1節 鋭角の三角比

1 直角三角形と三角比

正接，正弦，余弦

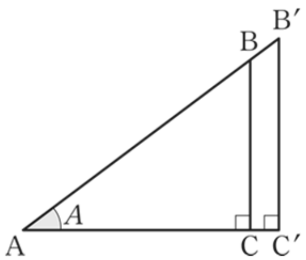
（教科書 p.118）

右の図において，△ABC と △AB′C′ は相似であるから

$AC : BC = AC' : B'C'$

よって $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$

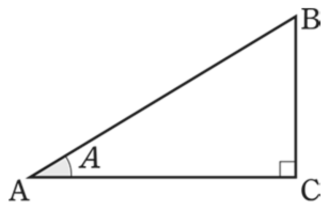
が成り立つ。



一般に，∠C が直角である直角三角形 ABC において，$\frac{BC}{AC}$ の値は △ABC の大きさに関係なく，∠A の大きさだけで定まる。∠A の大きさは A で表すことが多い。

$\frac{BC}{AC}$ を A の（1　　　　）または（2　　　　）といい，（3　　　　）と書く。

正接の場合と同じように，∠C が直角である直角三角形 ABC において，$\frac{BC}{AB}$，$\frac{AC}{AB}$ の値はいずれも ∠A の大きさ A だけで定まる。

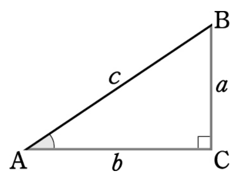


$\frac{BC}{AB}$ を A の（4　　　　）または（5　　　　）といい，

（6　　　　）と書く。

$\frac{AC}{AB}$ を A の（9　　　　）または（10　　　　）といい，（11　　　　）と書く。

正接，正弦，余弦をまとめて（12　　　　）という。

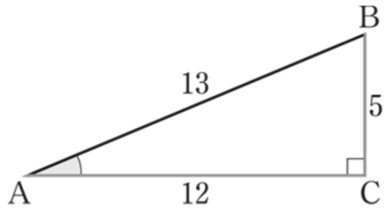
三角比
右の図の直角三角形 ABC において $\sin A = \frac{a}{c}$，　$\cos A = \frac{b}{c}$， $\tan A = \frac{a}{b}$ 

例 1 右の図の直角三角形において

$\sin A =$

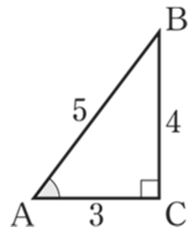
$\cos A =$

$\tan A =$

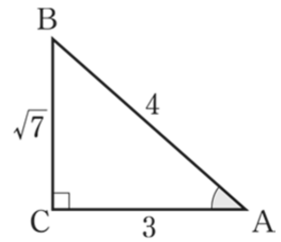


問1 次の図において，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ。

(1)



(2)

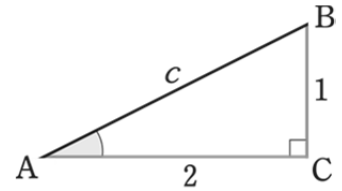


例 2 右の図の直角三角形において，斜辺 AB の長さを C とすると，三平方の定理により

$$c^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

$c > 0$ より　$c = \sqrt{5}$

ゆえに



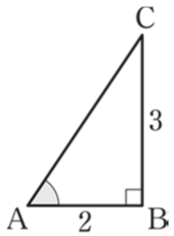
$\sin A =$

$\cos A =$

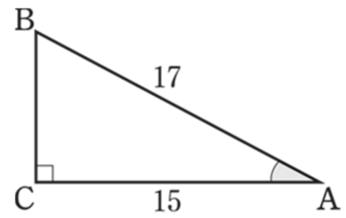
$\tan A =$

問 2 次の図において，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ。

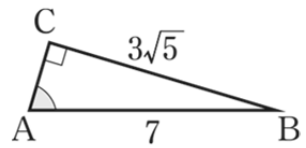
（1）



(2)



(3)



