4 節 空間図形

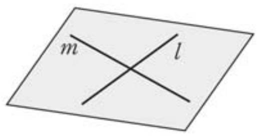
1 直線と平面

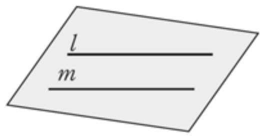
2直線の位置関係

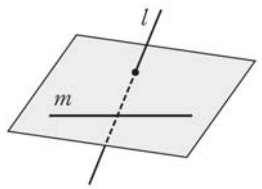
（教科書 p.134）

空間における 2 直線の位置関係には，次の 3 つの場合がある。

1 ([1]　　　　　　)　　2 ([2]　　　　　　)　　3 ([3]　　　　　　)



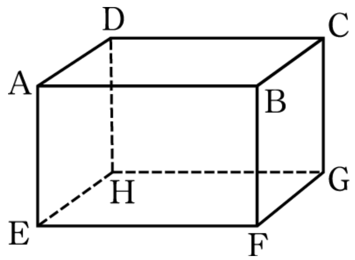




問1 右の図の直方体 ABCD − EFGH で，次のようなものをすべて求めよ。

(1)　辺 AB と平行な辺

(2)　辺 AB とねじれの位置にある辺



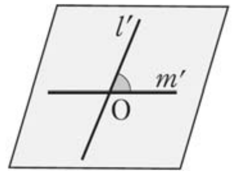
2 直線の位置関係について，3の場合，空間内の 1 点 O を通り l，m にそれぞれ平行な直線 l'，m' を引くと，l'，m' のなす角は，点 O のとり方に関係なく一定である。この角を，

([4]　　　　　　　　)という。

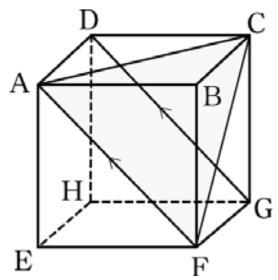
2 直線 l，m のなす角が 90° であるとき，l と m は([5]

　　)であるといい，([6]　　　　　)と書く。垂直な 2 直線が交わるとき，それらは([7]　　　　　)するという。

2 直線のなす角は，90° 以下の範囲で考える。



例 1 右の図の立方体 ABCD − EFGH で，直線 AC と直線 DG のなす角を求めてみよう。



問2 例 1 の立方体において，次の 2 直線のなす角を求めよ。

(1)　AE と DC

(2)　AB と CH

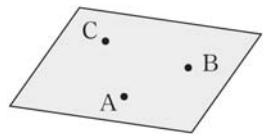
(3)　DB と CF

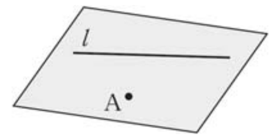
平面の決定条件

（教科書 p.135）

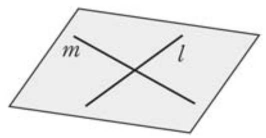
空間において，次の1 ～ 4のうちのいずれかが与えられると，それらを通るような平面がただ 1 つに定まる。

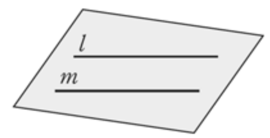
1 ([8]　　　　　　)　　2 ([9]　　　　　　)





3 ([10]　　　　　　)　　4 ([11]　　　　　　)





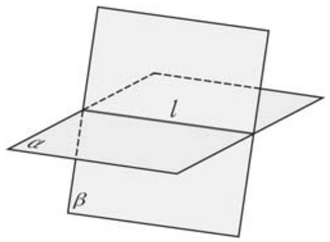
とくに，一直線上にない 3 点 A，B，C は 1 つの平面を決定するから，この平面を平面 ABC という。

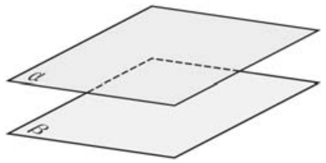
2平面の位置関係

（教科書p.136）

空間における異なる 2 平面の位置関係には，次の 2 つの場合がある。

1 (12　　　　　　)　　　　2 (13　　　　　　)





異なる 2 平面 α，β が共有点をもつとき，この 2 平面はその点を通る 1 つの直線 l を共有する。このとき，α と β は(14　　　　　　)といい，共有する直線 l を α と β の(15　　　　　　)という。

これに対して，α，β が共有点をもたないとき，α と β は(16　　　　　　)であるといい，(17　　　　　　)と書く。

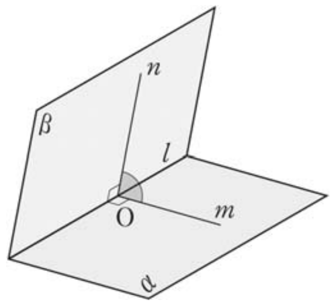
2平面のなす角

（教科書 p.136）

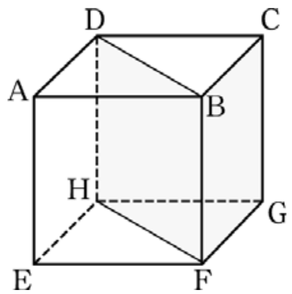
交線 l で交わる 2 つの平面 α，β のなす角について考えてみよう。

交線 l 上の 1 点 O を通り，平面 α，β 上に，それぞれ l と垂直な直線 m，n を引くと，m，n のなす角は点 O のとり方に関係なく一定である。この角を(18　　　　　　)という。

