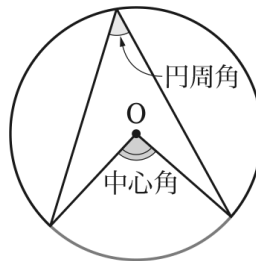


3 節 三角形への応用

1 正弦定理

1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の半分である。

(教科書 p.138)



円周角の定理を用いて、円に内接する四角形の対角の和を求めてみよう。

右の図のように、 $\angle DAB = \alpha$, $\angle BCD = \beta$ とすると、円周角の定理により、弧 BCD に対する中心角は 2α 、弧 DAB に対する中心角は 2β となる。

ゆえに、 $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$ より $\alpha + \beta = 180^\circ$

すなわち $A + C = 180^\circ$

同様に $B + D = 180^\circ$

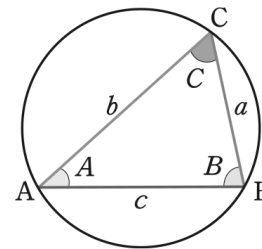
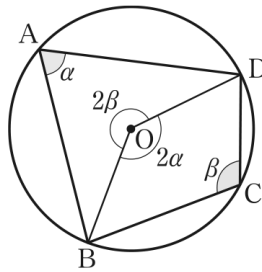
したがって、円に内接する四角形の対角の和は 180° である。

今後、 $\triangle ABC$ の3つの角 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の対辺の長さをそれぞれ a , b , c で表す。

三角形の3つの頂点を通る円はただ1つ定まる。

これを、その三角形の(1) という。

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、次の(2) が成り立つ。



正弦定理
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
R は $\triangle ABC$ の外接円の半径

証明 ます、 $\frac{a}{\sin A} = 2R$, すなわち

$$a = 2R \sin A \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを示す。

(i) A が鋭角であるとき

点 B を通る直径を引き、 BA' とする。

円周角の定理から $\angle BAC = \angle BA'C$

また、 BA' は直径であるから

$$\angle A'CB = 90^\circ$$

よって $a = BA' \sin A' = 2R \sin A$

(ii) A が直角であるとき

BC は外接円の直径であり

$\sin 90^\circ = 1$ であるから

$$a = 2R = 2R \sin A$$

(iii) A が鈍角であるとき

点 B を通る直径を引き、 BD とすると

$$\angle DCB = 90^\circ$$

四角形 $ABCD$ は円に内接するから

$$A + D = 180^\circ$$

よって $a = BD \sin D = 2R \sin(180^\circ - A)$

$$= 2R \sin A$$

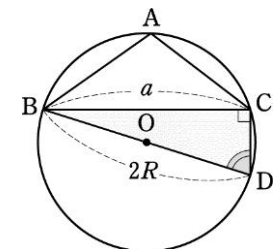
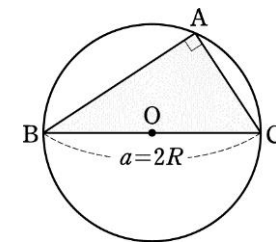
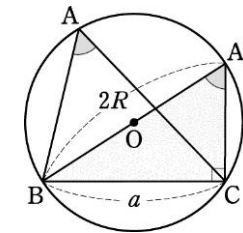
したがって、(i), (ii), (iii)のいずれの場合にも、 $\textcircled{1}$ が成り立つ。

同様にして、次の等式が成り立つ。

$$b = 2R \sin B \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$c = 2R \sin C \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ より $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$



三角形の1辺の長さや2つの角の大きさがわかっているとき、正弦定理を用いて他の辺の長さや外接円の半径を求めることができる。

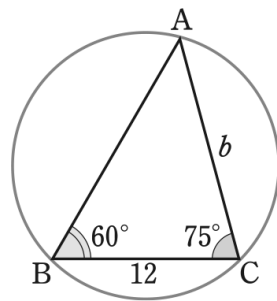
例題 $\triangle ABC$ において、 $a = 12$, $B = 60^\circ$, $C = 75^\circ$ のとき、 b を求めよ。

1 また、この三角形の外接円の半径 R を求めよ。

解 $A = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ であるから}$$



ゆえに $b =$

また $2R = \frac{a}{\sin A}$

$=$

問1 $\triangle ABC$ において、 $a = 10$, $A = 120^\circ$, $C = 15^\circ$ のとき、 b を求めよ。

また、この三角形の外接円の半径 R を求めよ。

問2 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする。 $A = 135^\circ$, $R = 4$ のとき、 a を求めよ。

三角形の2辺の長さとその辺に対する1つの対角の大きさがわかっているとき、正弦定理を用いて他の2つの角の大きさを求めることができる。

例題 $\triangle ABC$ において、 $b = 2$, $c = \sqrt{6}$, $B = 45^\circ$ のとき、 C , A を求めよ。

2

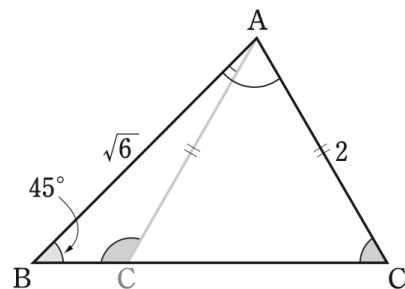
解 正弦定理により

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

◀ 2辺と1対角から他の対角を求めるとき、正弦定理を利用

であるから

$$\sin C =$$



したがって $C = 60^\circ$ または $C = 120^\circ$

$C = 60^\circ$ のとき

$$A = 180^\circ - (B + C)$$

=

$C = 120^\circ$ のとき

$$A = 180^\circ - (B + C)$$

=

問3 $\triangle ABC$ において、 $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2$, $A = 135^\circ$ のとき、 B , C を求めよ。

問4 $\triangle ABC$ において、 $b = 6$, $c = 2\sqrt{3}$, $C = 30^\circ$ のとき、 A , B , a を求めよ。

2 余弦定理

(教科書 p.142)

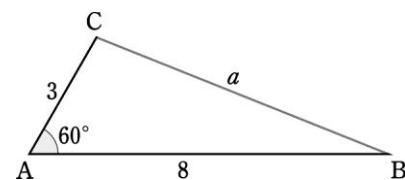
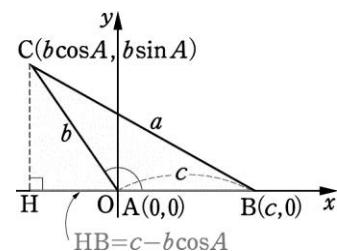
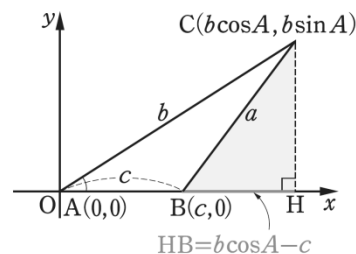
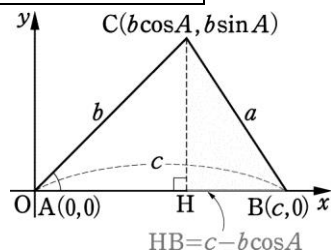
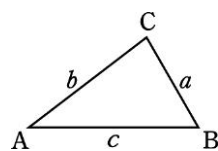
△ABC の1つの角と3辺の長さの間に次の⁽¹⁾が成り立つ。