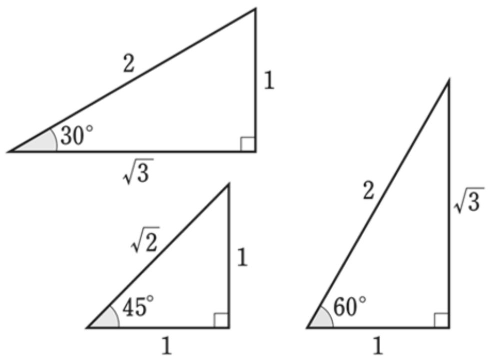
30°，45°，60° の三角比

（教科書 p.120）

30°，45°，60° の三角比の値は，下の図を用いて求めることができる。

これらの角の三角比の値を表にすると，下のようになる。

A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



三角比の表

（教科書 p.121）

207 ページの三角比の表に，0° から 90° まで 1° ごとの角に対する正弦，余弦，正接の値を小数第 4 位まで示した。

右の表はその三角比の表の一部である。

角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281

例 3 上の表から $\cos 48° =$（　　　　　　）

また, $\sin A = 0.7986$ を満たす A は $A =$（　　　　　　）

問3 三角比の表を用いて，次の値を求めよ。

（1）　$\sin 15°$

（2）　$\cos 67°$

（3）　$\tan 38°$

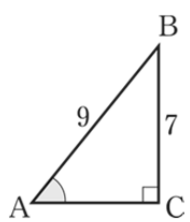
問4 三角比の表を用いて，次の式を満たす A を求めよ。

（1）　$\sin A = 0.9659$　　（2）　$\cos A = 0.9205$　　（3）　$\tan A = 2.3559$

例 4 右の図の直角三角形において，A を求めてみよう。

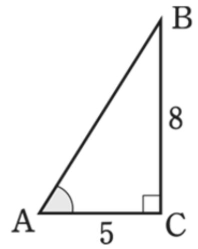
$$\sin A = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{7}{9} \fallingdotseq 0.7778$$

正弦が 0.7778 に最も近い A を三角比の表から求めると

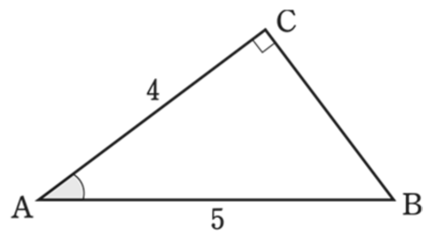


問5 三角比の表を用いて，次の A を求めよ。

（1）



（2）

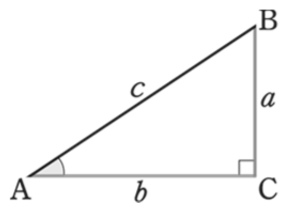


三角比の応用

（教科書 p.122）

三角比を利用して，いろいろな値を求めてみよう。

右の図の直角三角形 ABC において



$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，$\tan A=\frac{a}{b}$

であるから，次の式が成り立つ。

$a=$（[13]　　　　），$b=$（[14]　　　　），$a=$（[15]　　　　）

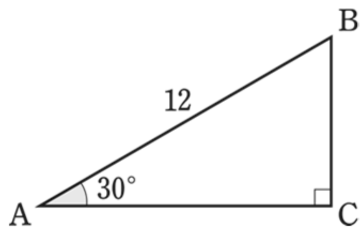
例 5 右の図の直角三角形において

$BC=AB\sin A$

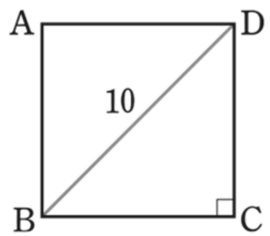
$=12\sin 30°=12\cdot\frac{1}{2}=6$

$AC=AB\cos A$

$=12\cos 30°=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

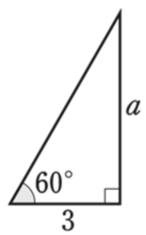


問6 正方形 ABCD において，$BD=10$ のとき，BC の長さを求めよ。

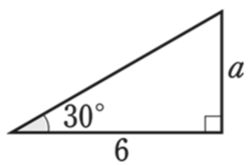


例 6 右の図の直角三角形において，a の値を求めてみよう。

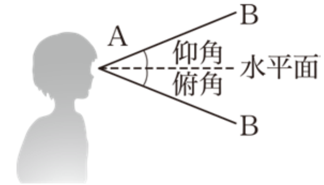
$a=$



問7 右の図の直角三角形において，a の値を求めよ。



右の図のように，点 A から点 B を見るとき，AB と A を通る水平面とのなす角を，B が水平面より上にあるならば（[16]　　　　）といい，下にあるならば（[17]　　　　）という。



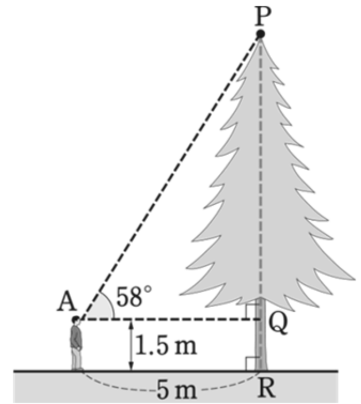
例題 1 平地に立っている木の根元から 5m 離れた地点に立って，木の上端を望むときの仰角，すなわち，右の図の ∠QAP は 58° であった。

