2 節 三角比の拡張

1 三角比と座標

（教科書 p.128）

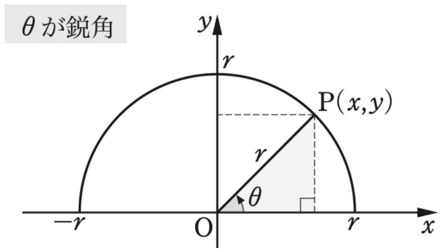
x 軸の正の部分を原点のまわりに θ だけ回転して得られる半直線を考え，この半直線と原点を中心とする半径 r の円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

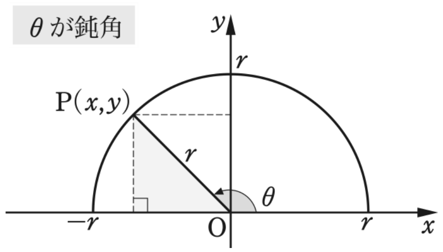
ただし，回転の向きは時計の針の回転と逆の向きとする。

このとき，角 θ に対する三角比を次のように定める。

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

三角比の値は，角 θ だけで定まり，半径 r の大きさによらない。





θ が鈍角のときは $x<0,\ y>0$ であるから

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta<0$

となる。

これらをまとめると，三角比の符号は，右の表のようになる。

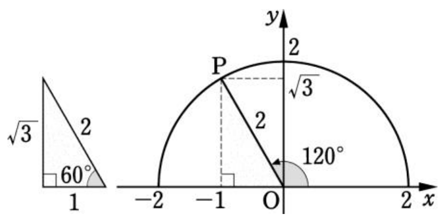
θ	鋭角	鈍角
$\sin\theta$	＋	＋
$\cos\theta$	＋	−
$\tan\theta$	＋	−

例 1 半径 2 の円において，$\theta=120^\circ$ とすると点 P の座標は下の図より $(-1,\ \sqrt{3})$ であるから，120° の三角比の値は次のようになる。

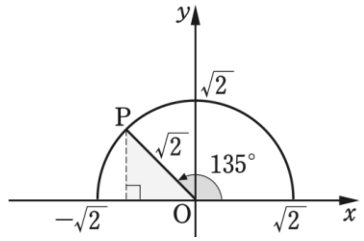
$\sin 120^\circ=$

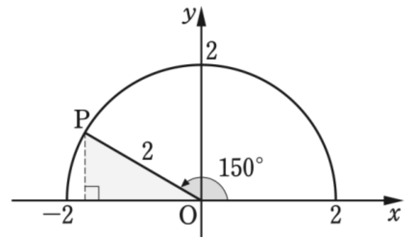
$\cos 120^\circ=$

$\tan 120^\circ=$



問1 次の図を用いて，135°，150° の三角比の値を求めよ。





単位円の周上の点の座標

（教科書 p.130）

原点を中心とする半径 1 の円を（1　　　　　　）という。単位円で考えると，角 θ を表す半径を OP，点 P の座標を $(x,\ y)$ とするとき，三角比の定義から

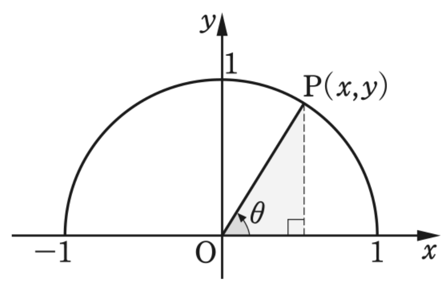
$$\sin\theta=y,\quad \cos\theta=x,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

である。

したがって，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき

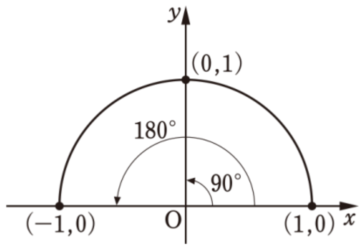
$$-1\leqq\cos\theta\leqq 1,\quad 0\leqq\sin\theta\leqq 1$$

が成り立つ。



0°，90°，180°の三角比

（教科書 p.130）



単位円において，半径 OP が表す角が 0°，90°，180° のとき，点 P の座標はそれぞれ

$(1,\ 0)$,　$(0,\ 1)$,　$(-1,\ 0)$

となる。よって，0°，90°，180° の三角比の値は，次のようになる。

$\sin 0° = 0$,　$\cos 0° = 1$,　$\tan 0° = 0$

$\sin 90° = 1$,　$\cos 90° = 0$,　$\tan 90°$ は定義されない

$\sin 180° = 0$,　$\cos 180° = -1$,　$\tan 180° = 0$

いろいろな角の三角比の値を表にまとめると，次のようになる。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	／	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