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



△ABC に対して右の図のように座標軸を定めると、3 頂点 A, B, C の座標は次のようになる。

$$A(0, 0), B(c, 0)$$

$$C(b \cos A, b \sin A)$$

また、 $CH \perp AB$ となるような x 軸上の点 $H(b \cos A, 0)$ をとる。

直角三角形 BCH を考えて

$$a^2 = BC^2 = HB^2 + HC^2$$

である。点 H の位置に応じて

$$HB = c - b \cos A$$

または $HB = b \cos A - c$

が成り立つ。

いずれの場合も

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - b \cos A)^2 + (b \sin A)^2 \\ &= c^2 - 2bc \cos A + b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

同様にして、他の2つの式も得られる。

例 1 △ABC において、 $b = 3, c = 8, A = 60^\circ$ ならば、余弦定理により

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

=

問5 △ABC において、 $a = 1, b = \sqrt{3}, C = 150^\circ$ のとき、 c を求めよ。

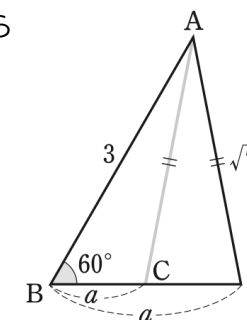
例題 △ABC において、 $b = \sqrt{7}, c = 3, B = 60^\circ$ のとき、 a を求めよ。

3

解 余弦定理により、 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ であるから

$$(\sqrt{7})^2 = 3^2 + a^2 - 2 \cdot 3 \cdot a \cos 60^\circ$$

よって



問6 △ABC において、 $a = \sqrt{7}, b = 1, A = 120^\circ$ のとき、 c を求めよ。

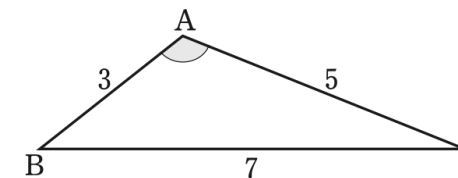
余弦定理を変形すると、次の式が得られる。

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

よって、三角形の3辺の長さから、角の大きさを求めることができる。

例 2 △ABC において、 $a = 7, b = 5, c = 3$ ならば、余弦定理により

$$\cos A =$$



ゆえに

問7 △ABC において、 $a = 5, b = 8, c = 7$ のとき、 C を求めよ。

三角形の辺と角の大きさ

△ABCにおいて、余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

であるから、 $\cos A$ の値の符号と、 $b^2 + c^2 - a^2$ の値の符号は一致する。

したがって、次のことがわかる。

$$a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow A < 90^\circ$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow A = 90^\circ$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow A > 90^\circ$$

問8 次の△ABCにおいて、Aは鋭角、直角、鈍角のいずれであるか。

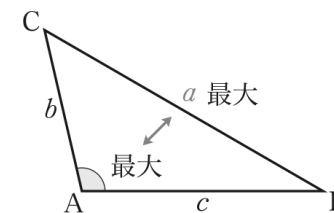
(1) $a = 11, b = 8, c = 7$

(2) $a = 7, b = 5, c = 6$

(教科書 p.144)

三角形において、角の大小と対辺の大小は一致することが知られている。とくに、最大辺の対角が最大角である。

すべての角が鋭角である三角形を(2))といい、ある角が鈍角である三角形を(3))という。



例 3 $a = 7, b = 6, c = 4$ のとき、△ABCは鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形のいずれであるかを調べてみよう。

最大辺が a であるから、その対角 A が最大角である。

ここで $a^2 = 7^2 = 49, b^2 + c^2 = 6^2 + 4^2 = 52$

よって

したがって

問9 $a = 4, b = 8, c = 9$ のとき、△ABCは鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形のいずれであるか。

三角形の決定

(教科書 p.145)

例題 $\triangle ABC$ において、 $b = 2$, $c = 1 + \sqrt{3}$, $A = 30^\circ$ のとき、 a , B , C を求めよ。

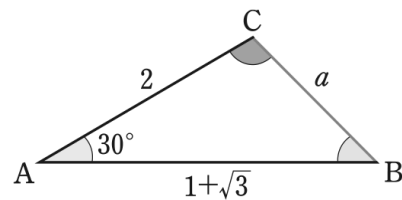
4

解 余弦定理により

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$=$$

2辺とその間の角から角の対辺を求めるとき、余弦定理を利用



また、正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

より

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} =$$

B の対辺 b は最大辺ではないから、 B は最大角ではない。

よって、 B は鋭角であるから

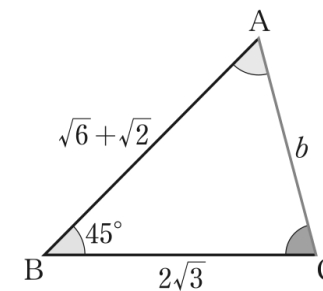
$$B =$$

したがって

$$C =$$

問 10 $\triangle ABC$ において

$a = 2\sqrt{3}$, $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $B = 45^\circ$ のとき、 b , A , C を求めよ。



3 三角形の面積

(教科書 p.146)

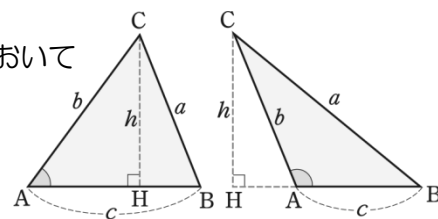
△ABC の面積 S を、2 辺とその間の角によって表してみよう。

△ABC の辺 AB から頂点 C までの高さを h とすると、右の図において

$$h = b \sin A$$

したがって

$$S = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc \sin A$$



問 12 $a = 13, b = 8, c = 7$ である △ABC の面積 S を求めよ。

他の 2 辺とその間の角からも、同様の公式が得られる。

三角形の面積
$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$

問 11 次の △ABC の面積 S を求めよ。

(1) $b = 2, c = 5, A = 60^\circ$

(2) $a = 7, b = 4, C = 135^\circ$

例題 $a = 13, b = 14, c = 15$ である △ABC の面積 S を求めよ。

5

解 余弦定理により

$$\cos A =$$

よって $\sin A =$

ゆえに、三角形の面積の公式により

$$S =$$

円に内接する四角形

応用例題 円に内接する四角形 ABCD において

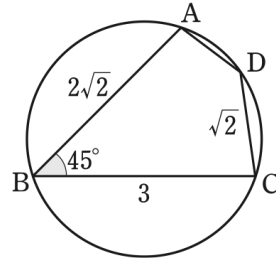
6

$$AB = 2\sqrt{2}, BC = 3, CD = \sqrt{2},$$

$$\angle ABC = 45^\circ$$

とするとき, AD を求めよ。

また, 四角形 ABCD の面積 S を求めよ。



(教科書 p.147)

問 13 円に内接する四角形 ABCD において, $AB = 5, BC = 4, CD = 4, \angle ABC = 60^\circ$ とするとき, AD を求めよ。

また, 四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

解 対角線 AC を引き, $\triangle ABC$ に余弦定理を用いると

$$AC^2 =$$

四角形 ABCD は円に内接するから $D =$

$AD = x$ として, $\triangle ACD$ に余弦定理を用いると

$$(\sqrt{5})^2 = x^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{2} \cos 135^\circ$$

