2r=8$ となるのは，$r=2$ のときであるから，x^8 の係数は

$${}_6C_2\,3^{6-2}(-2)^2=15\cdot3^4\cdot(-2)^2$$
$$=4860$$

(6 点)

3. $\{(2x-y)+z\}^5$ の展開式の一般項は

$${}_5C_r(2x-y)^{5-r}z^r$$

z の次数に着目すると，x^2y^2z が現れるのは　$r=1$ のときだけで

$${}_5C_1(2x-y)^4z$$

$(2x-y)^4$ を展開したときの x^2y^2 の係数は ${}_4C_22^2\cdot(-1)^2$ であるから，x^2y^2z の係数は

$${}_5C_1\times{}_4C_2\times2^2\times(-1)^2=120$$

(別解)

$\{(2x-y)+z\}^5$ における x^2y^2z の項は

$$\frac{5!}{2!2!1!}(2x)^2(-y)^2z$$

であるから，x^2y^2z の係数は

$$\frac{5!}{2!2!1!}\cdot2^2\cdot(-1)^2=120$$

(8 点)

$\boxed{\text{小テスト解答}}$　No.3　方程式・式と証明　整式の除法

1.

$$
\begin{array}{r}
x-2 \\
x^2+2x-1 \overline{) x^3 + x + 3} \\
\underline{x^3+2x^2-x} \\
-2x^2+2x+3 \\
\underline{-2x^2-4x+2} \\
6x+1
\end{array}
$$

商 $x-2$,　　余り $6x+1$

(5 点)

2. (1)　整式 $B=3x^2+x-2$，商 $Q=x+1$，余り $R=2x-1$ とすると,

$$A=BQ+R$$

よって

$$
\begin{aligned}
A&=(3x^2+x-2)(x+1)+(2x-1)\\
&=3x^3+3x^2+x^2+x-2x-2+2x-1\\
&=3x^3+4x^2+x-3
\end{aligned}
$$

(5 点)

(2)　$4x^3-8x^2+1=B(2x-3)+(-5x+4)$ が成り立つから

$$
\begin{aligned}
B(2x-3)&=(4x^3-8x^2+1)-(-5x+4)\\
&=4x^3-8x^2+5x-3
\end{aligned}
$$

よって，$4x^3-8x^2+5x-3$ を $2x-3$ で割って

$$B=2x^2-x+1$$

$$
\begin{array}{r}
2x^2-x+1 \\
2x-3 \overline{) 4x^3-8x^2+5x-3} \\
\underline{4x^3-6x^2} \\
-2x^2+5x \\
\underline{-2x^2+3x} \\
2x-3 \\
\underline{2x-3} \\
0
\end{array}
$$

(5 点)

3.

$$
\begin{array}{r}
x^2-4xy-2y^2 \\
2x-3y \overline{) 2x^3-11x^2y+8xy^2+6y^3} \\
\underline{2x^3-3x^2y} \\
-8x^2y+8xy^2 \\
\underline{-8x^2y+12xy^2} \\
-4xy^2+6y^3 \\
\underline{-4xy^2+6y^3} \\
0
\end{array}
$$

商 $x^2-4xy-2y^2$,　　余り　0

(5 点)

$\boxed{\text{小テスト解答}}$　No.4　方程式・式と証明　分数式とその計算

1. (1)
$$\frac{x^2-9}{x^2-x-2} \div \frac{x^3+27}{x^2-5x+6} \times \frac{x+1}{x^2-6x+9}$$
$$=\frac{x^2-9}{x^2-x-2} \times \frac{x^2-5x+6}{x^3+27} \times \frac{x+1}{x^2-6x+9}$$
$$=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x+1)} \times \frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x^2-3x+9)} \times \frac{x+1}{(x-3)^2}$$
$$=\frac{1}{x^2-3x+9}$$

(7 点)

(2)
$$\frac{x+8}{x^2+x-2} - \frac{x+4}{x^2+3x+2} = \frac{x+8}{(x+2)(x-1)} - \frac{x+4}{(x+1)(x+2)}$$
$$=\frac{(x+8)(x+1)}{(x+2)(x-1)(x+1)} - \frac{(x+4)(x-1)}{(x+1)(x+2)(x-1)}$$
$$=\frac{(x^2+9x+8)-(x^2+3x-4)}{(x+2)(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{6x+12}{(x+2)(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{6(x+2)}{(x+2)(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{6}{(x-1)(x+1)}$$