正弦･余弦の値から角を求めること

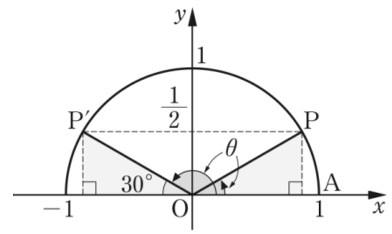
（教科書 p.131）

例題 1　次の等式を満たす角 θ を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1)　$\sin\theta = \frac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

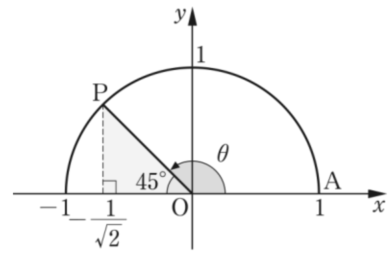
解　(1)　単位円の周上で，y 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の 2 点 P，P′ である。

求める角 θ は ∠AOP，∠AOP′ であるから



(2)　単位円の周上で，x 座標が $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点は，右の図の点 P である。

求める角 θ は ∠AOP であるから



問2 次の等式を満たす角 θ を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos\theta = -1$

問3 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，$2\cos\theta - 1 = 0$ を満たす角 θ を求めよ。

正接の値がとり得る範囲

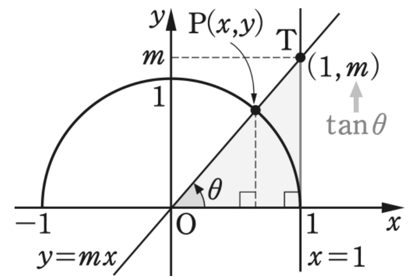
（教科書 p.132）

正接の値がとり得る範囲について，単位円と直線 $x=1$ を利用して考えてみよう。

実数 m が与えられたとき，直線 $x=1$ 上に点 $\mathrm{T}(1,\ m)$ をとる。

直線 OT と単位円の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，半径 OP が表す角を θ とすると

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{m}{1} = m$



したがって，$0° \leqq \theta < 90°$，$90° < \theta \leqq 180°$ のとき，

（1　　　　　　　　　　　　　　　　）をとる。

例題 2 次の等式を満たす角 θ を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

$\tan\theta = -\sqrt{3}$

解 直線 $x=1$ 上に

点 $\mathrm{T}(1,\ -\sqrt{3})$

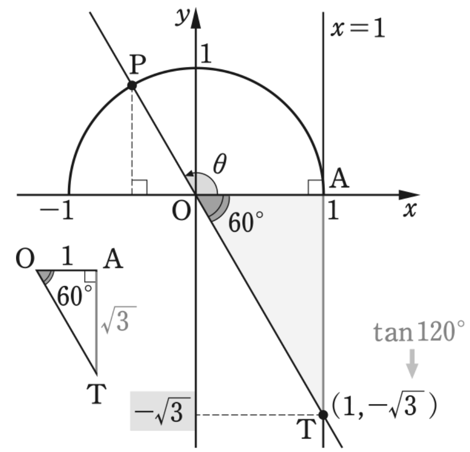
をとる。

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ であるから，直線 OT と単位円の交点 P を右の図のようにとると

$\theta = \angle\mathrm{AOP}$

である。

$\angle\mathrm{TOA} = 60°$ であるから



問4 次の等式を満たす角 θ を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1) $\tan\theta = \sqrt{3}$

(2) $\tan\theta = -1$

直線の傾きと正弦

（教科書 p.133）

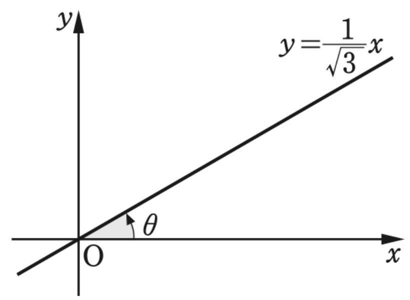
例 2 $\tan 45^\circ = 1$ であるから，x 軸の正の向きとなす角が 45° である直線の傾きは（　　　　）である。