また $S = \triangle ABC + \triangle ACD$

=

三角形の内接円の半径と面積

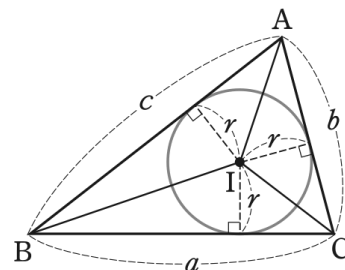
(教科書 p.148)

△ABC の3辺 AB, BC, CA のすべてに接する円はただ1つ存在する。
これを △ABC の (¹) という。

△ABC の内接円の半径を r , 中心を I とすると, △ABC の面積 S は

$$S = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB =$$

すなわち $S =$



問 14 $a = 7, b = 6, c = 5$ である △ABC の内接円の半径 r を求めよ。

例題 3辺の長さが $a = 3, b = 7, c = 8$ である △ABC がある。このとき, 次の問に答えよ。

- 7** (1) △ABC の面積 S を求めよ。
(2) △ABC の内接円の半径 r を求めよ。

解 (1) 余弦定理により

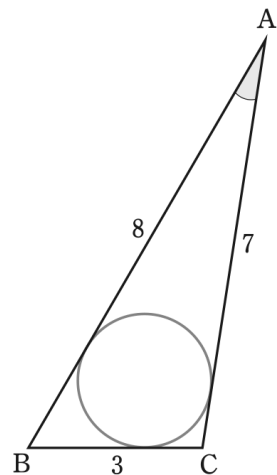
$$\cos A =$$

よって $\sin A =$

ゆえに, 求める面積 S は

$$S =$$

(2) $S = \frac{1}{2}r(a + b + c)$ より



ゆえに, 求める半径 r は

4 空間図形の計量

例題 1辺の長さが3の立方体 $ABCD - EFGH$ の辺 AB 上に点 P , 辺 BF 上に点 Q を

$BP = 1, BQ = 2$

となるようにとる。このとき, $\triangle CPQ$ の面積 S を求めよ。

解 $\triangle CPQ$ の3辺の長さは

$PQ =$

$CP =$

$CQ =$

である。 $\angle CPQ = \theta$ とおくと, 余弦定理により

$$\cos \theta = \frac{CP^2 + PQ^2 - CQ^2}{2 \cdot CP \cdot PQ} =$$

よって $\sin \theta =$

ゆえに, 求める面積 S は

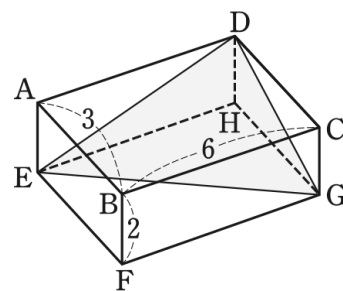
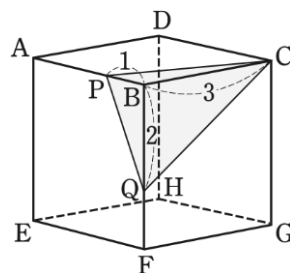
$S =$

問 15 右の図の直方体 $ABCD - EFGH$ において

$AB = 3, BC = 6, BF = 2$

である。このとき, $\triangle DEG$ の面積 S を求めよ。

(教科書 p.149)



応用
例題

9

1 辺の長さが a の正四面体 ABCD において、辺 BC の中点を M とし、頂点 A から DM に下ろした垂線を AH とする。

$\angle AMD = \theta$ とするとき、次の間に答えよ。

- (1) $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (2) AH の長さを a で表せ。

解

- (1) AM および DM の長さを求める。

M は正三角形 ABC の辺 BC の中点であるから

$$\angle ABM = 60^\circ, \angle AMB = 90^\circ$$

よって $AM =$

同様に $DM =$

$\triangle AMD$ に対して余弦定理を用いると、 $\cos \theta$ の値は

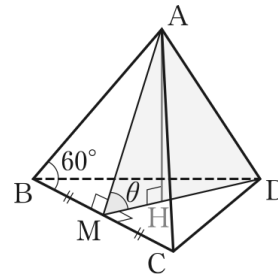
$$\cos \theta =$$

- (2) (1)で得られた $\cos \theta$ の値から $\sin \theta$ の値を求めると

$$\sin \theta =$$

よって

$$AH =$$



問 16 例題 9 において、正四面体 ABCD の体積 V を a で表せ。

問題

(教科書 p.151)

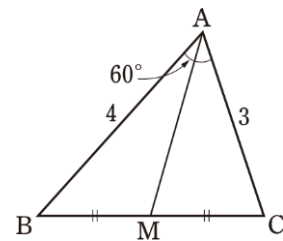
- 11 $\triangle ABC$ において、 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ であるとき、3辺 a, b, c の間に成り立つ関係式を答えよ。
また、 $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

- 12 $\triangle ABC$ において、 $AB = 4, AC = 3, A = 60^\circ$ とし、辺 BC の中点を M とする。
このとき、次の値を求めよ。

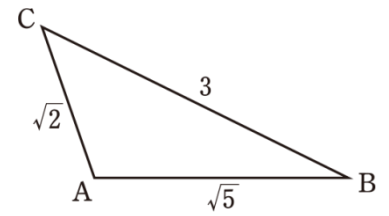
(1) BC

(2) $\cos B$

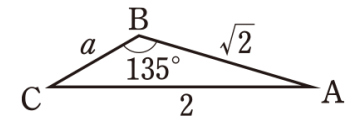
(3) AM



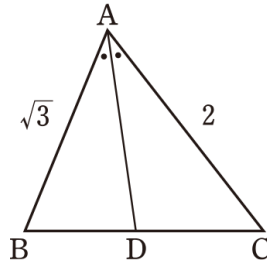
- 13 $\triangle ABC$ において、その面積を S とするとき、次の間に答えよ。
(1) $a = 3, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{5}$ のとき、 C, S を求めよ。



- (2) $c = \sqrt{2}, b = 2, B = 135^\circ$ のとき、 C, a, S を求めよ。

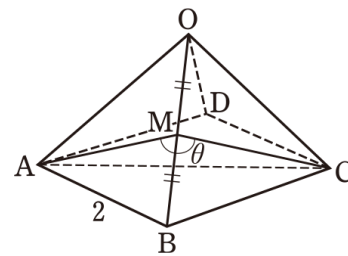


- 14 $\triangle ABC$ において、 $AB = \sqrt{3}$ 、 $AC = 2$ 、 $A = 60^\circ$ とし、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とする。このとき、次の問に答えよ。
- (1) $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。



- (2) AD を求めよ。

- 15 1 辺の長さが 2 の正方形 $ABCD$ を底面とし、4 個の正三角形を側面とする正四角錐 $OABCD$ がある。辺 OB の中点を M 、 $\angle AMC = \theta$ とするとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。



発展

三角形の形状

(教科書 p.152)

三角形において、与えられた辺や角の三角比の等式から、その三角形がどのような形であるかを求めてみよう。

例題 $\triangle ABC$ において、次の等式が成り立つとき、この三角形はどのような形の三角形か。

1 $\sin A \cos B = \sin C$

解 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、正弦定理により

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

余弦定理により

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

これらを与えられた等式に代入すると

問1 $\triangle ABC$ において、次の等式が成り立つとき、この三角形はどのような形の三角形か。

(1) $a \sin A = b \sin B$

(2) $a \cos A + b \cos B = c \cos C$

発展

ヘロンの公式

(教科書 p.153)