(7 点)

(3) $\dfrac{1+\dfrac{4}{x-2}}{1-\dfrac{8}{x-2}}$ は $\left(1+\dfrac{4}{x-2}\right) \div \left(1-\dfrac{8}{x-2}\right)$ であるから

$$\left(1+\frac{4}{x-2}\right) \div \left(1-\frac{8}{x-2}\right) = \frac{x+2}{x-2} \div \frac{x-10}{x-2}$$
$$=\frac{x+2}{x-2} \times \frac{x-2}{x-10}$$
$$=\frac{x+2}{x-10}$$

(別解)

$$\frac{1+\dfrac{4}{x-2}}{1-\dfrac{8}{x-2}} = \frac{\left(1+\dfrac{4}{x-2}\right) \times (x-2)}{\left(1-\dfrac{8}{x-2}\right) \times (x-2)}$$
$$=\frac{x-2+4}{x-2-8}$$
$$=\frac{x+2}{x-10}$$

(6 点)

$\boxed{\text{小テスト解答}}$　No.5　方程式・式と証明　複素数とその演算

1. (1)
$$\begin{aligned}(3+4i)(4-3i)&=12-9i+16i-12i^2\\&=12+7i-12\cdot(-1)\\&=24+7i\end{aligned}$$

(3 点)

(2)
$$\begin{aligned}\frac{5}{3+4i}&=\frac{5(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}\\&=\frac{15-20i}{9-16i^2}\\&=\frac{15-20i}{9+16}\\&=\frac{15-20i}{25}\\&=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\end{aligned}$$

(3 点)

(3)
$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i}&=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\\&=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\\&=\frac{2i}{2}\\&=i\end{aligned}$$

(3 点)

(4) $i^5=(i^2)^2\cdot i=(-1)^2\cdot i=i$

(3 点)

(5)
$$\begin{aligned}\sqrt{-27}\times\sqrt{-3}&=\sqrt{27}\,i\times\sqrt{3}\,i\\&=\sqrt{27}\times\sqrt{3}\times i^2\\&=-9\end{aligned}$$

(3 点)

2. $(x+2y)+(x-y)i=3i$

x，y が実数であるから，$x+2y$，$x-y$ も実数である。

したがって　$\begin{cases}x+2y=0\\x-y=3\end{cases}$

これを解いて　$x=2$，$y=-1$

(5 点)

$\boxed{\text{小テスト解答}}$　No.6　方程式・式と証明　解の公式

1.　2 次方程式 $3x^2-6x+4=0$ の解は

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-3\cdot 4}}{3}=\frac{3\pm\sqrt{-3}}{3}=\frac{3\pm\sqrt{3}\,i}{3}$$

(4 点)

2.　2 次方程式 $5x^2-x+1=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-1)^2-4\cdot 5\cdot 1=-19<0$$

であるから，異なる 2 つの虚数解をもつ。

(5 点)

3.　2 次方程式 $x^2-kx+2k=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-k)^2-4\cdot 1\cdot 2k=k^2-8k=k(k-8)$$

よって，方程式の解は次のようになる。

$D>0$，すなわち $k<0$，$8<k$ のとき　異なる 2 つの実数解

$D=0$，すなわち $k=0$，8 のとき　重解

$D<0$，すなわち $0<k<8$ のとき　異なる 2 つの虚数解

(6 点)

4.　2 次方程式 $x^2-2kx+9=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\cdot 9=0$$

のとき，この 2 次方程式は重解をもつ。

よって　$k=\pm 3$

(5 点)

$\boxed{\text{小テスト解答}}$　No.7　方程式・式と証明　解と係数の関係(1)

1. (1)　$\alpha+\beta=-\dfrac{1}{2}$

(3 点)

(2)　$\alpha\beta=\dfrac{2}{2}=1$

(3 点)

(3)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot1=-\dfrac{7}{4}$

(3 点)

