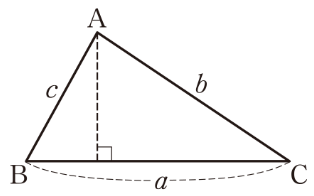
練習問題Ａ

（教科書 p.154）

1 鋭角三角形 ABC において

$$a = b\cos C + c\cos B$$

が成り立つことを証明せよ。



2 △ABC の面積を S，外接円の半径を R とするとき

$$S = \frac{abc}{4R}$$

が成り立つことを，面積の公式と正弦定理を用いて証明せよ。

3 半径 1 の円に内接する正十二角形の面積を求めよ。

4 円に内接する四角形ABCDにおいて

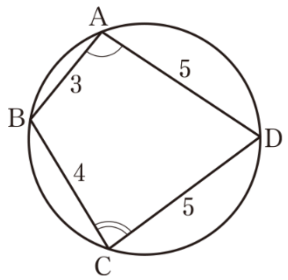
$AB=3,\ BC=4,\ CD=DA=5$

である。

このとき，次の問に答えよ。

(1) 2つの角$\angle BAD$，$\angle BCD$に着目して，

対角線BDおよび$\cos\angle BAD$の値を求めよ。

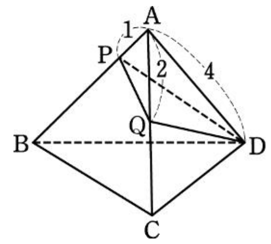


(2) 四角形ABCDの面積を求めよ。

5 1辺の長さが4の正四面体ABCDの辺AB上に点P，辺AC上に点Qを

$AP=1,\ AQ=2$

となるようにとるとき，次の問に答えよ。



(1) $\triangle DPQ$の辺DP，PQ，QDを求めよ。

(2) $\angle PQD=\theta$とするとき，$\cos\theta$の値を求めよ。

(3) $\triangle DPQ$の面積を求めよ。

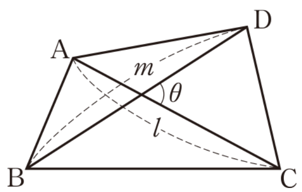
6 △ABCにおいて，$\frac{\sin A}{5}=\frac{\sin B}{6}=\frac{\sin C}{7}$が成り立つとする。

△ABCの最大角をθとするとき，$\cos\theta$の値を求めよ。

練習問題B

（教科書 p.115）

7 四角形 ABCD の対角線の長さを右の図のように l，m とし，そのなす角を θ とする。このとき，四角形の面積 S を θ，l，m を用いて表せ。

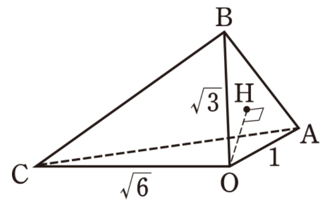


8 右の図の三角錐 OABC について

$\mathrm{OA} = 1$，$\mathrm{OB} = \sqrt{3}$，$\mathrm{OC} = \sqrt{6}$，

$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = 90°$

とする。このとき，次の値を求めよ。



(1)　三角錐 OABC の体積 V

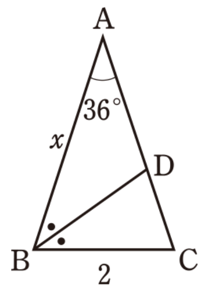
(2)　$\angle\mathrm{ABC}$

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S

(4)　頂点 O から $\triangle\mathrm{ABC}$ に下ろした垂線 OH の長さ h

9 $A=36°$, $BC=2$, $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC がある。∠B の二等分線が辺 AC と交わる点を D とするとき，次の問に答えよ。

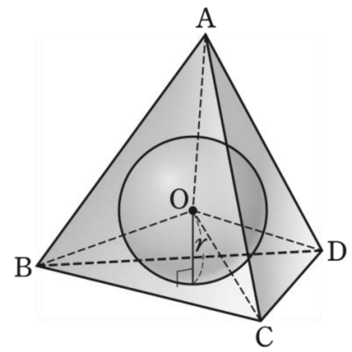
(1)　$AB=x$ とおいて x の 2 次方程式をつくり，AB の長さを求めよ。