3 辺 a, b, c が与えられたときの $\triangle ABC$ の面積 S を求めてみよう。

$S = \frac{1}{2}bc \sin A$ の両辺を 2 倍してから 2 乗すると

$$\begin{aligned} 4S^2 &= b^2c^2\sin^2A \\ &= b^2c^2(1 - \cos^2A) \\ &= b^2c^2(1 + \cos A)(1 - \cos A) \quad \dots\dots\textcircled{1} \end{aligned}$$

余弦定理により $1 + \cos A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$

$$= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}$$

同様にして $1 - \cos A = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$

ここで、 $a + b + c = 2s$ とおくと

$$-a + b + c = 2(s - a), \quad a - b + c = 2(s - b), \quad a + b - c = 2(s - c)$$

よって $1 + \cos A = \frac{2s(s-a)}{bc}$, $1 - \cos A = \frac{2(s-b)(s-c)}{bc}$

これらを①に代入して $4S^2 = 4s(s-a)(s-b)(s-c)$

したがって $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ヘロンの公式
$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{ただし, } s = \frac{a+b+c}{2}$

例 1 3 辺の長さが 4, 5, 7 である三角形の面積 S を求めてみよう。

ヘロンの公式により、 $s = \frac{4+5+7}{2} = 8$ であるから

$$S =$$

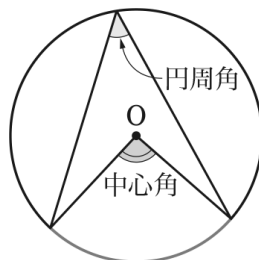
問 1 3 辺の長さが 5, 6, 9 である三角形の面積 S を求めよ。

3 節 三角形への応用

1 正弦定理

1つの弧に対する円周角の大きさは、その弧に対する中心角の半分である。

(教科書 p.138)



円周角の定理を用いて、円に内接する四角形の対角の和を求めてみよう。

右の図のように、 $\angle DAB = \alpha$, $\angle BCD = \beta$ とすると、円周角の定理により、弧 BCD に対する中心角は 2α 、弧 DAB に対する中心角は 2β となる。

ゆえに、 $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$ より $\alpha + \beta = 180^\circ$

すなわち $A + C = 180^\circ$

同様に $B + D = 180^\circ$

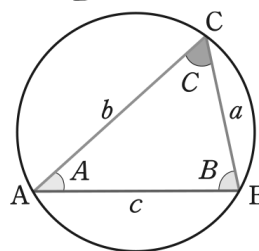
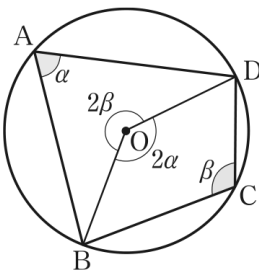
したがって、円に内接する四角形の対角の和は 180° である。

今後、 $\triangle ABC$ の3つの角 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の対辺の長さをそれぞれ a , b , c で表す。

三角形の3つの頂点を通る円はただ1つ定まる。

これを、その三角形の(1 外接円)という。

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、次の(2 正弦定理)が成り立つ。



正弦定理
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
R は $\triangle ABC$ の外接円の半径

証明 ます、 $\frac{a}{\sin A} = 2R$, すなわち

$$a = 2R \sin A \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを示す。

(i) A が鋭角であるとき

点 B を通る直径を引き、 BA' とする。

円周角の定理から $\angle BAC = \angle BA'C$

また、 BA' は直径であるから

$$\angle A'CB = 90^\circ$$

よって $a = BA' \sin A' = 2R \sin A$

(ii) A が直角であるとき

BC は外接円の直径であり

$\sin 90^\circ = 1$ であるから

$$a = 2R = 2R \sin A$$

(iii) A が鈍角であるとき

点 B を通る直径を引き、 BD とすると

$$\angle DCB = 90^\circ$$

四角形 $ABCD$ は円に内接するから

$$A + D = 180^\circ$$

よって $a = BD \sin D = 2R \sin(180^\circ - A)$

$$= 2R \sin A$$

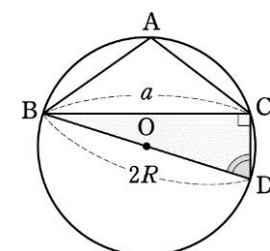
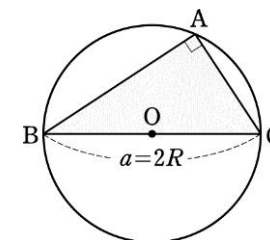
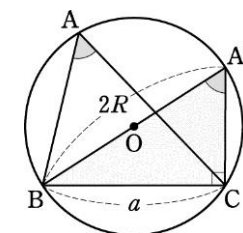
したがって、(i), (ii), (iii)のいずれの場合にも、 $\textcircled{1}$ が成り立つ。

同様にして、次の等式が成り立つ。

$$b = 2R \sin B \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$c = 2R \sin C \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

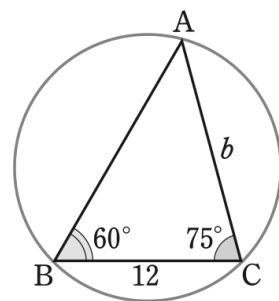
$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{より} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



三角形の1辺の長さや2つの角の大きさがわかっているとき、正弦定理を用いて他の辺の長さや外接円の半径を求めることができる。

例題 $\triangle ABC$ において、 $a = 12$, $B = 60^\circ$, $C = 75^\circ$ のとき、 b を求めよ。

1 また、この三角形の外接円の半径 R を求めよ。



解 $A = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$

正弦定理により

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ であるから

$$\frac{12}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$$

ゆえに $b = \frac{12 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}$

$$= 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 6\sqrt{6} \quad \dots \dots \boxed{\text{答}}$$

また $2R = \frac{a}{\sin A}$

$$= \frac{12}{\sin 45^\circ}$$

$$= 12 \div \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 12\sqrt{2}$$

ゆえに $R = 6\sqrt{2} \quad \dots \dots \boxed{\text{答}}$

問1 $\triangle ABC$ において、 $a = 10$, $A = 120^\circ$, $C = 15^\circ$ のとき、 b を求めよ。

また、この三角形の外接円の半径 R を求めよ。

$$B = 180^\circ - (120^\circ + 15^\circ) = 45^\circ$$

正弦定理により、 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ であるから

$$b = \frac{10 \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

また、 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ より

$$2R = \frac{10}{\sin 120^\circ} = 10 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

ゆえに $R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

問2 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする。 $A = 135^\circ$, $R = 4$ のとき、 a を求めよ。

正弦定理により、 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ であるから

$$a = 2R \sin A = 2 \cdot 4 \cdot \sin 135^\circ = 4\sqrt{2}$$

三角形の2辺の長さとその辺に対する1つの対角の大きさがわかっているとき、正弦定理を用いて他の2つの角の大きさを求めることができる。

例題 $\triangle ABC$ において、 $b = 2$, $c = \sqrt{6}$, $B = 45^\circ$ のとき、 C , A を求めよ。