問5 x 軸の正の向きとなす角が 135° である直線の傾きを求めよ。

例 3 直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ が x 軸の正の向きとなす角 θ を求めてみよう。

$\tan\theta =$

であるから



問6 次の直線が x 軸の正の向きとなす角を求めよ。

(1) $y = -\sqrt{3}x$

(2) $y = x + 2$

2 三角比の性質

三角比の相互関係

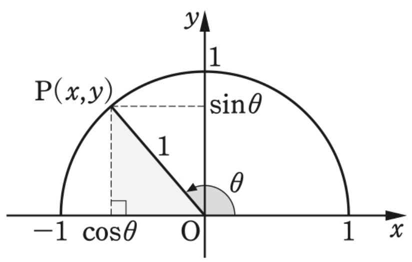
（教科書 p.134）

単位円で三角比を考えると

$x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$

であるから

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$



また，三平方の定理により，$x^2 + y^2 = 1$ であるから

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

すなわち，角 θ の範囲が $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のときも次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係(1)
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，　　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

例題 3　$\sin\theta = \frac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

解　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta =$

(ⅰ)　θ が鋭角のとき，$\cos\theta > 0$ であるから

$\cos\theta =$　　　，$\tan\theta =$

(ⅱ)　θ が鈍角のとき，$\cos\theta < 0$ であるから

$\cos\theta =$　　　，$\tan\theta =$

問7　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta = \frac{5}{13}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値

(2)　$\cos\theta = -\frac{1}{4}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値

等式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

ここで，$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$ であるから，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のときも次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係(2)
$\mathbf{1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}}$

例題 4　$\tan\theta=-2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。
ただし，$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。

解　$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=$

$\tan\theta<0$ より，θ は鈍角であるから $\cos\theta<0$

よって　$\cos\theta=$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$

問8　$\tan\theta=-\frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。ただし，$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。

180° − θ の三角比

（教科書 p.136）

右の図のように，点 $P(x,\ y)$ と点 $P'(-x,\ y)$ は y 軸に関して対称であるから，$\angle AOP=\theta$ とおくと

$\angle AOP'=180°-\theta$

である。

よって

$\sin(180°-\theta)=y=\sin\theta$

$\cos(180°-\theta)=-x=-\cos\theta$

$\tan(180°-\theta)=\frac{y}{-x}=-\frac{y}{x}=-\tan\theta$

したがって，次の公式が成り立つ。

180° − θ の三角比
$\mathbf{\sin(180°-\theta)=\sin\theta}$ $\mathbf{\cos(180°-\theta)=-\cos\theta}$ $\mathbf{\tan(180°-\theta)=-\tan\theta}$

この公式により，鈍角の三角比は鋭角の三角比になおして，その値を求めることができる。

例 4　三角比の表を用いて，次の値を求めてみよう。

$\sin154°=\sin(180°-26°)=$

$\cos154°=\cos(180°-26°)=$

$\tan154°=\tan(180°-26°)=$

問9　三角比の表を用いて，次の値を求めよ。

(1)　$\sin140°$

(2)　$\cos118°$

(3)　$\tan163°$

問 題

（教科書 p.137）

5　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$2\cos^2\theta - 1 = 0$ を満たす角 θ を求めよ。

6　$\sin 36^\circ = 0.588$，$\cos 36^\circ = 0.809$，$\tan 36^\circ = 0.727$ を用いて，次の三角比の値を求めよ。

(1)　$\sin 144^\circ$

(2)　$\cos 144^\circ$

(3)　$\tan 144^\circ$

(4)　$\sin 126^\circ$

(5)　$\cos 126^\circ$

7　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta = \frac{3}{4}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値

(2)　$\tan\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値

8 等式

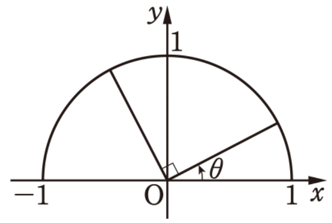
$$1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