(2)　(1)を利用して，cos 36° の値を求めよ。

10 1 辺の長さが 6 の正四面体 ABCD について，次の問に答えよ。

(1)　正四面体の体積を求めよ。



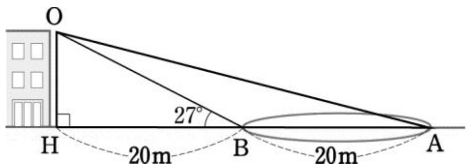
(2) 正四面体に内接する球の中心を O とする。正四面体の体積が 4 つの四面体 ABCO，ACDO，ABDO，BCDO の体積の和であることを用いて，球の半径 r を求めよ。

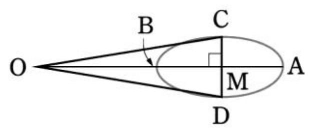
COLUMN 物の見え方

（教科書p.156）

香川県には，離れた展望台から見ると，きれいな円に見える砂絵があります。この砂絵は真上から見ると，右下のような形をしています。

学園祭で，校舎の屋上から見たときに，砂絵のような図形をえがくにはどうしたらよいでしょうか。まず，校舎の屋上から見たときにほぼ円に見えるような図形を，校舎から 20m 離れた地点 B から AB が 20m となるようにかくことにしました。砂絵の考えを利用して，校舎の屋上 O から，AB，CD を見込む角，すなわち，下の図の ∠BOA と ∠COD が等しくなるようにします。ここでは，207 ページの三角比の表を小数第 2 位まで用いて考えてみよう。