2

解 正弦定理により

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

◀ 2辺と1対角から他の対角を求めるとき、正弦定理を利用

であるから

$$\begin{aligned} \sin C &= \frac{c \sin B}{b} \\ &= \frac{\sqrt{6} \sin 45^\circ}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

したがって $C = 60^\circ$ または $C = 120^\circ$

$C = 60^\circ$ のとき

$$\begin{aligned} A &= 180^\circ - (B + C) \\ &= 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) \\ &= 75^\circ \end{aligned}$$

$C = 120^\circ$ のとき

$$\begin{aligned} A &= 180^\circ - (B + C) \\ &= 180^\circ - (45^\circ + 120^\circ) \\ &= 15^\circ \end{aligned}$$

◁答> $C = 60^\circ, A = 75^\circ$ または $C = 120^\circ, A = 15^\circ$

問3 $\triangle ABC$ において、 $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2$, $A = 135^\circ$ のとき、 B , C を求めよ。

正弦定理により、 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ であるから

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{2 \sin 135^\circ}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

したがって、 $B = 30^\circ$ または $B = 150^\circ$

ここで、 $B < 180^\circ - A = 45^\circ$ であるから

$$B = 30^\circ$$

$$C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (135^\circ + 30^\circ) = 15^\circ$$

問4 $\triangle ABC$ において、 $b = 6$, $c = 2\sqrt{3}$, $C = 30^\circ$ のとき、 A , B , a を求めよ。

正弦定理により、 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ であるから

$$\sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{6 \sin 30^\circ}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって $B = 60^\circ$ または $B = 120^\circ$

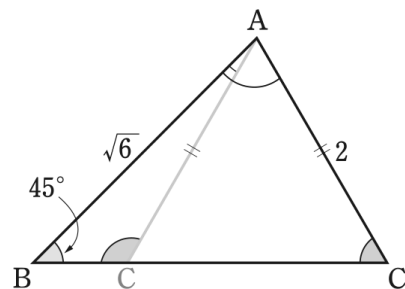
$B = 60^\circ$ のとき $A = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \text{ より}$$

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{2\sqrt{3} \sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 4\sqrt{3}$$

$B = 120^\circ$ のとき $A = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$

$$\text{上と同様に } a = \frac{2\sqrt{3} \sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{3}$$



2 余弦定理

(教科書 p.142)

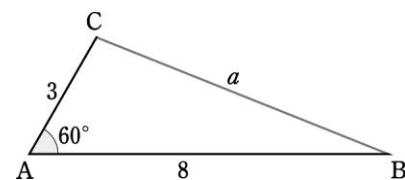
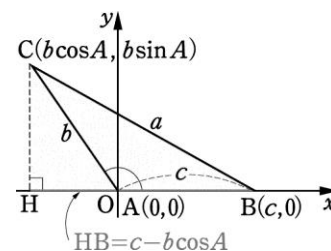
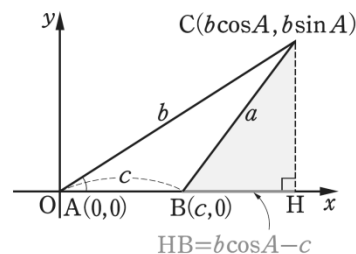
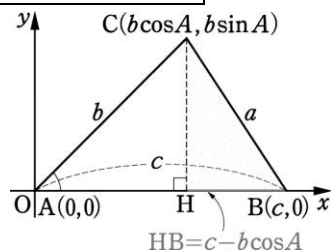
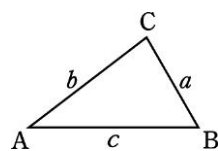
△ABC の1つの角と3辺の長さの間に次の(1) **余弦定理** が成り立つ。

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



△ABC に対して右の図のように座標軸を定めると、3頂点 A, B, C の座標は次のようになる。

$$A(0, 0), B(c, 0)$$

$$C(b \cos A, b \sin A)$$

また、 $CH \perp AB$ となるような x 軸上の点 $H(b \cos A, 0)$ をとる。

直角三角形 BCH を考えて

$$a^2 = BC^2 = HB^2 + HC^2$$

である。点 H の位置に応じて

$$HB = c - b \cos A$$

または $HB = b \cos A - c$

が成り立つ。

いずれの場合も

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - b \cos A)^2 + (b \sin A)^2 \\ &= c^2 - 2bc \cos A + b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

同様にして、他の2つの式も得られる。

例 1 △ABC において、 $b = 3, c = 8, A = 60^\circ$ ならば、余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cos 60^\circ \\ &= 9 + 64 - 24 = 49 \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{ より } a = \sqrt{49} = 7$$

問5 △ABC において、 $a = 1, b = \sqrt{3}, C = 150^\circ$ のとき、 c を求めよ。

余弦定理により

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= 1^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cos 150^\circ \\ &= 1 + 3 - 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7 \end{aligned}$$

$$c > 0 \text{ より } c = \sqrt{7}$$

例題 3 △ABC において、 $b = \sqrt{7}, c = 3, B = 60^\circ$ のとき、 a を求めよ。

3

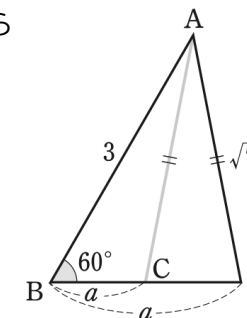
解 余弦定理により、 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ であるから

$$(\sqrt{7})^2 = 3^2 + a^2 - 2 \cdot 3 \cdot a \cos 60^\circ$$

$$\text{よって } a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$(a - 1)(a - 2) = 0$$

$$\text{ゆえに } a = 1, 2$$



問6 △ABC において、 $a = \sqrt{7}, b = 1, A = 120^\circ$ のとき、 c を求めよ。

余弦定理により

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{ であるから}$$

$$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + c^2 - 2 \cdot 1 \cdot c \cos 120^\circ$$

$$\text{よって } c^2 + c - 6 = 0$$

$$(c + 3)(c - 2) = 0$$

$$c > 0 \text{ より } c = 2$$

余弦定理を変形すると、次の式が得られる。

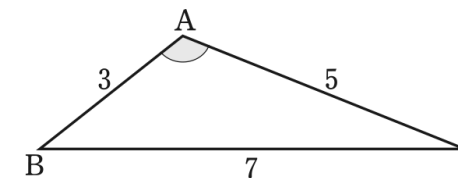
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

よって、三角形の3辺の長さから、角の大きさを求めることができる。

例 2 △ABC において、 $a = 7, b = 5, c = 3$ ならば、余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } A = 120^\circ$$



問7 △ABC において、 $a = 5, b = 8, c = 7$ のとき、 C を求めよ。

余弦定理により

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } C = 60^\circ$$

三角形の辺と角の大きさ

△ABCにおいて、余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

であるから、 $\cos A$ の値の符号と、 $b^2 + c^2 - a^2$ の値の符号は一致する。

したがって、次のことがわかる。

$$a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow A < 90^\circ$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow A = 90^\circ$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow A > 90^\circ$$