が成り立つことを証明せよ。

9 $0°\leqq\theta\leqq90°$ とするとき，次の三角比を θ の三角比を用いて表せ。

(1)　$\sin(90°+\theta)$

(2)　$\cos(90°+\theta)$



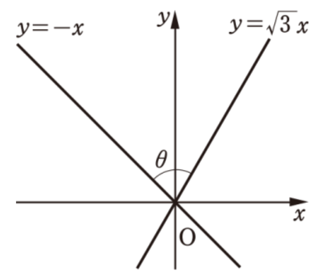
10 2 直線

$y=\sqrt{3}x$

$y=-x$

のなす角 θ を求めよ。

ただし，$0°\leqq\theta\leqq90°$ とする。



2節 三角比の拡張

1 三角比と座標

（教科書 p.128）

x 軸の正の部分を原点のまわりに θ だけ回転して得られる半直線を考え，この半直線と原点を中心とする半径 r の円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

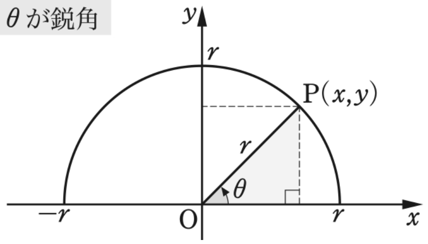
ただし，回転の向きは時計の針の回転と逆の向きとする。

このとき，角 θ に対する三角比を次のように定める。

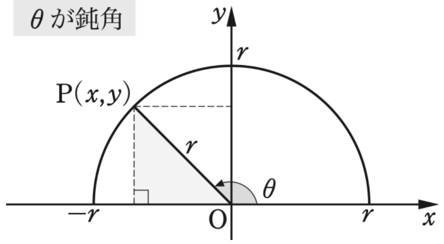
$$\sin\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r},\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

三角比の値は，角 θ だけで定まり，半径 r の大きさによらない。

θ が鋭角



θ が鈍角



θ が鈍角のときは $x<0,\ y>0$ であるから

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0,\ \tan\theta<0$

となる。

これらをまとめると，三角比の符号は，右の表のようになる。

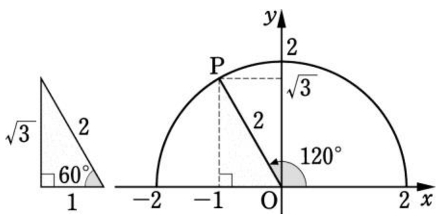
θ	鋭角	鈍角
$\sin\theta$	＋	＋
$\cos\theta$	＋	−
$\tan\theta$	＋	−

例 1 半径 2 の円において，$\theta=120°$ とすると点 P の座標は下の図より $(-1,\ \sqrt{3})$ であるから，$120°$ の三角比の値は次のようになる。

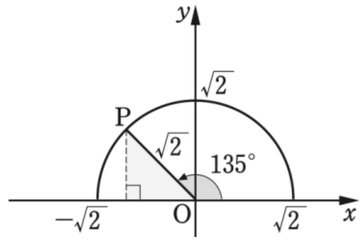
$\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

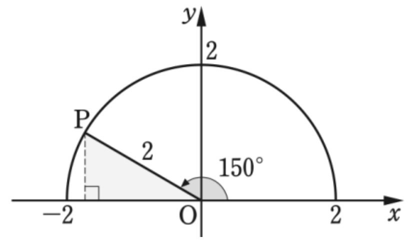
$\cos 120° = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\tan 120° = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$



問1 次の図を用いて，$135°$，$150°$ の三角比の値を求めよ。



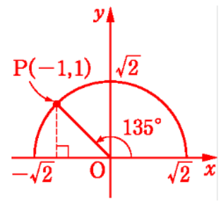


・半径 $\sqrt{2}$ の円において，$\theta=135°$ とすると，
$\mathrm{P}(-1,\ 1)$ であるから

$\sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 135° = -1$

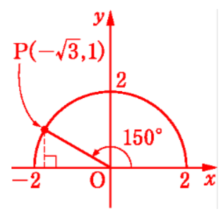


・半径 2 の円において，$\theta=150°$ とすると，
$\mathrm{P}(-\sqrt{3},\ 1)$ であるから

$\sin 150° = \frac{1}{2}$

$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$



単位円の周上の点の座標

（教科書 p.130）

原点を中心とする半径 1 の円を（[1] 単位円 ）という。単位円で考えると，角 θ を表す半径を OP，点 P の座標を $(x,\ y)$ とするとき，三角比の定義から