(4)　$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}}{1}=-\dfrac{1}{2}$

(3 点)

(5)　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3-3\cdot1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{11}{8}$

(3 点)

2. 2つの解をα，2αとおくと，解と係数の関係より

$\alpha+2\alpha=m$　……①

$\alpha\cdot2\alpha=m-1$　……②

①より　$\alpha=\dfrac{m}{3}$　……③

③を②に代入して　$2\left(\dfrac{m}{3}\right)^2=m-1$

$2m^2-9m+9=0$

よって　$m=\dfrac{3}{2}$，3　……$\boxed{\text{答}}$

$m=\dfrac{3}{2}$のとき，③より　$\alpha=\dfrac{1}{2}$　また，　$2\alpha=1$

したがって，2つの解は　$\dfrac{1}{2}$，1　……$\boxed{\text{答}}$

$m=3$のとき，③より　$\alpha=1$　また，　$2\alpha=2$

したがって，2つの解は　1，2　……$\boxed{\text{答}}$

(5 点)

小テスト解答　No.8　方程式・式と証明　解と係数の関係(2)

1. $2x^2-x+1=0$ を解くと　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{4}$

したがって　$2x^2-x+1=2\left(x-\dfrac{1+\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{7}i}{4}\right)$

(4 点)

2. (1)　$x^4-2x^2-3=(x^2+1)(x^2-3)$

(2 点)

(2)　$x^4-2x^2-3=(x^2+1)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$

(2 点)

(3)　$x^4-2x^2-3=(x+i)(x-i)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$

(2 点)

3. この 2 数を α，β とおくと

$\alpha+\beta=2$，$\alpha\beta=3$

であるから，α，β は 2 次方程式

$x^2-2x+3=0$

の 2 つの解である。これを解くと

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot 3}}{1}=1\pm\sqrt{2}i$$

したがって，求める 2 数は　$1+\sqrt{2}i$　と　$1-\sqrt{2}i$

(5 点)

4. $x^2-2x-1=0$ において，解と係数の関係より　$\alpha+\beta=2,$　$\alpha\beta=-1$

であるから

$(\alpha+3)+(\beta+3)=(\alpha+\beta)+6=2+6=8$

$(\alpha+3)(\beta+3)=\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9=-1+3\cdot 2+9=14$

よって，$\alpha+3$，$\beta+3$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2-8x+14=0$

(5 点)

小テスト解答　No.9　方程式・式と証明　解と係数の関係(3)

1.　2次方程式 $x^2-2(k+1)x+k+3=0$ の2つの解を α，β とし，判別式を D とする。

(1)　$\dfrac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-1\cdot(k+3)$

$=k^2+k-2$

$=(k+2)(k-1)$

異なる2つの実数解をもつから，$\dfrac{D}{4}>0$ より，

$k<-2,\qquad 1<k\qquad\cdots\cdots①$

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=2(k+1),\qquad \alpha\beta=k+3$

であり，α，β がともに正であるから，

$\alpha+\beta>0,\qquad \alpha\beta>0$

が成り立つ。

ゆえに

$2(k+1)>0,\qquad k+3>0$

よって

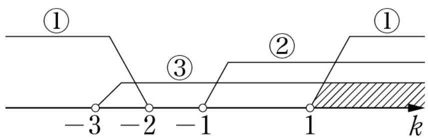
$k>-1\qquad\cdots\cdots②$

$k>-3\qquad\cdots\cdots③$

①，②，③より k の値の範囲は

$k>1$

である。



(15点)

(2)　正の解と負の解をもつから，$\alpha\beta<0$ より

$k+3<0$

ゆえに

$k<-3\qquad\cdots\cdots④$

①，④より k の値の範囲は

$k<-3$

である。

(5点)

小テスト解答　No.10　方程式・式と証明　高次方程式(1)

1. $P(x)=x^3+3x-1$ を $x+1$ で割った余りは

$$P(-1)=(-1)^3+3\cdot(-1)-1=-5$$

(4 点)