課題 1 地点 B から校舎の屋上を見上げた仰角は 27° でした。校舎の高さを求めてみよう。

課題 2 OB，OA の長さを求めることにより，cos∠AOB を求めてみよう。

課題 3 CD の中点を M とするとき，OM の長さを求めてみよう。
また，∠AOB = ∠COD となるように，CD の長さを求めてみよう。

自分の学校の校庭に，屋上から見たときに円に見える図形を実際にかいて写真を撮ってみよう。

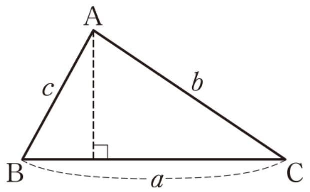
練習問題Ａ

（教科書 p.154）

1 鋭角三角形 ABC において

$a = b\cos C + c\cos B$

が成り立つことを証明せよ。



A から BC に下ろした垂線と BC の交点を H とすると，△ ABC は鋭角三角形であるから，点 H は辺 BC 上にあり

$\mathrm{BH} = \mathrm{AB}\cos B = c\cos B$

$\mathrm{CH} = \mathrm{AC}\cos C = b\cos C$

ゆえに

$a = \mathrm{CH} + \mathrm{BH} = b\cos C + c\cos B$

2 △ ABC の面積を S，外接円の半径を R とするとき

$S = \frac{abc}{4R}$

が成り立つことを，面積の公式と正弦定理を用いて証明せよ。

面積の公式により

$S = \frac{1}{2}ab\sin C$　　　　　……①

正弦定理により

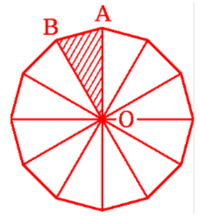
$\frac{c}{\sin C} = 2R$

よって　$\sin C = \frac{c}{2R}$　　　　　……②

①に②を代入して

$S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$

3 半径 1 の円に内接する正十二角形の面積を求めよ。



図のように，正十二角形を分割すると

$\angle\mathrm{AOB} = 360° \div 12$

$= 30°$

よって，求める面積は

$S = 12 \times \triangle\mathrm{AOB}$

$= 12\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin 30°$

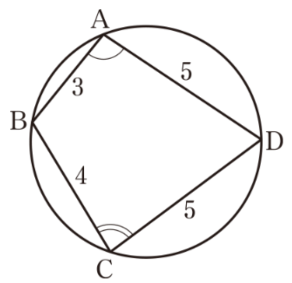
$= 3$

4 円に内接する四角形 ABCD において

$AB=3,\ BC=4,\ CD=DA=5$

である。

このとき，次の問に答えよ。



(1) 2つの角 $\angle BAD$，$\angle BCD$ に着目して，

対角線 BD および $\cos\angle BAD$ の値を求めよ。

$\angle BAD=\theta$ とすると，四角形 ABCD は円に内接するから　$\angle BCD=180°-\theta$

△ABD において，余弦定理により

$$BD^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos\theta$$
$$=34-30\cos\theta \quad \cdots\cdots①$$

△CBD において，余弦定理により

$$BD^2=4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cos(180°-\theta)$$
$$=41-40\cos(180°-\theta)$$
$$=41+40\cos\theta \quad \cdots\cdots②$$

①，②より $34-30\cos\theta=41+40\cos\theta$

よって　$\cos\theta=-\frac{1}{10}$

$\cos\theta=-\frac{1}{10}$ を①に代入して

$$BD^2=34-30\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)=37$$

$BD>0$ より　$BD=\sqrt{37}$

したがって　$BD=\sqrt{37}$，$\cos\angle BAD=-\frac{1}{10}$

(2) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

$$\sin^2\theta=1-\left(-\frac{1}{10}\right)^2=\frac{99}{100}$$

$0°<\theta<180°$ より，$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\frac{3\sqrt{11}}{10}$$

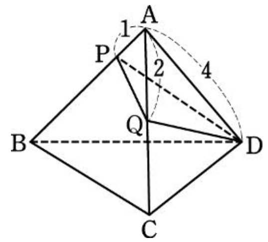
よって，求める四角形の面積 S は

$$S=\triangle ABD+\triangle CBD$$
$$=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AD\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot CB\cdot CD\sin(180°-\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\frac{3\sqrt{11}}{10}+\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\frac{3\sqrt{11}}{10}$$
$$=\frac{21\sqrt{11}}{4}$$

5 1辺の長さが4の正四面体 ABCD の辺 AB 上に点 P，辺 AC 上に点 Q を

$AP=1,\ AQ=2$

となるようにとるとき，次の問に答えよ。



(1) △DPQ の辺 DP，PQ，QD を求めよ。

$$DP^2=AD^2+AP^2-2\cdot AD\cdot AP\cos60°$$
$$=4^2+1^2-2\cdot4\cdot1\cdot\frac{1}{2}=13$$

よって　$DP=\sqrt{13}$

同様に

$$PQ^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cos60°=3$$

よって　$PQ=\sqrt{3}$

$$QD^2=2^2+4^2-2\cdot2\cdot4\cos60°=12$$

よって　$QD=2\sqrt{3}$

(2) $\angle PQD=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{PQ^2+QD^2-DP^2}{2\cdot PQ\cdot QD}$$
$$=\frac{(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}}=\frac{1}{6}$$

(3) △DPQ の面積を求めよ。

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{35}}{6}$$

よって

$$\triangle DPQ=\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot QD\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{35}}{6}=\frac{\sqrt{35}}{2}$$

6 $\triangle$ ABCにおいて，$\frac{\sin A}{5}=\frac{\sin B}{6}=\frac{\sin C}{7}$ が成り立つとする。