目の高さを 1.5m とするとき，木の高さは何 m か。

ただし，$\tan 58°=1.6$ とする。

解 上の図において，木の高さ PR は

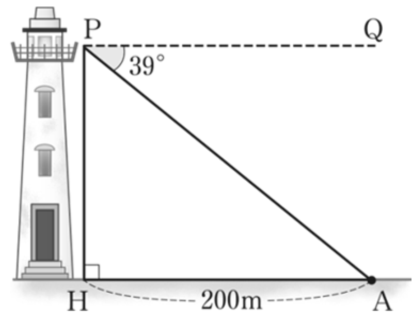
$PR=PQ+QR=$



問8 展望台 P から地上の A 地点を見下ろすときの俯角，すなわち，右の図の ∠QPA は 39° であった。

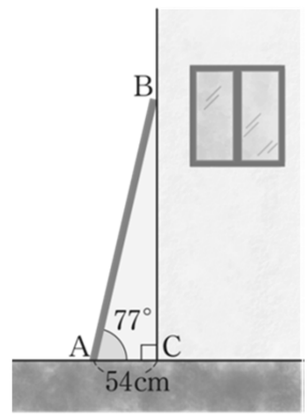
展望台から A 地点までの水平距離 AH が 200m であるとすると，展望台の高さ PH は何 m か。

ただし，$\tan 39°=0.81$ とする。



問9 右の図のように，家の壁にはしご AB を立て掛けて，はしごと地面とのなす角 ∠BAC が 77° になるようにした。

はしごの下端 A と壁との距離 AC が 54cm であるとき，はしごの長さ AB を三角比の表を用いて求めよ。



2 三角比の相互関係

（教科書 p.124）

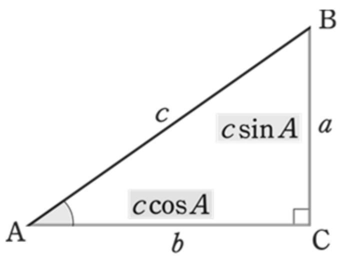
右の図の直角三角形において

$$a = c\ \sin A,\ b = c\ \cos A$$

である。

よって

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{c\sin A}{c\cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$



また，三平方の定理により，$a^2 + b^2 = c^2$ であるから

$$(c\sin A)^2 + (c\ \cos A)^2 = c^2$$

両辺を c^2 で割ると　$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

ふつう，$(\sin A)^2$，$(\cos A)^2$ をそれぞれ $\sin^2 A$，$\cos^2 A$ と書く。

以上より，次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係(1)
$\boldsymbol{\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}}$,　　$\boldsymbol{\sin^2 A + \cos^2 A = 1}$

例題 2 A が鋭角で，$\cos A = \frac{5}{7}$ であるとき，$\sin A$，$\tan A$ の値を求めよ。

解 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ であるから

$\sin^2 A =$

$\sin A > 0$ であるから

$\sin A =$

また　$\tan A =$

問 10 A が鋭角で，$\sin A = \frac{1}{3}$ であるとき，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ。

等式 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ の両辺を $\cos^2 A$ で割ると

$$\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}$$

ここで，$\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$ であるから，次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係(2)
$\boldsymbol{1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}}$

例題 3 A が鋭角で，$\tan A = 3$ であるとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。

解 $1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$であるから

$\frac{1}{\cos^2 A} =$

よって

$\cos A > 0$ であるから

$\cos A =$

また，$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ であるから

$\sin A$

問 11 A が鋭角で，$\tan A = \frac{1}{2}$ であるとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。

90° −A の三角比

（教科書p.126）

$\sin 30° = \frac{1}{2}$，$\cos 60° = \frac{1}{2}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

が成り立つ。

また，三角比の表をくわしく見ると，0° から 90° までの正弦の数値の配列を逆に並べたものは，0° から 90° までの余弦の数値の配列に一致している。

角	正弦(sin)	余弦(cos)
0°	0.0000	1.0000
1°	0.0175	0.9998
2°	0.0349	0.9994
3°	0.0523	0.9986
4°	0.0698	0.9976
5°	0.0872	0.9962
85°	0.9962	0.0872
86°	0.9976	0.0698
87°	0.9986	0.0523
88°	0.9994	0.0349
89°	0.9998	0.0175
90°	1.0000	0.0000

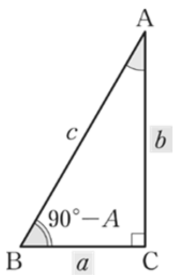
一般に，A と $90° - A$ の三角比の間にどのような関係があるかを調べてみよう。