問8 次の△ABCにおいて、Aは鋭角、直角、鈍角のいずれであるか。

(1) $a = 11, b = 8, c = 7$

$a^2 = 121, b^2 + c^2 = 113$ であるから

$$a^2 > b^2 + c^2$$

よって、Aは鈍角である。

(2) $a = 7, b = 5, c = 6$

$a^2 = 49, b^2 + c^2 = 61$ であるから

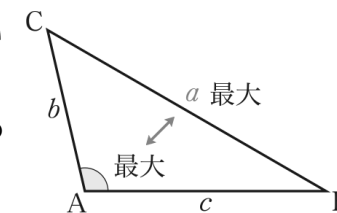
$$a^2 < b^2 + c^2$$

よって、Aは鋭角である。

(教科書 p.144)

三角形において、角の大小と対辺の大小は一致することが知られている。とくに、最大辺の対角が最大角である。

すべての角が鋭角である三角形を(2 鋭角三角形)といい、ある角が鈍角である三角形を(3 鈍角三角形)という。



例3 $a = 7, b = 6, c = 4$ のとき、△ABCは鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形のいずれであるかを調べてみよう。

最大辺がaであるから、その対角Aが最大角である。

ここで $a^2 = 7^2 = 49, b^2 + c^2 = 6^2 + 4^2 = 52$

よって $a^2 < b^2 + c^2$

したがって $A < 90^\circ$

最大角Aが鋭角であるから、△ABCは鋭角三角形である。

問9 $a = 4, b = 8, c = 9$ のとき、△ABCは鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形のいずれであるか。

最大辺がcであるから、その対角Cが最大角である。

ここで $c^2 = 9^2 = 81, a^2 + b^2 = 4^2 + 8^2 = 80$

よって $c^2 > a^2 + b^2$

したがって $C > 90^\circ$

最大角Cが鈍角であるから、△ABCは鈍角三角形である。

三角形の決定

(教科書 p.145)

例題 $\triangle ABC$ において、 $b = 2$ 、 $c = 1 + \sqrt{3}$ 、 $A = 30^\circ$ のとき、 a 、 B 、 C を求めよ。

4

解 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot (1 + \sqrt{3}) \cos 30^\circ \\ &= 4 + (4 + 2\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$a > 0$ より $a = \sqrt{2}$ ……答

また、正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

より

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{2 \sin 30^\circ}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \div \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

B の対辺 b は最大辺ではないから、 B は最大角ではない。

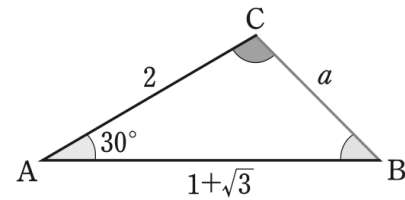
よって、 B は鋭角であるから

$B = 45^\circ$ ……答

したがって

$C = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$ ……答

2辺とその間の角から角の対辺を求めるとき、余弦定理を利用



問 10 $\triangle ABC$ において

$a = 2\sqrt{3}$ 、 $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ 、 $B = 45^\circ$

のとき、 b 、 A 、 C を求めよ。

余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ &= (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 45^\circ \\ &= (8 + 4\sqrt{3}) + 12 - 2\sqrt{6}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \\ &= 8 \end{aligned}$$

$b > 0$ より $a = 2\sqrt{2}$

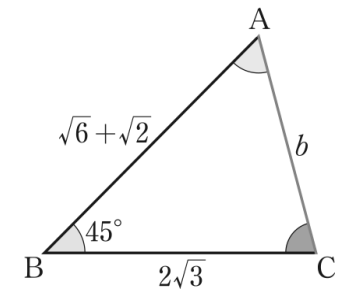
また、正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ より

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{a \sin B}{b} = \frac{2\sqrt{3} \sin 45^\circ}{2\sqrt{2}} \\ &= 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \div 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

ここで、 $2\sqrt{3} < \sqrt{6} + \sqrt{2}$ より、 A の対辺 a は最大辺ではないから、 A は最大角ではない。

よって、 A は鋭角であるから $A = 60^\circ$

したがって $C = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$



3 三角形の面積

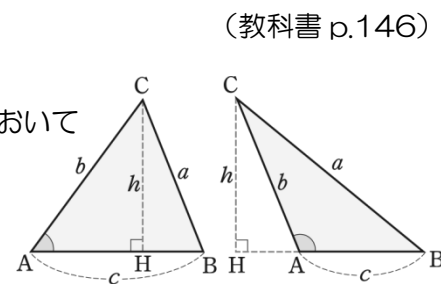
△ABCの面積 S を、2辺とその間の角によって表してみよう。

△ABCの辺ABから頂点Cまでの高さを h とすると、右の図において

$$h = b \sin A$$

したがって

$$S = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc \sin A$$



他の2辺とその間の角からも、同様の公式が得られる。

三角形の面積
$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$

問 11 次の△ABCの面積 S を求めよ。

(1) $b = 2, c = 5, A = 60^\circ$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

(2) $a = 7, b = 4, C = 135^\circ$

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 \sin 135^\circ = 7\sqrt{2}$$

例題 $a = 13, b = 14, c = 15$ である△ABCの面積 S を求めよ。

5

解 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{14^2 + 15^2 - 13^2}{2 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{3}{5}$$

よって $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ ◀ $\sin A > 0$

ゆえに、三角形の面積の公式により

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 \cdot \frac{4}{5} = 84$$

問 12 $a = 13, b = 8, c = 7$ である△ABCの面積 S を求めよ。

余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 7^2 - 13^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} = -\frac{1}{2}$$

よって $A = 120^\circ$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 \sin 120^\circ = 14\sqrt{3}$$

円に内接する四角形

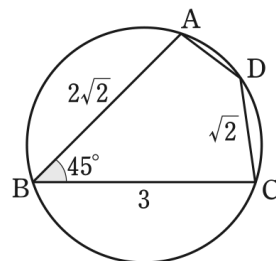
応用 例題 6 円に内接する四角形 ABCD において

$AB = 2\sqrt{2}, BC = 3, CD = \sqrt{2}$

$\angle ABC = 45^\circ$

とするとき、AD を求めよ。

また、四角形 ABCD の面積 S を求めよ。



解 対角線 AC を引き、 $\triangle ABC$ に余弦定理を用いると

$$AC^2 = (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cos 45^\circ$$

$$= 8 + 9 - 12 = 5$$

$AC > 0$ より $AC = \sqrt{5}$

四角形 ABCD は円に内接するから $D = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

AD = x として、 $\triangle ACD$ に余弦定理を用いると

$$(\sqrt{5})^2 = x^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{2} \cos 135^\circ$$

すなわち $x^2 + 2x - 3 = 0$

これを解いて $x = 1, -3$

$x > 0$ より $AD = 1$ ……答

また $S = \triangle ABC + \triangle ACD$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \sin 135^\circ$$

$$= \frac{7}{2} \dots\dots答$$

(教科書 p.147)

問 13 円に内接する四角形 ABCD において、 $AB = 5, BC = 4, CD = 4, \angle ABC = 60^\circ$ とするとき、AD を求めよ。

また、四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

対角線 AC を引き、 $\triangle ABC$ に余弦定理を用いると

$$AC^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos 60^\circ$$

$$= 21$$

$AC > 0$ より $AC = \sqrt{21}$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

AD = x として、 $\triangle ACD$ に余弦定理を用いると

$$(\sqrt{21})^2 = x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 \cos 120^\circ$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