$\triangle$ ABCの最大角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

$\frac{\sin A}{5}=\frac{\sin B}{6}=\frac{\sin C}{7}=k$ とすると

$\sin A=5k$，$\sin B=6k$，$\sin C=7k$

$\triangle$ ABCの外接円の半径を R とすると

$a=2R\sin A=10kR$

$b=2R\sin B=12kR$

$c=2R\sin C=14kR$

最大辺が c であるから，最大角は C である。

よって

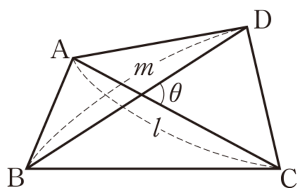
$$\cos\theta=\cos C=\frac{(10kR)^2+(12kR)^2-(14kR)^2}{2\cdot 10kR\cdot 12kR}$$

$$=\frac{1}{5}$$

練習問題B

（教科書 p.115）

7 四角形 ABCD の対角線の長さを右の図のように l，m とし，そのなす角を θ とする。このとき，四角形の面積 S を θ，l，m を用いて表せ。



対角線の交点を P とし，$AP = x$，$CP = y$，$BP = z$，$DP = w$ とおくと

$x + y = l$，$z + w = m$

また　$\triangle ABP = \frac{1}{2}xz\sin\theta$

$\triangle BCP = \frac{1}{2}zy\sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}zy\sin\theta$

$\triangle CDP = \frac{1}{2}yw\sin\theta$

$\triangle DAP = \frac{1}{2}wx\sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2}wx\sin\theta$

ゆえに

$S = \triangle ABP + \triangle BCP + \triangle CDP + \triangle DAP$

$= \frac{1}{2}(xz + zy + yw + wx)\sin\theta$

$= \frac{1}{2}(x+y)(z+w)\sin\theta = \frac{1}{2}lm\sin\theta$

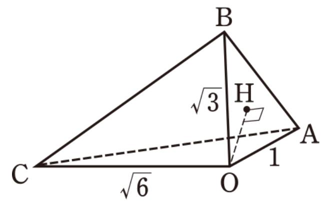
すなわち　$S = \frac{1}{2}lm\sin\theta$

8 右の図の三角錐 OABC について

$OA = 1$，$OB = \sqrt{3}$，$OC = \sqrt{6}$，

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$

とする。このとき，次の値を求めよ。



(1)　三角錐 OABC の体積 V

$\triangle OAC = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

よって

$V = \frac{1}{3}\cdot\triangle OAC\cdot OB$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)　$\angle ABC$

$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2$

$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 3$

$CA = \sqrt{OC^2 + OA^2} = \sqrt{7}$

よって　$\cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2\cdot AB\cdot BC}$

$= \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{7})^2}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{2}$

ゆえに　$\angle ABC = 60^\circ$

(3)　$\triangle ABC$ の面積 S

$S = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\sin\angle ABC$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

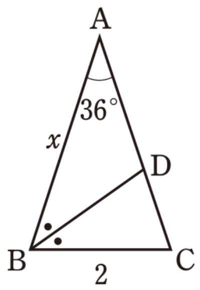
(4)　頂点 O から $\triangle ABC$ に下ろした垂線 OH の長さ h

$V = \frac{1}{3}Sh$ より

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}h$

ゆえに　$h = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

9　$A=36°$, $BC=2$, $AB=AC$ の二等辺三角形 ABC がある。∠B の二等分線が辺 AC と交わる点を D とするとき，次の問に答えよ。



(1)　$AB=x$ とおいて x の 2 次方程式をつくり，AB の長さを求めよ。

$\angle ABC=\angle ACB=72°$

$\angle ABD=36°$ より　$\angle BDC=72°$

したがって

$AD=BD=BC=2$，$CD=x-2$

$\triangle ABC \backsim \triangle BCD$ より

$AB:BC=BC:CD$

$x:2=2:(x-2)$

よって，$x(x-2)=4$ であるから

$x^2-2x-4=0$

これを解くと　$x=1\pm\sqrt{5}$

$AB>0$ より　$AB=1+\sqrt{5}$

(2)　(1)を利用して，$\cos 36°$ の値を求めよ。

余弦定理により

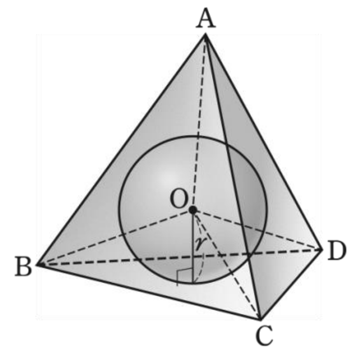
$$\cos 36° = \frac{(1+\sqrt{5})^2+(1+\sqrt{5})^2-2^2}{2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}$$

$$=\frac{4(2+\sqrt{5})}{4(3+\sqrt{5})}$$

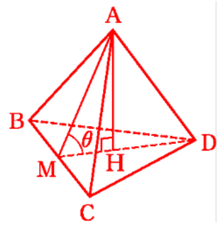
$$=\frac{(2+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{4}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