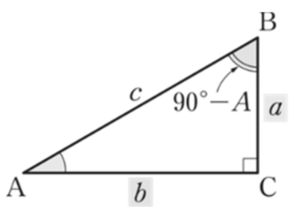
右の図の直角三角形において

$\sin B = \frac{b}{c}$，$\cos A = \frac{b}{c}$

$\cos B = \frac{a}{c}$，$\sin A = \frac{a}{c}$

$\tan B = \frac{b}{a}$，$\tan A = \frac{a}{b}$





ここで　$B = 90° - A$

であるから，次の公式が成り立つ。

90° − A の三角比

$$\sin(90° - A) = \cos A \qquad \tan(90° - A) = \frac{1}{\tan A}$$
$$\cos(90° - A) = \sin A$$

この公式を用いると，鋭角の三角比を 45° 以下の角の三角比で表すことができる。

例 7 $\sin 63° =$

$\cos 63° =$

$\tan 63° =$

問 12 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

(1)　$\sin 56°$

(2)　$\cos 87°$

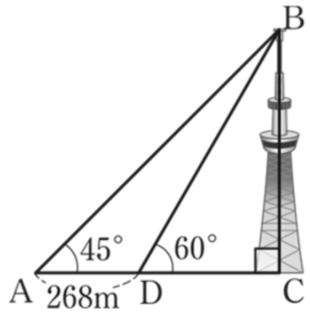
(3)　$\tan 72°$

問 題

（教科書 p.127）

1 地面に垂直に建つ塔がある。塔から離れた地点Aにおいて塔の先端Bの仰角を測ると 45° であり，そこから塔に 268m 近づいた地点Dでの仰角は 60° である。

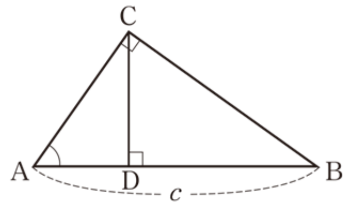
このとき，塔の高さは約何mか。



2 右の図の直角三角形ABCにおいて

$AB=c$

とおくとき，次の線分の長さを c とAの三角比を用いて表せ。



(1) BC

(2) CD

(3) DB

3 A が鋭角で，$\cos A=\frac{5}{13}$ であるとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin A$

(2) $\tan A$

(3) $\sin(90°-A)$

(4) $\cos(90°-A)$

4 △ABC の 3 つの角の大きさを A, B, C とする。このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$

(2) $\tan\frac{A+B}{2}\tan\frac{C}{2}=1$

1 節 鋭角の三角比

1 直角三角形と三角比

正接，正弦，余弦

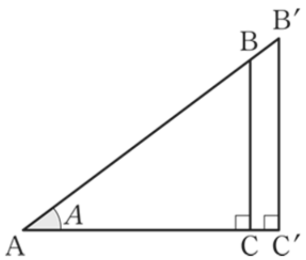
（教科書 p.118）

右の図において，△ABC と △AB′C′ は相似であるから

$\mathrm{AC} : \mathrm{BC} = \mathrm{AC'} : \mathrm{B'C'}$

よって $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{AC'}}$

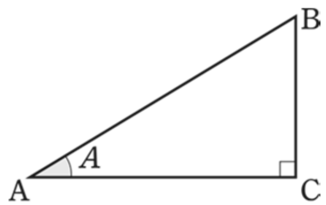
が成り立つ。



一般に，∠C が直角である直角三角形 ABC において，$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ の値は △ABC の大きさに関係なく，∠A の大きさだけで定まる。∠A の大きさは A で表すことが多い。

$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ を A の（[1] 正接 ）または（[2] タンジェント ）といい，（[3] $\tan A$ ）と書く。

正接の場合と同じように，∠C が直角である直角三角形 ABC において，$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$，$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ の値はいずれも ∠A の大きさ A だけで定まる。

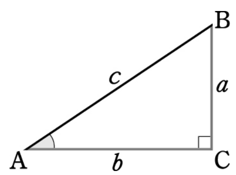


$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ を A の（[4] 正弦 ）または（[5] サイン ）といい，（[6] $\sin A$ ）と書く。

$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ を A の（[9] 余弦 ）または（[10] コサイン ）といい，（[11] $\cos A$ ）と書く。

正接，正弦，余弦をまとめて（[12] 三角比 ）という。

三角比
右の図の直角三角形 ABC において $\sin A = \frac{a}{c}$，　$\cos A = \frac{b}{c}$， $\tan A = \frac{a}{b}$

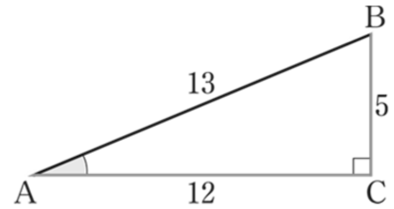


例 1 右の図の直角三角形において

$\sin A = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{5}{13}$

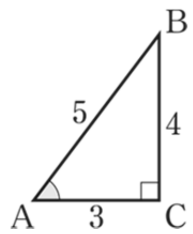
$\cos A = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{12}{13}$