これを解いて $x = 1, -5$

$x > 0$ より $x = 1$

よって $AD = 1$

また

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \sin 120^\circ$$

$$= 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

三角形の内接円の半径と面積

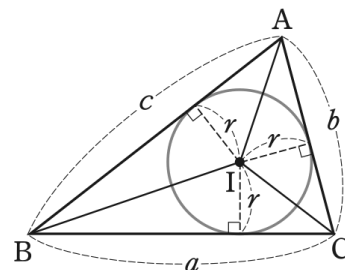
(教科書 p.148)

△ABCの3辺AB, BC, CAのすべてに接する円はただ1つ存在する。
これを△ABCの(1) **内接円**)という。

△ABCの内接円の半径を r , 中心を I とすると, △ABCの面積 S は

$$S = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$

すなわち $S = \frac{1}{2}r(a + b + c)$



例題 3辺の長さが $a = 3, b = 7, c = 8$ である△ABCがある。このとき, 次の問に答えよ。

- 7** (1) △ABCの面積 S を求めよ。
(2) △ABCの内接円の半径 r を求めよ。

解 (1) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{7^2 + 8^2 - 3^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{13}{14}$$

よって $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{13}{14}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$

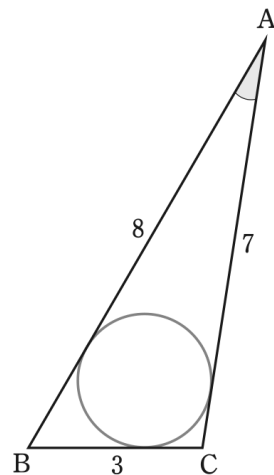
ゆえに, 求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \sin A = 6\sqrt{3}$$

- (2) $S = \frac{1}{2}r(a + b + c)$ より

$$6\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (3 + 7 + 8)$$

ゆえに, 求める半径 r は $r = \frac{6\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



問 14 $a = 7, b = 6, c = 5$ である△ABCの内接円の半径 r を求めよ。

余弦定理により

$$\cos A = \frac{6^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{5}$$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

△ABCの面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \sin A = 6\sqrt{6}$$

一方, △ABCの内接円の半径を r とすると,

$$S = \frac{1}{2}r(a + b + c) \text{ より}$$

$$6\sqrt{6} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (7 + 6 + 5)$$

$$r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

4 空間図形の計量

例題 1辺の長さが3の立方体 $ABCD - EFGH$ の辺 AB 上に点 P , 辺 BF 上に点 Q を

$$BP = 1, BQ = 2$$

となるようにとる。このとき、 $\triangle CPQ$ の面積 S を求めよ。

解 $\triangle CPQ$ の3辺の長さは

$$PQ = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$CP = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$CQ = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

である。 $\angle CPQ = \theta$ とおくと、余弦定理により

$$\cos \theta = \frac{CP^2 + PQ^2 - CQ^2}{2 \cdot CP \cdot PQ} = \frac{10 + 5 - 13}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\text{よって } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

ゆえに、求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot CP \cdot PQ \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{7}{2}$$

問 15 右の図の直方体 $ABCD - EFGH$ において

$$AB = 3, BC = 6, BF = 2$$

である。このとき、 $\triangle DEG$ の面積 S を求めよ。

$\triangle DEG$ の3辺の長さは

$$DE = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

$$EG = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

$$GD = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

である。 $\angle DEG = \theta$ とおくと、余弦定理により

$$\cos \theta = \frac{(2\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{5})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

$$\text{よって } \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2}$$

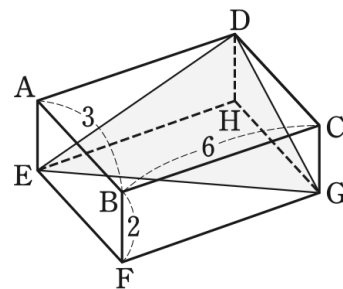
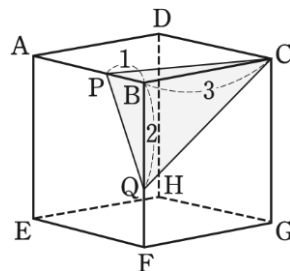
$$= \frac{\sqrt{7}}{5}$$

ゆえに、求める面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot EG \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{7}}{5} = 3\sqrt{14}$$

(教科書 p.149)



応用
例題

9

1 辺の長さが a の正四面体 ABCD において、辺 BC の中点を M とし、頂点 A から DM に下ろした垂線を AH とする。

$\angle AMD = \theta$ とするとき、次の間に答えよ。

- (1) $\cos \theta$ の値を求めよ。
 (2) AH の長さを a で表せ。

解

- (1) AM および DM の長さを求める。

M は正三角形 ABC の辺 BC の中点であるから

$$\angle ABM = 60^\circ, \angle AMB = 90^\circ$$

$$\text{よって } AM = a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\text{同様に } DM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$\triangle AMD$ に対して余弦定理を用いると、 $\cos \theta$ の値は

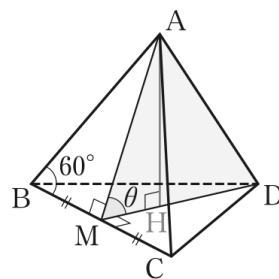
$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{AM^2 + DM^2 - AD^2}{2 \cdot AM \cdot DM} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - a^2}{2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- (2) (1)で得られた $\cos \theta$ の値から $\sin \theta$ の値を求めると

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって

$$AH = AM \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$



問 16 例題 9 において、正四面体 ABCD の体積 V を a で表せ。

$\triangle BCD$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

AM \perp BC, DM \perp BC より

平面 ADM \perp BC

よって AH \perp BC

これと、AH \perp DM より平面 BCD \perp AH となり、AH は正四面体の高さを表す。

$$\text{例題 9 より } AH = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

よって

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S \cdot AH \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \end{aligned}$$

〔別解〕例題 9 の結果を用いると、 $\triangle AMD$ の面積は

$$\triangle AMD = \frac{1}{2} \cdot DM \cdot AH = \frac{\sqrt{2}}{4}a^2$$

また、正四面体 ABCD の体積は、 $\triangle AMD$ を底面とする高さが BM および CM の 2 つの三角錐の体積の和として表される。

したがって

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle AMD \cdot BM + \frac{1}{3} \cdot \triangle AMD \cdot CM \\ &= \frac{1}{3} \cdot \triangle AMD \cdot (BM + CM) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}a^2 \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \end{aligned}$$

問題

(教科書 p.151)

11 $\triangle ABC$ において、 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ であるとき、3辺 a, b, c の間に成り立つ関係式を答えよ。

また、 $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とおくと、正弦定理により

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

これらを $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ に代入すると

$$\frac{a^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} = \frac{c^2}{4R^2}$$