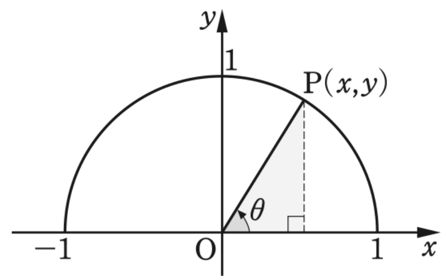
$$\sin\theta = y,\quad \cos\theta = x,\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

である。

したがって，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき

$$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1,\quad 0 \leqq \sin\theta \leqq 1$$

が成り立つ。



0°，90°，180°の三角比

（教科書 p.130）

単位円において，半径 OP が表す角が 0°，90°，180° のとき，点 P の座標はそれぞれ

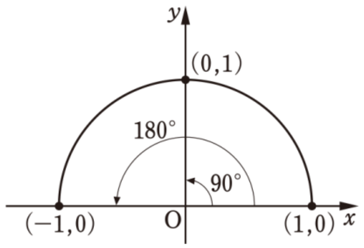
$(1,\ 0)$，　$(0,\ 1)$，　$(-1,\ 0)$

となる。よって，0°，90°，180° の三角比の値は，次のようになる。

$\sin 0° = 0$，　$\cos 0° = 1$，　$\tan 0° = 0$

$\sin 90° = 1$，　$\cos 90° = 0$，　$\tan 90°$ は定義されない

$\sin 180° = 0$，　$\cos 180° = -1$，　$\tan 180° = 0$



いろいろな角の三角比の値を表にまとめると，次のようになる。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	／	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

正弦・余弦の値から角を求めること

（教科書 p.131）

例題 1　次の等式を満たす角 θ を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

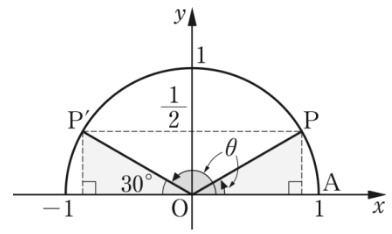
(1)　$\sin\theta = \frac{1}{2}$　　　(2)　$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

解

(1)　単位円の周上で，y 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は，右の図の 2 点 P，P′ である。

求める角 θ は ∠AOP，∠AOP′ であるから

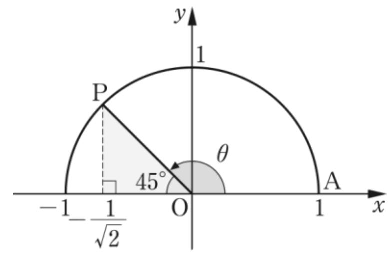
$\theta = 30°,\ 150°$



(2)　単位円の周上で，x 座標が $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点は，右の図の点 P である。

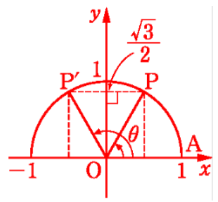
求める角 θ は ∠AOP であるから

$\theta = 135°$



問2 次の等式を満たす角 θ を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

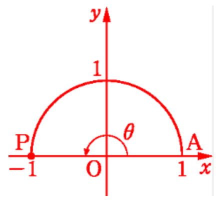


単位円の周上で，y 座標が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる点は，図の 2 点 P，P′ である。

求める角 θ は，∠AOP，∠AOP′ であるから

$\theta = 60°,\ 120°$

(2) $\cos\theta = -1$

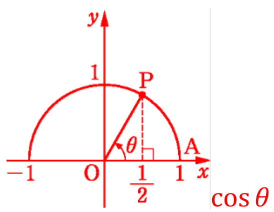


単位円の周上で，x 座標が -1 となる点は，図の点 P である。
求める角 θ は，
∠AOP であるから

$\theta = 180°$

問3 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，$2\cos\theta - 1 = 0$ を満たす角 θ を求めよ。

$2\cos\theta - 1 = 0$ より $\cos\theta = \frac{1}{2}$



単位円の周上で，x 座標が $\frac{1}{2}$ となる点は，図の点 P である。

求める角 θ は，∠AOP であるから

$\theta = 60°$

正接の値がとり得る範囲

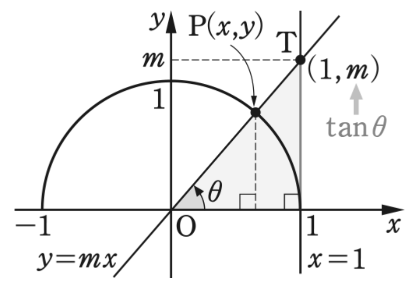
（教科書 p.132）

正接の値がとり得る範囲について，単位円と直線 $x = 1$ を利用して考えてみよう。

実数 m が与えられたとき，直線 $x = 1$ 上に点 $\mathrm{T}(1,\ m)$ をとる。

直線 OT と単位円の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，半径 OP が表す角を θ とすると