$\tan A = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{5}{12}$



問1 次の図において，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ。

(1)

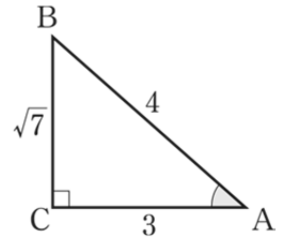


$\sin A = \frac{4}{5}$

$\cos A = \frac{3}{5}$

$\tan A = \frac{4}{3}$

(2)



$\sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos A = \frac{3}{4}$

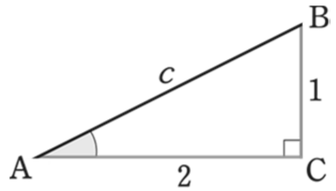
$\tan A = \frac{\sqrt{7}}{3}$

例 2 右の図の直角三角形において，斜辺 AB の長さを c とすると，三平方の定理により

$c^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

$c > 0$ より　$c = \sqrt{5}$

ゆえに



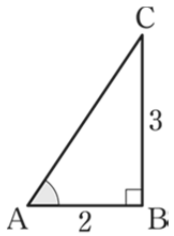
$\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\tan A = \frac{1}{2}$

問 2 次の図において，$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ。

（1）



AC $= b$ とすると

$b^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

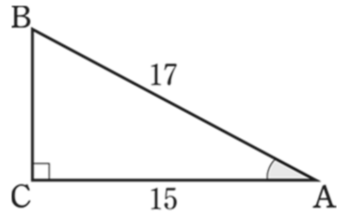
$b > 0$ より　$b = \sqrt{13}$

ゆえに　$\sin A = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\cos A = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\tan A = \frac{3}{2}$

(2)



BC $= a$ とすると

$a^2 + 15^2 = 17^2$

$a^2 = 64$

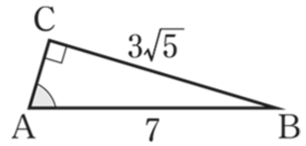
$a > 0$ より　$a = 8$

ゆえに　$\sin A = \frac{8}{17}$

$\cos A = \frac{15}{17}$

$\tan A = \frac{8}{15}$

(3)



AC $= b$ とすると

$(3\sqrt{5})^2 + b^2 = 7^2$

$b^2 = 4$

$b > 0$ より　$b = 2$

ゆえに　$\sin A = \frac{3\sqrt{5}}{7}$

$\cos A = \frac{2}{7}$

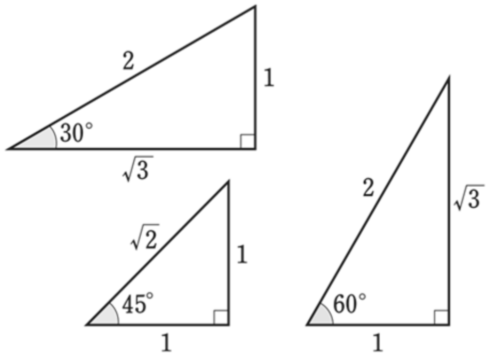
$\tan A = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

30°，45°，60° の三角比

（教科書 p.120）

30°，45°，60° の三角比の値は，下の図を用いて求めることができる。
これらの角の三角比の値を表にすると，下のようになる。

A	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



三角比の表

（教科書 p.121）

207 ページの三角比の表に，0° から 90° まで 1° ごとの角に対する正弦，余弦，正接の値を小数第 4 位まで示した。

右の表はその三角比の表の一部である。

角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281

例 3 上の表から $\cos 48° =$（　0.6691　）
また，$\sin A = 0.7986$ を満たす A は $A =$（　53°　）

問3 三角比の表を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\sin 15° = 0.2588$

(2) $\cos 67° = 0.3907$

(3) $\tan 38° = 0.7813$

問4 三角比の表を用いて，次の式を満たす A を求めよ。

(1) $\sin A = 0.9659$　　(2) $\cos A = 0.9205$　　(3) $\tan A = 2.3559$

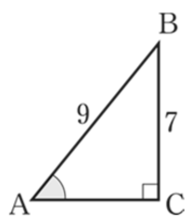
$A = 75°$　　$A = 23°$　　$A = 67°$

例 4 右の図の直角三角形において，A を求めてみよう。

$$\sin A = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{7}{9} \fallingdotseq 0.7778$$