10　1 辺の長さが 6 の正四面体 ABCD について，次の問に答えよ。



(1)　正四面体の体積を求めよ。



辺 BC の中点を M とすると

$AM=DM=3\sqrt{3}$

$\angle AMD=\theta$ とすると余弦定理により

$$\cos\theta = \frac{AM^2+DM^2-AD^2}{2\cdot AM\cdot DM}$$

$$=\frac{(3\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-6^2}{2\cdot 3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

よって

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

A から平面 BCD に垂線を下ろして平面 BCD と H で交わるとすると，H は線分 MD 上にあるから

$AH=AM\sin\theta$

$$=3\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{6}$$

よって，正四面体の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle BCD\cdot AH$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60°\right)\cdot 2\sqrt{6}$$

$$=18\sqrt{2}$$

〔別解〕（12 行目から）

$$\triangle AMD=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot DM\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=9\sqrt{2}$$

正四面体 ABCD の体積 V は，$\triangle AMD$ を底面とする 2 つの三角錐 BAMD，CAMD の体積の和であり，それぞれの高さは BM，CM であるから

$$V=\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{2}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{2}\cdot 3=18\sqrt{2}$$

(2)　正四面体に内接する球の中心を O とする。正四面体の体積が 4 つの四面体 ABCO，ACDO，ABDO，BCDO の体積の和であることを用いて，球の半径 r を求めよ。

△ ABC の面積は $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$

四面体 ABCO は △ ABC を底面とし，高さ r の三角錐であるから，その体積は

$$\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot r = 3\sqrt{3}r$$

四面体 ABDO，ACDO，BCDO の体積も同様に $3\sqrt{3}r$ であるから

$$4\cdot 3\sqrt{3}r = 18\sqrt{2}$$

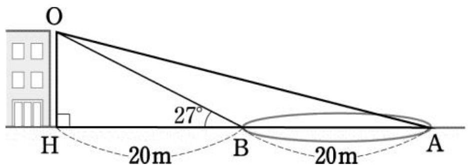
$$r = \frac{18\sqrt{2}}{12\sqrt{3}}$$

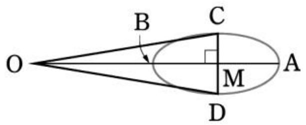
よって　　$r = \frac{\sqrt{6}}{2}$

COLUMN　物の見え方　　（教科書p.156）

　香川県には，離れた展望台から見ると，きれいな円に見える砂絵があります。この砂絵は真上から見ると，右下のような形をしています。

　学園祭で，校舎の屋上から見たときに，砂絵のような図形をえがくにはどうしたらよいでしょうか。まず，校舎の屋上から見たときにほぼ円に見えるような図形を，校舎から 20m 離れた地点 B から AB が 20m となるようにかくことにしました。砂絵の考えを利用して，校舎の屋上 O から，AB，CD を見込む角，すなわち，下の図の ∠BOA と ∠COD が等しくなるようにします。ここでは，207 ページの三角比の表を小数第 2 位まで用いて考えてみよう。





課題 1 地点 B から校舎の屋上を見上げた仰角は 27° でした。校舎の高さを求めてみよう。

課題 2 OB，OA の長さを求めることにより，cos∠AOB を求めてみよう。

課題 3 CD の中点を M とするとき，OM の長さを求めてみよう。
また，∠AOB = ∠COD となるように，CD の長さを求めてみよう。

　自分の学校の校庭に，屋上から見たときに円に見える図形を実際にかいて写真を撮ってみよう。