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{m}{1} = m$



したがって，$0° \leqq \theta < 90°$，$90° < \theta \leqq 180°$ のとき，

（[1] tan θ はすべての実数値 ）をとる。

例題 2 次の等式を満たす角 θ を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

$\tan\theta = -\sqrt{3}$

解 直線 $x = 1$ 上に

点 $\mathrm{T}(1,\ -\sqrt{3})$

をとる。

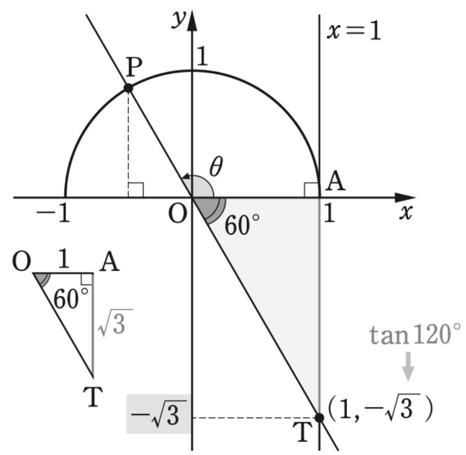
$0° \leqq \theta \leqq 180°$ であるから，直線 OT と単位円の交点 P を右の図のようにとると

$\theta = \angle\mathrm{AOP}$

である。

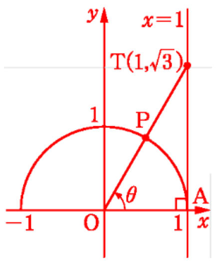
$\angle\mathrm{TOA} = 60°$ であるから

$\theta = 180° - 60° = 120°$



問4　次の等式を満たす角 θ を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1)　$\tan\theta = \sqrt{3}$



直線 $x = 1$ 上に点 $\mathrm{T}(1,\ \sqrt{3})$ をとる。

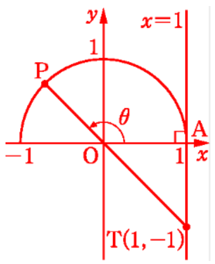
$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから，直線 OT と単位円の交点 P を図のようにとると

$\theta = \angle\mathrm{AOP}$

である。

よって　$\theta = 60^\circ$

(2)　$\tan\theta = -1$



直線 $x = 1$ 上に点 $\mathrm{T}(1,\ -1)$ をとる。

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから，直線 OT と単位円の交点 P を図のようにとると

$\theta = \angle\mathrm{AOP}$

である。

よって　$\theta = 135^\circ$

直線の傾きと正弦

（教科書 p.133）

例2　$\tan 45^\circ = 1$ であるから，x 軸の正の向きとなす角が 45° である直線の傾きは（　1　）である。

問5　x 軸の正の向きとなす角が 135° である直線の傾きを求めよ。

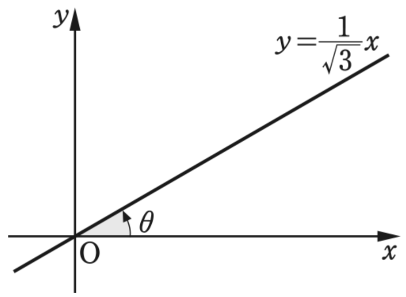
$\tan 135^\circ = -1$ であるから，直線の傾きは　-1

例3　直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ が x 軸の正の向きとなす角 θ を求めてみよう。

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

であるから

$\theta = 30^\circ$



問6　次の直線が x 軸の正の向きとなす角を求めよ。

(1)　$y = -\sqrt{3}x$

直線 $y = -\sqrt{3}x$ が x 軸の正の向きとなす角を θ とすると

$\tan\theta = -\sqrt{3}$

であるから　　$\theta = 120^\circ$

(2)　$y = x + 2$

直線 $y = x + 2$ が x 軸の正の向きとなす角を θ とすると

$\tan\theta = 1$

であるから　　$\theta = 45^\circ$

2 三角比の性質

三角比の相互関係

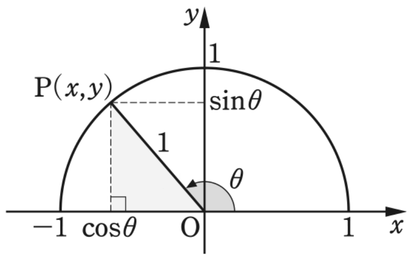
（教科書 p.134）

単位円で三角比を考えると

$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$

であるから

$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$



また，三平方の定理により，$x^2+y^2=1$ であるから

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

すなわち，角 θ の範囲が $0°\leqq\theta\leqq 180°$ のときも次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係(1)
$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