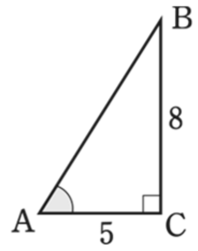
正弦が 0.7778 に最も近い A を三角比の表から求めると

$A \fallingdotseq 51°$



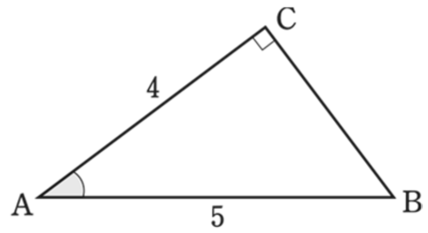
問5 三角比の表を用いて，次の A を求めよ。

(1)



$\tan A = \frac{8}{5} = 1.6$
三角比の表より　$A \fallingdotseq 58°$

(2)



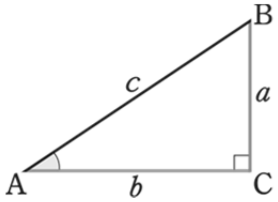
$\cos A = \frac{4}{5} = 0.8$
三角比の表より　$A \fallingdotseq 37°$

三角比の応用

（教科書 p.122）

三角比を利用して，いろいろな値を求めてみよう。

右の図の直角三角形 ABC において



$$\sin A=\frac{a}{c},\ \cos A=\frac{b}{c},\ \tan A=\frac{a}{b}$$

であるから，次の式が成り立つ。

$a=$（13　$c\sin A$　），$b=$（14　$c\cos A$　），$a=$（15　$b\tan A$　）

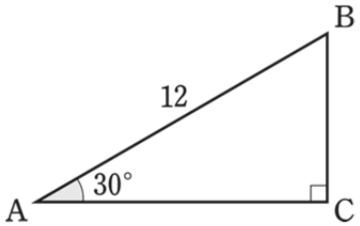
例 5　右の図の直角三角形において

$BC=AB\sin A$

$\quad=12\sin 30^\circ=12\cdot\frac{1}{2}=6$

$AC=AB\cos A$

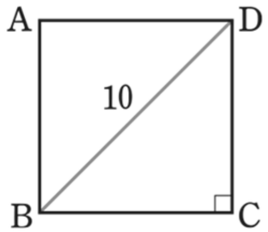
$\quad=12\cos 30^\circ=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$



問6　正方形 ABCD において，$BD=10$ のとき，BC の長さを求めよ。

$\angle DBC=45^\circ$ より

$BC=BD\cos 45^\circ=10\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

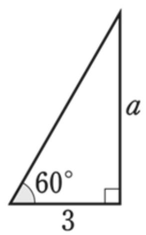


例 6　右の図の直角三角形において，a の値を求めてみよう。

$a=3\tan 60^\circ$

$\quad=3\cdot\sqrt{3}$

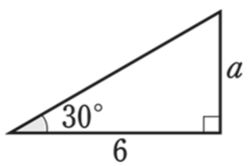
$\quad=3\sqrt{3}$



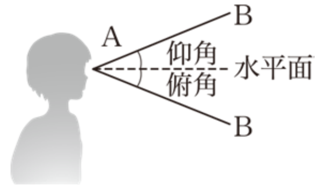
問7　右の図の直角三角形において，a の値を求めよ。

$a=6\tan 30^\circ$

$\quad=6\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$



右の図のように，点 A から点 B を見るとき，AB と A を通る水平面とのなす角を，B が水平面より上にあるならば（16　仰角　）といい，下にあるならば（17　俯角　）という。