2. $P(x)$ を x^2+2x-3 で割ったときの商を $Q(x)$ とする。

2 次式で割ったときの余りは 1 次以下の整式であるから，それを $ax+b$ とおくと

$x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$ であるから

$$P(x)=(x-1)(x+3)Q(x)+ax+b \qquad \cdots\cdots ①$$

このとき，剰余の定理により

$$P(1)=2\,, \qquad P(-3)=-6 \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②より　$a+b=2$，　$-3a+b=-6$

これを解くと　$a=2$，$b=0$

よって，求める余りは　$2x$

(5 点)

3. $P(x)=x^3-2x^2-4x+a$ とおく。

整式 $P(x)$ が $x+3$ を因数にもつ　$\Longleftrightarrow$　$P(-3)=0$ であるから

$$(-3)^3-2\cdot(-3)^2-4\cdot(-3)+a=0$$

よって　$a=33$

(5 点)

4. $P(x)=x^3-3x^2+4$ とおく。

$$\begin{aligned}P(2)&=2^3-3\cdot2^2+4\\&=0\end{aligned}$$

であるから，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

そこで，右のように割り算を行うと

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-2)(x^2-x-2)\\&=(x-2)(x+1)(x-2)\\&=(x+1)(x-2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr}
 & x^2-x-2 \\ \cline{2-2}
x-2\big) & x^3-3x^2\qquad+4 \\
 & x^3-2x^2\qquad\quad \\ \cline{2-2}
 & -x^2\qquad\quad \\
 & -x^2+2x \\ \cline{2-2}
 & -2x+4 \\
 & -2x+4 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

(6 点)

$\boxed{\text{小テスト解答}}$　No.11　方程式・式と証明　高次方程式(2)

1. (1)　-8 を左辺に移項すると　$x^3+8=0$

左辺を因数分解すると　$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

よって　$x+2=0$　または　$x^2-2x+4=0$

ゆえに　$x=-2,\ 1\pm\sqrt{3}i$

(5 点)

(2)　$(x^2)^2+x^2-2=0$ とみて，左辺を因数分解すると

$(x^2-1)(x^2+2)=0$

よって　$x^2=1$　または　$x^2=-2$

ゆえに　$x=\pm1,\ \pm\sqrt{2}i$

(5 点)

(3)　$P(x)=x^3-x-6$ とおく。

$P(2)=2^3-2-6=0$

であるから，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ。

$P(x)=(x-2)(x^2+2x+3)$

よって　$(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$x-2=0$　または　$x^2+2x+3=0$

ゆえに　$x=2,\ -1\pm\sqrt{2}i$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+3 \\
\hline
x-2 & x^3\qquad\quad -x-6 \\
 & x^3-2x^2 \\
\hline
 & \quad 2x^2-x \\
 & \quad 2x^2-4x \\
\hline
 & \qquad 3x-6 \\
 & \qquad 3x-6 \\
\hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

(5 点)

(4)　$P(x)=x^4-5x^3+x^2+21x-18$ とおく。

$P(1)=1^4-5\cdot1^3+1^2+21\cdot1-18=0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

$P(x)=(x-1)(x^3-4x^2-3x+18)$

ここで，$Q(x)=x^3-4x^2-3x+18$ とおくと

$Q(-2)=(-2)^3-4\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+18=0$

よって，$Q(x)$ は $x+2$ を因数にもつ。

$Q(x)=(x+2)(x^2-6x+9)$

このとき　$P(x)=(x-1)(x+2)(x^2-6x+9)$

$=(x-1)(x+2)(x-3)^2$

よって　$(x-1)(x-3)^2(x+2)=0$

$x-1=0$　または　$(x-3)^2=0$　または　$x+2=0$

ゆえに　$x=1,\ 3,\ -2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3-4x^2-3x+18 \\
\hline
x-1 & x^4-5x^3+x^2+21x-18 \\
 & x^4-x^3 \\
\hline
 & \quad -4x^3+x^2 \\
 & \quad -4x^3+4x^2 \\
\hline
 & \qquad -3x^2+21x \\
 & \qquad -3x^2+3x \\
\hline
 & \qquad\quad 18x-18 \\
 & \qquad\quad 18x-18 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-6x+9 \\
\hline
x+2 & x^3-4x^2-3x+18 \\
 & x^3+2x^2 \\
\hline
 & \quad -6x^2-3x \\
 & \quad -6x^2-12x \\
\hline
 & \qquad 9x+18 \\
 & \qquad 9x+18 \\
\hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