例題 3　$\sin\theta=\frac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

ただし，$0°\leqq\theta\leqq 180°$ とする。

解　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

（ｉ）　θ が鋭角のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$\cos\theta=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{5}\div\frac{4}{5}=\frac{3}{4}$

（ii）　θ が鈍角のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$\cos\theta=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{5}\div\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{4}$

〈答〉　$\cos\theta=\frac{4}{5}$，$\tan\theta=\frac{3}{4}$ または $\cos\theta=-\frac{4}{5}$，$\tan\theta=-\frac{3}{4}$

問7　$0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta=\frac{5}{13}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$

（ｉ）　θ が鋭角のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$\cos\theta=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{5}{13}\div\frac{12}{13}=\frac{5}{12}$

（ii）　θ が鈍角のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$\cos\theta=-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\frac{12}{13}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{5}{13}\div\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{5}{12}$

（ｉ），（ii）より

$\cos\theta=\frac{12}{13}$，$\tan\theta=\frac{5}{12}$

または

$\cos\theta=-\frac{12}{13}$，$\tan\theta=-\frac{5}{12}$

(2)　$\cos\theta=-\frac{1}{4}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$=1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ より，$\sin\theta>0$ であるから

$\sin\theta=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{15}}{4}\div\left(-\frac{1}{4}\right)=-\sqrt{15}$

等式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

ここで，$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$ であるから，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のときも次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係(2)
$\mathbf{1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}}$

例題 4　$\tan\theta=-2$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。
ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

解　$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-2)^2=5$ より $\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

$\tan\theta<0$ より，θ は鈍角であるから $\cos\theta<0$

よって　$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$　……答

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$

$=(-2)\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$　……答

問8　$\tan\theta=-\frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$

$=1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$

よって　$\cos^2\theta=\frac{9}{10}$

$\tan\theta<0$ より，θ は鈍角であるから

$\cos\theta<0$

よって　$\cos\theta=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$

$=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}$

180° − θ の三角比

(教科書 p.136)

右の図のように，点 $P(x,\ y)$ と点 $P'(-x,\ y)$ は y 軸に関して対称であるから，$\angle AOP=\theta$ とおくと

$\angle AOP'=180^\circ-\theta$

である。

よって

$\sin(180^\circ-\theta)=y=\sin\theta$

$\cos(180^\circ-\theta)=-x=-\cos\theta$

$\tan(180^\circ-\theta)=\frac{y}{-x}=-\frac{y}{x}=-\tan\theta$

したがって，次の公式が成り立つ。

180° − θ の三角比
$\mathbf{\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta}$ $\mathbf{\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta}$ $\mathbf{\tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta}$

この公式により，鈍角の三角比は鋭角の三角比になおして，その値を求めることができる。

例 4　三角比の表を用いて，次の値を求めてみよう。

$\sin 154^\circ=\sin(180^\circ-26^\circ)=\sin 26^\circ=0.4384$

$\cos 154^\circ=\cos(180^\circ-26^\circ)=-\cos 26^\circ=-0.8988$

$\tan 154^\circ=\tan(180^\circ-26^\circ)=-\tan 26^\circ=-0.4877$

問9　三角比の表を用いて，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 140^\circ$

$\sin 140^\circ=\sin(180^\circ-40^\circ)$

$=\sin 40^\circ=0.6428$

(2)　$\cos 118^\circ$

$\cos 118^\circ=\cos(180^\circ-62^\circ)$

$=-\cos 62^\circ=-0.4695$

(3)　$\tan 163^\circ$

$\tan 163^\circ=\tan(180^\circ-17^\circ)$

$=-\tan 17^\circ=-0.3057$

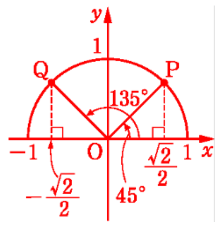
問 題

（教科書 p.137）

5 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，$2\cos^2\theta - 1 = 0$ を満たす角 θ を求めよ。