例題 1　平地に立っている木の根元から 5m 離れた地点に立って，木の上端を望むときの仰角，すなわち，右の図の $\angle QAP$ は 58° であった。

目の高さを 1.5m とするとき，木の高さは何 m か。

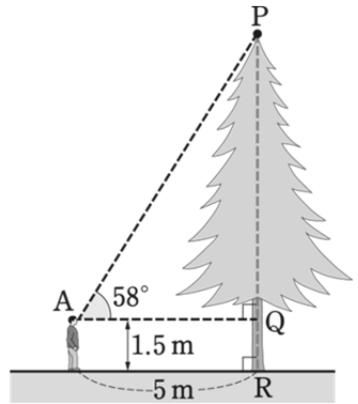
ただし，$\tan 58^\circ=1.6$ とする。

解　上の図において，木の高さ PR は

$PR=PQ+QR=5\tan 58^\circ+1.5$

$\quad=5\cdot 1.6+1.5$

$\quad=9.5\ (m)$



問8　展望台 P から地上の A 地点を見下ろすときの俯角，すなわち，右の図の $\angle QPA$ は 39° であった。

展望台から A 地点までの水平距離 AH が 200m であるとすると，展望台の高さ PH は何 m か。

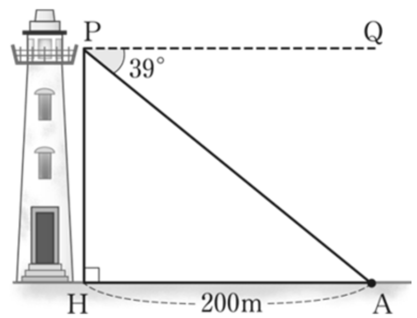
ただし，$\tan 39^\circ=0.81$ とする。

$\angle PAH=39^\circ$ であるから

$PH=AH\cdot\tan 39^\circ$

$\quad=200\cdot 0.81$

$\quad=162\ (m)$

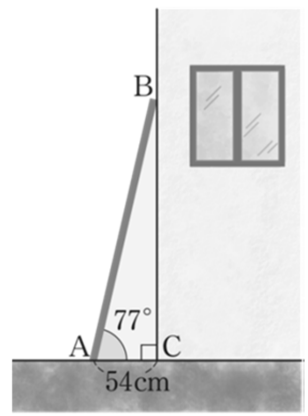


問9　右の図のように，家の壁にはしご AB を立て掛けて，はしごと地面とのなす角 $\angle BAC$ が 77° になるようにした。

はしごの下端 A と壁との距離 AC が 54cm であるとき，はしごの長さ AB を三角比の表を用いて求めよ。

$AC=AB\cos 77^\circ$ であるから

$AB=\frac{AC}{\cos 77^\circ}=\frac{54}{0.2250}=240\ (cm)$



2 三角比の相互関係

（教科書 p.124）

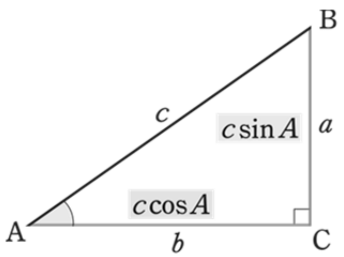
右の図の直角三角形において

$$a = c\ \sin A,\ b = c\ \cos A$$

である。

よって

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{c\sin A}{c\cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$



また，三平方の定理により，$a^2 + b^2 = c^2$ であるから

$$(c\sin A)^2 + (c\ \cos A)^2 = c^2$$

両辺を c^2 で割ると　$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

ふつう，$(\sin A)^2$，$(\cos A)^2$ をそれぞれ $\sin^2 A$，$\cos^2 A$ と書く。

以上より，次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係(1)
$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$,　$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

例題 2　A が鋭角で，$\cos A = \frac{5}{7}$ であるとき，$\sin A$，$\tan A$ の値を求めよ。

解　$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ であるから

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}$$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

また　$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \div \frac{5}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{5}\quad\cdots\cdots$答

問 10　A が鋭角で，$\sin A = \frac{1}{3}$ であるとき，$\cos A$，$\tan A$ の値を求めよ。

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ であるから

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$\cos A > 0$ であるから

$$\cos A = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1}{3} \div \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

等式 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ の両辺を $\cos^2 A$ で割ると

$$\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}$$

ここで，$\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$ であるから，次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係(2)
$1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$

例題 3　A が鋭角で，$\tan A = 3$ であるとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。

解　$1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$ であるから

$$\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + 3^2 = 10$$

よって

$$\cos^2 A = \frac{1}{10}$$

$\cos A > 0$ であるから

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

また，$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ であるから

$$\sin A = \tan A\cos A$$

$$= 3\cdot\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{10}\quad\cdots\cdots\text{答}$$

問 11 A が鋭角で，$\tan A=\frac{1}{2}$ であるとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。

$1+\tan^2 A=\frac{1}{\cos^2 A}$ であるから

$$\frac{1}{\cos^2 A}=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

よって　$\cos^2 A=\frac{5}{4}$

$\cos A>0$ であるから

$$\cos A=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

また，$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ であるから

$$\sin A=\tan A\cos A$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

90° − A の三角比

（教科書p.126）

$\sin 30°=\frac{1}{2}$，　$\cos 60°=\frac{1}{2}$

$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，　$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

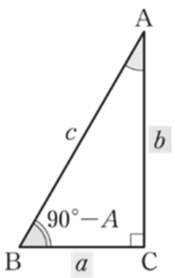
が成り立つ。

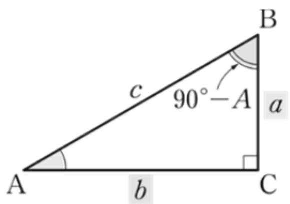
また，三角比の表をくわしく見ると，0° から 90° までの正弦の数値の配列を逆に並べたものは，0° から 90° までの余弦の数値の配列に一致している。