ゆえに、3辺 a, b, c の間には、等式 $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つ。

よって、 $\triangle ABC$ は $C = 90^\circ$ の直角三角形である。

12 $\triangle ABC$ において、 $AB = 4, AC = 3, A = 60^\circ$ とし、辺 BC の中点を M とする。

このとき、次の値を求めよ。

(1) BC

余弦定理により

$$BC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 60^\circ = 13$$

$$BC > 0 \text{ より } BC = \sqrt{13}$$

(2) $\cos B$

余弦定理により

$$\cos B = \frac{4^2 + (\sqrt{13})^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{13}}$$

$$= \frac{20}{8\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$$

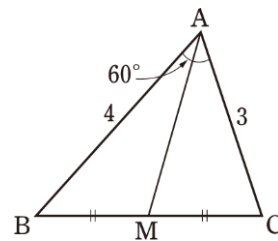
(3) AM

$\triangle ABM$ に余弦定理を用いると

$$AM^2 = 4^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{26}$$

$$= \frac{37}{4}$$

$$AM > 0 \text{ より } AM = \frac{\sqrt{37}}{2}$$



13 $\triangle ABC$ において、その面積を S とするとき、次の間に答えよ。

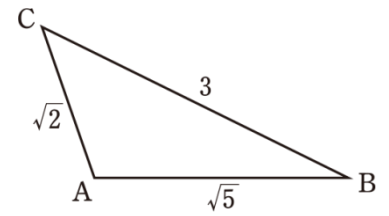
(1) $a = 3, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{5}$ のとき、 C, S を求めよ。

余弦定理により

$$\cos C = \frac{3^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $C = 45^\circ$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} \sin 45^\circ = \frac{3}{2}$$



(2) $c = \sqrt{2}, b = 2, B = 135^\circ$ のとき、 C, a, S を求めよ。

正弦定理により

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

ゆえに

$$\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{\sqrt{2} \sin 135^\circ}{2} = \frac{1}{2}$$

C は鋭角であるから $C = 30^\circ$

余弦定理により

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

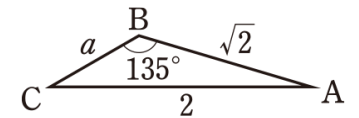
$$2^2 = (\sqrt{2})^2 + a^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot a \cos 135^\circ$$

$$a^2 + 2a - 2 = 0$$

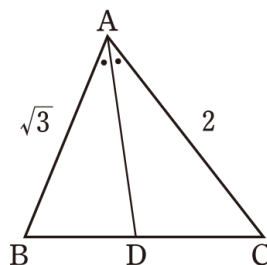
$$a > 0 \text{ であるから } a = \sqrt{3} - 1$$

$$S = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \sin 135^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$



- 14 $\triangle ABC$ において、 $AB = \sqrt{3}$ 、 $AC = 2$ 、 $A = 60^\circ$ とし、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とする。このとき、次の問に答えよ。



- (1) $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \sin 60^\circ \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

- (2) AD を求めよ。

$AD = x$ とおくと

$\triangle ABD + \triangle ACD = \triangle ABC$ であるから

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \sin 30^\circ = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}+2}{4} x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{3}+2}$$

$$= 12 - 6\sqrt{3}$$

よって $AD = 12 - 6\sqrt{3}$

- 15 1 辺の長さが 2 の正方形 $ABCD$ を底面とし、4 個の正三角形を側面とする正四角錐 $OABCD$ がある。辺 OB の中点を M 、 $\angle AMC = \theta$ とするとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

$\triangle ABM$ は、 $\angle AMB = 90^\circ$ 、 $\angle ABM = 60^\circ$ の直角三角形であるから

$$AM = AB \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

同様に $CM = \sqrt{3}$

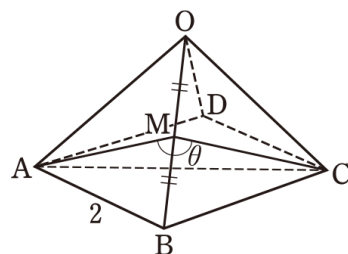
また、四角形 $ABCD$ は 1 辺が 2 の正方形であるから

$$AC^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$AC > 0$ より $AC = 2\sqrt{2}$

よって、余弦定理により

$$\cos \theta = \frac{AM^2 + CM^2 - AC^2}{2 \cdot AM \cdot CM} = \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$



発展

三角形の形状

(教科書 p.152)

三角形において、与えられた辺や角の三角比の等式から、その三角形がどのような形であることを求めてみよう。

例題 $\triangle ABC$ において、次の等式が成り立つとき、この三角形はどのような形の三角形か。

1 $\sin A \cos B = \sin C$

解 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、正弦定理により

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

余弦定理により

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

これらを与えられた等式に代入すると

$$\frac{a}{2R} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{c}{2R}$$

両辺に $4cR$ を掛けると

$$c^2 + a^2 - b^2 = 2c^2$$

よって

$$a^2 = b^2 + c^2$$

したがって、 $\triangle ABC$ は $A = 90^\circ$ の直角三角形である。

問1 $\triangle ABC$ において、次の等式が成り立つとき、この三角形はどのような形の三角形か。

(1) $a \sin A = b \sin B$

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、正弦定理により

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①を与えられた等式に代入すると

$$a \cdot \frac{a}{2R} = b \cdot \frac{b}{2R}$$

すなわち $a^2 = b^2$

$a > 0, b > 0$ より $a = b$

よって、 $\triangle ABC$ は $AC = BC$ の二等辺三角形である。

(2) $a \cos A + b \cos B = c \cos C$

$\triangle ABC$ について、余弦定理を用いると

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

これらを与えられた等式に代入すると

$$a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

両辺に $2abc$ を掛けて

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(c^2 + a^2 - b^2) = c^2(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$c^4 - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4) = 0$$

$$c^4 - (a^2 - b^2)^2 = 0$$

$$(c^2 - a^2 + b^2)(c^2 + a^2 - b^2) = 0$$

よって $a^2 = b^2 + c^2$ または $b^2 = c^2 + a^2$

したがって、 $\triangle ABC$ は $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形 または $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形である。

発展

ヘロンの公式

(教科書 p.153)

3 辺 a, b, c が与えられたときの $\triangle ABC$ の面積 S を求めてみよう。

$S = \frac{1}{2}bc \sin A$ の両辺を 2 倍してから 2 乗すると

$$\begin{aligned} 4S^2 &= b^2c^2\sin^2A \\ &= b^2c^2(1 - \cos^2A) \\ &= b^2c^2(1 + \cos A)(1 - \cos A) \quad \dots\dots\textcircled{1} \end{aligned}$$

余弦定理により $1 + \cos A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$

$$= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}$$

同様にして $1 - \cos A = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$

ここで、 $a + b + c = 2s$ とおくと

$$-a + b + c = 2(s - a), \quad a - b + c = 2(s - b), \quad a + b - c = 2(s - c)$$

よって $1 + \cos A = \frac{2s(s-a)}{bc}$, $1 - \cos A = \frac{2(s-b)(s-c)}{bc}$

これらを①に代入して $4S^2 = 4s(s-a)(s-b)(s-c)$

したがって $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ヘロンの公式
$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ただし、 $s = \frac{a+b+c}{2}$

例 1 3 辺の長さが 4, 5, 7 である三角形の面積 S を求めてみよう。

ヘロンの公式により、 $s = \frac{4+5+7}{2} = 8$ であるから

$$S = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} = 4\sqrt{6}$$

問 1 3 辺の長さが 5, 6, 9 である三角形の面積 S を求めよ。

ヘロンの公式により、 $s = \frac{5+6+9}{2} = 10$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{10 \cdot (10-5) \cdot (10-6) \cdot (10-9)} \\ &= 10\sqrt{2} \end{aligned}$$