$2\cos^2\theta - 1 = 0$ より

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}$ すなわち　$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$



単位円の周上で，x 座標が $\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる点は右の図の P，

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる点は右の図の Q である。

よって

$\theta = 45°$ または　$\theta = 135°$

6 $\sin 36° = 0.588$，$\cos 36° = 0.809$，$\tan 36° = 0.727$ を用いて，次の三角比の値を求めよ。

(1)　$\sin 144°$

$\sin 144° = \sin(180° - 36°)$

$= \sin 36° = 0.588$

(2)　$\cos 144°$

$\cos 144° = \cos(180° - 36°)$

$= -\cos 36° = -0.809$

(3)　$\tan 144°$

$\tan 144° = \tan(180° - 36°)$

$= -\tan 36° = -0.727$

(4)　$\sin 126°$

$\sin 126° = \sin(180° - 54°) = \sin 54°$

$= \sin(90° - 36°) = \cos 36°$

$= 0.809$

(5)　$\cos 126°$

$\cos 126° = \cos(180° - 54°) = -\cos 54°$

$= -\cos(90° - 36°) = -\sin 36°$

$= -0.588$

7 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta = \frac{3}{4}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$

（ｉ）θ が鋭角のとき，$\cos\theta > 0$ であるから

$\cos\theta = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4} \div \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

（ii）θ が鈍角のとき，$\cos\theta < 0$ であるから

$\cos\theta = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4} \div \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{3}{\sqrt{7}}$

$= -\frac{3\sqrt{7}}{7}$

（ｉ），（ii）より

$\cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$，$\tan\theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

または

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\tan\theta = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$

(2)　$\tan\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値

$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$

$= 1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{9}{5}$

よって

$\cos^2\theta = \frac{5}{9}$

$\tan\theta < 0$ より θ が鈍角であるから

$\cos\theta < 0$

よって

$\cos\theta = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$

$= -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{2}{3}$

8　等式

$1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$

が成り立つことを証明せよ。

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ の両辺を $\sin^2\theta$ で割って

$1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より $\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\tan^2\theta}$

よって

$1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$

〔別証〕

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より $\frac{1}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから

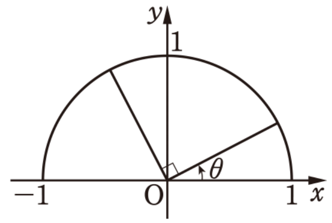
$1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = 1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= \frac{1}{\sin^2\theta}$

よって　$1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$

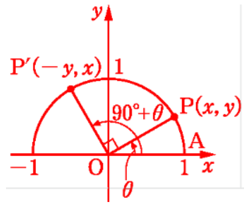
9　$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ とするとき，次の三角比を θ の三角比を用いて表せ。



(1)　$\sin(90^\circ + \theta)$

(2)　$\cos(90^\circ + \theta)$

図のように，点 $P(x,\ y)$ に対して，点 $P'(-y,\ x)$ をとる。



$\angle AOP = \theta$ とすると

$\angle AOP' = 90^\circ + \theta$

となる。

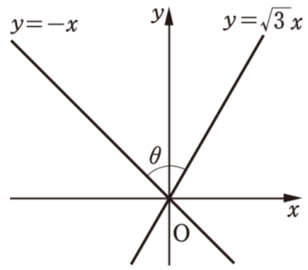
(1)　$\sin(90^\circ + \theta)$

$= x = \cos\theta$

(2)　$\cos(90^\circ + \theta)$

$= -y = -\sin\theta$

10　2 直線



$y = \sqrt{3}x$

$y = -x$

のなす角 θ を求めよ。

ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ とする。

2 直線 $y = \sqrt{3}x$，$y = -x$ がそれぞれ x 軸の正の向きとなす角を θ_1，θ_2 とする。ただし，$0^\circ \leqq \theta_1 < 180^\circ$，$0^\circ \leqq \theta_2 < 180^\circ$ とする。

$\tan\theta_1 = \sqrt{3}$　……①

$\tan\theta_2 = -1$　……②

①より　$\theta_1 = 60^\circ$

②より　$\theta_2 = 135^\circ$

よって　$\theta = \theta_2 - \theta_1 = 135^\circ - 60^\circ = 75^\circ$