角	正弦(sin)	余弦(cos)
0°	0.0000	1.0000
1°	0.0175	0.9998
2°	0.0349	0.9994
3°	0.0523	0.9986
4°	0.0698	0.9976
5°	0.0872	0.9962
85°	0.9962	0.0872
86°	0.9976	0.0698
87°	0.9986	0.0523
88°	0.9994	0.0349
89°	0.9998	0.0175
90°	1.0000	0.0000

一般に，A と $90°-A$ の三角比の間にどのような関係があるかを調べてみよう。

右の図の直角三角形において





$\sin B=\frac{b}{c}$，　$\cos A=\frac{b}{c}$

$\cos B=\frac{a}{c}$，　$\sin A=\frac{a}{c}$

$\tan B=\frac{b}{a}$，　$\tan A=\frac{a}{b}$

ここで　　$B=90°-A$

であるから，次の公式が成り立つ。

90° − A の三角比

$$\sin(90°-A)=\cos A \qquad \tan(90°-A)=\frac{1}{\tan A}$$
$$\cos(90°-A)=\sin A$$

この公式を用いると，鋭角の三角比を 45° 以下の角の三角比で表すことができる。

例 7 $\sin 63°=\sin(90°-27°)=\cos 27°$

$\cos 63°=\cos(90°-27°)=\sin 27°$

$\tan 63°=\tan(90°-27°)=\frac{1}{\tan 27°}$

問 12 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

(1)　$\sin 56°=\sin(90°-34°)=\cos 34°$

(2)　$\cos 87°=\cos(90°-3°)=\sin 3°$

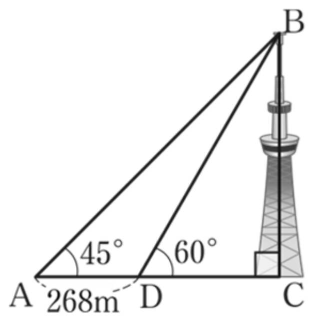
(3)　$\tan 72°=\tan(90°-18°)=\frac{1}{\tan 18°}$

問 題

（教科書 p.127）

1 地面に垂直に建つ塔がある。塔から離れた地点 A において塔の先端 B の仰角を測ると 45° であり，そこから塔に 268m 近づいた地点 D での仰角は 60° である。

このとき，塔の高さは約何 m か。



∠ABC = 45°，∠DBC = 30° であるから，BC = x(m) とすると

$$AC = x\tan 45^\circ = x\cdot 1 = x$$

$$DC = x\tan 30^\circ = x\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

ここで，AC − DC = AD であるから

$$x - \frac{1}{\sqrt{3}}x = 268$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}x = 268$$

$$x = \frac{268\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{268\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= 134(3+\sqrt{3})$$

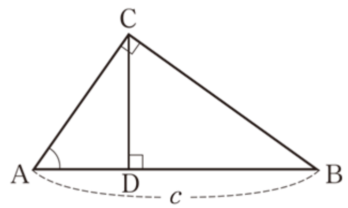
$$= 634.09\cdots$$

ゆえに，塔の高さは　約 634m

2 右の図の直角三角形 ABC において

$AB = c$

とおくとき，次の線分の長さを c と A の三角比を用いて表せ。



(1)　BC

直角三角形 ABC に着目して

$$BC = AB\sin A = c\sin A$$

(2)　CD

△ABC ∽ △CBD であるから

$$\angle BCD = \angle BAC = A$$

直角三角形 CBD に着目して

$$CD = BC\cos\angle BCD$$

$$= c\sin A\cos A$$

(3)　DB

$$DB = BC\sin\angle BCD$$

$$= c\sin A\sin A$$

$$= c\sin^2 A$$

3 A が鋭角で，$\cos A = \frac{5}{13}$ であるとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin A$

$$\sin^2 A = 1-\cos^2 A$$

$$= 1-\frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

(2)　$\tan A$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{12}{13}\div\frac{5}{13} = \frac{12}{5}$$

(3)　$\sin(90^\circ - A)$

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A = \frac{5}{13}$$

(4)　$\cos(90^\circ - A)$

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A = \frac{12}{13}$$

4 $\triangle$ABC の 3 つの角の大きさを A, B, C とする。このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$

三角形の内角の和は 180° であるから

$A+B+C=180°$

$A+B=180°-C$

両辺を 2 で割ると

$\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}$

よって

$$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\left(90°-\frac{C}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{C}{2}$$

(2) $\tan\frac{A+B}{2}\tan\frac{C}{2}=1$

(1)と同様にして

$\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}$

よって

$$\tan\frac{A+B}{2}\tan\frac{C}{2}=\tan\left(90°-\frac{C}{2}\right)\tan\frac{C}{2}$$

$$=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}\cdot\tan\frac{C}{2}$$

$$=1$$