(5 点)

$\boxed{\text{小テスト解答}}$　No.12　方程式・式と証明　高次方程式(3)

1. $x^3-3x^2+ax+b=0$

$x=1$ が方程式の解であるから　　$a+b-2=0$　　……①

$x=2$ が解であるから　　$2a+b-4=0$　　……②

①，②を解くと　　$a=2$，$b=0$　……$\boxed{\text{答}}$

このとき，もとの方程式は

$$x^3-3x^2+2x=0$$

左辺を因数分解すると

$$x(x^2-3x+2)=0$$

$$x(x-1)(x-2)=0$$

ゆえに

$$x=0,\ 1,\ 2$$

よって，他の解は　　$x=0$　……$\boxed{\text{答}}$

(10 点)

2. $x=1-i$ が方程式の解であるから

$$(1-i)^3+a(1-i)^2+b=0$$

すなわち

$$-2-2i-2ai+b=0$$

整理すると

$$(b-2)-2(a+1)i=0$$

a，b は実数であるから，$b-2$，$a+1$ も実数である。

よって

$$b-2=0,\ a+1=0$$

これを解くと　　$a=-1$，$b=2$　……$\boxed{\text{答}}$

このとき，もとの方程式は

$$x^3-x^2+2=0$$

左辺を因数分解すると

$$(x+1)(x^2-2x+2)=0$$

ゆえに

$$x=-1,\ 1\pm i$$

よって，他の解は　　$x=-1$，$1+i$　……$\boxed{\text{答}}$

(10 点)

$\boxed{\text{小テスト解答}}$　No.13　方程式・式と証明　恒等式(1)

1. (1)　$a(x+1)^2+b(x+1)(x-1)+c(x-1)^2=8x-4$

等式の左辺を整理すると

$$(a+b+c)x^2+2(a-c)x+a-b+c=8x-4$$

この等式が恒等式となるためには

$a+b+c=0$　　……①

$2(a-c)=8$　　……②

$a-b+c=-4$　　……③

①，②，③を連立して a，b，c の値を求めると

$$a=1,\ b=2,\ c=-3$$

(7 点)

(2)　$3(x^2-3)=a(x-1)(x+1)+b(x+1)(x-2)+c(x-1)(x-2)$

等式の両辺に $x=2$，$x=1$，$x=-1$ をそれぞれ代入すると

$$3=3a,\quad -6=-2b,\quad -6=6c$$

よって

$$a=1,\ b=3,\ c=-1$$

逆にこのとき，(左辺)＝(右辺)となるから，x についての恒等式となる。

以上より　$a=1$，$b=3$，$c=-1$

(7 点)

(3)　$\dfrac{9x+11}{x^2+3x-4}=\dfrac{a}{x+4}+\dfrac{b}{x-1}$

$x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$ であるから，両辺に $(x+4)(x-1)$ を掛けると

$$9x+11=a(x-1)+b(x+4)$$

右辺を整理すると

$$9x+11=(a+b)x+(-a+4b)$$

この等式が恒等式となるためには

$$a+b=9,\quad -a+4b=11$$

これを解いて

$$a=5,\ b=4$$

(6 点)

$\boxed{\text{小テスト解答}}$　No.14　方程式・式と証明　恒等式(2)

1. 両辺をそれぞれ変形すると

$$(a^2+1)(b^2+1)=a^2b^2+a^2+b^2+1$$

$$(ab-1)^2+(a+b)^2=(a^2b^2-2ab+1)+(a^2+2ab+b^2)$$

$$=a^2b^2+a^2+b^2+1$$

ゆえに

$$(a^2+1)(b^2+1)=(ab-1)^2+(a+b)^2$$

(6 点)

2. $x+y=1$ という条件から

$$y=1-x$$

これを用いて，証明する等式の両辺を x で表すと

$$x^2+y^2=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1$$

$$1-2xy=1-2x(1-x)=2x^2-2x+1$$

ゆえに

$$x^2+y^2=1-2xy$$

(7 点)

3. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと

$$a=bk,\ c=dk$$

よって

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$$

$$\frac{ad+bc}{2bd}=\frac{bdk+bdk}{2bd}=\frac{2bdk}{2bd}=k$$

ゆえに

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{ad+bc}{2bd}$$

(7 点)

$\boxed{\text{小テスト解答}}$　No.15　方程式・式と証明　不等式の証明(1)

1. $(ab+2)-(a+2b)=a(b-1)-2(b-1)$

$=(a-2)(b-1)$

$a>2$，$b>1$ より，$a-2>0$，$b-1>0$ であるから

$(ab+2)-(a+2b)=(a-2)(b-1)>0$

ゆえに

$ab+2>a+2b$

(5 点)

2. $5(2x^2+3y^2)-6(x+y)^2=10x^2+15y^2-6(x^2+2xy+y^2)$

$=4x^2-12xy+9y^2$

$=(2x-3y)^2\geqq 0$

ゆえに

$5(2x^2+3y^2)\geqq 6(x+y)^2$

等号が成り立つのは，$2x-3y=0$，すなわち　$2x=3y$ のときである。

(7 点)

3. $a^2+3b^2-3ab=\left(a-\frac{3}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

$\left(a-\frac{3}{2}b\right)^2\geqq 0$，$\frac{3}{4}b^2\geqq 0$ であるから

$\left(a-\frac{3}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geqq 0$

よって

$a^2+3b^2\geqq 3ab$

等号が成り立つのは，$a-\frac{3}{2}b=0$　かつ　$b=0$，すなわち$a=b=0$　のときである。

(8 点)

$\boxed{\text{小テスト解答}}$　No.16　方程式・式と証明　不等式の証明(2)

1. $a>0$ であるから，$4a$ と $\dfrac{1}{a}$ はいずれも正である。

よって，相加平均と相乗平均の関係より

$$4a+\frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{4a\cdot\frac{1}{a}}=4$$

が成り立つ。

等号が成り立つのは，$4a=\dfrac{1}{a}$，すなわち $a^2=\dfrac{1}{4}$ のときで，$a>0$ より，$a=\dfrac{1}{2}$ のときである。

(10 点)

2.
$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+\frac{4}{ab}+5$$

$a>0$，$b>0$ であるから，ab と $\dfrac{4}{ab}$ はいずれも正である。

よって，相加平均と相乗平均の関係より

$$ab+\frac{4}{ab} \geqq 2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}=4$$

したがって

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right) \geqq 4+5=9$$

が成り立つ。

等号が成り立つのは，$ab=\dfrac{4}{ab}$，すなわち $(ab)^2=4$ のときで，$ab>0$ より，$ab=2$ のときである。

(10 点)

$\boxed{\text{小テスト解答}}$　No.17　方程式・式と証明　不等式の証明(3)

1. 両辺の平方の差を考えると，$\sqrt{a} \geqq 1$ より

$$\left(\sqrt{a-1}\right)^2-\left(\sqrt{a}-1\right)^2=a-1-\left(a-2\sqrt{a}+1\right)$$
$$=2\left(\sqrt{a}-1\right) \geqq 0$$

したがって

$$\left(\sqrt{a-1}\right)^2 \geqq \left(\sqrt{a}-1\right)^2$$

$\sqrt{a-1} \geqq 0$，$\sqrt{a}-1 \geqq 0$ であるから

$$\sqrt{a-1} \geqq \sqrt{a}-1$$

等号が成り立つのは，$\sqrt{a}=1$，すなわち $a=1$ のときである。

(10 点)

2. 両辺の平方の差を考えると

$$\left(|a|+1\right)^2-|a+1|^2=|a|^2+2|a|+1-(a+1)^2$$
$$=a^2+2|a|+1-(a^2+2a+1)$$
$$=2\left(|a|-a\right) \geqq 0$$

したがって

$$\left(|a|+1\right)^2 \geqq |a+1|^2$$

$|a|+1 \geqq 0$，$|a+1| \geqq 0$ であるから

$$|a|+1 \geqq |a+1|$$

等号が成り立つのは，$|a|=a$，すなわち $a \geqq 0$ のときである。

(10 点)