2 平面 α，β のなす角が 90° であるとき，α と β は(19　　　　　　)である，または(20　　　　　　)するといい，(21　　　　　　)と書く。



例 2 次の図の立方体 ABCD − EFGH で，平面 DBF と平面 CBF のなす角を求めてみよう。

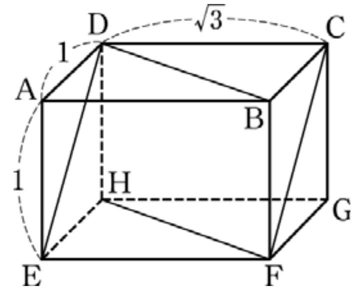


問3 次の図の直方体 ABCD − EFGH において，次の 2 平面のなす角を求めよ。

(1)　平面 DEF と平面 HEF

(2)　平面 BDH と平面 CDH

(3)　平面 BDH と平面 DEH

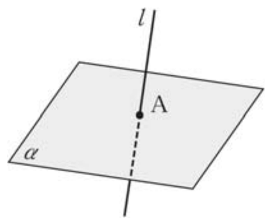


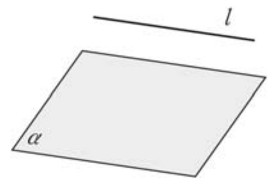
直線と平面の位置関係

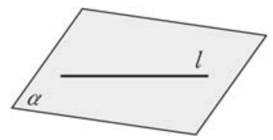
（教科書 p.137）

空間における直線と平面の位置関係には，次の 3 つの場合がある。

1 (22　　　　　　)　　2 (23　　　　　　)　　3 (24　　　　　　)







直線 l と平面 α がただ 1 つの共有点 A をもつとき，l と α は(25　　　　　　)といい，共有点 A を l と α の(26　　　　　　)という。

これに対して，l と α が共有点をもたないとき，l と α は(27　　　　　　)であるといい，(28　　　　　　) と書く。

また，l と α が異なる 2 点を共有するとき，l は α 上にある。

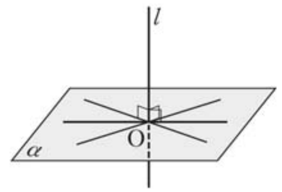
直線と平面の垂直

（教科書p.138）

直線 l が平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき，l は α に（29　　　　　）である，または l は α と（30　　　　　）するといい，（31　　　　　）と書く。

直線 l が，平面 α 上の交わる 2 直線 m，n に垂直ならば，$l \perp \alpha$ である。

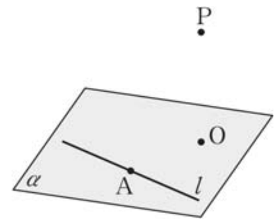
また，平面 α 上にない点 P を通り，α に垂直な直線はただ 1 つある。このような直線を，P から α に下ろした（32　　　　　）という。



三垂線の定理

α を平面とし，P を平面 α 上にない点とする。

また，l を平面 α 上の直線とし，A を直線 l 上の点，O を平面 α 上にあり直線 l 上にない点とするとき，次の（33　　　　　）が成り立つ。



三垂線の定理
定理 $\boxed{1}$ $PO \perp \alpha$，$OA \perp l \implies PA \perp l$ $\boxed{2}$ $PO \perp \alpha$，$PA \perp l \implies OA \perp l$ $\boxed{3}$ $PA \perp l$，$OA \perp l$，$PO \perp AO \implies PO \perp \alpha$

証明 $\boxed{1}$ $PO \perp \alpha$ より　　$PO \perp l$

ゆえに，l は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PO，OA に垂直であるから　　$l \perp$ 平面 AOP

PA は平面 AOP 上にあるから　　$PA \perp l$

$\boxed{3}$ l は平面 AOP 上の交わる 2 直線 PA，OA に垂直であるから

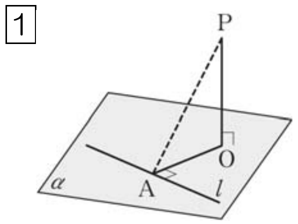
$l \perp$ 平面 AOP

PO は平面 AOP 上にあるから　　$PO \perp l$

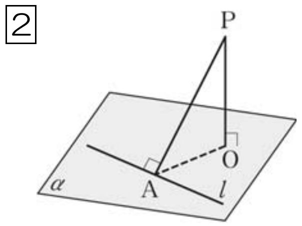
したがって，PO は α 上の交わる 2 直線 AO，l に垂直であるから

$PO \perp \alpha$

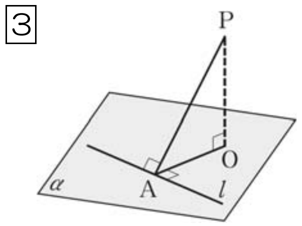
$\boxed{1}$



$\boxed{2}$



$\boxed{3}$

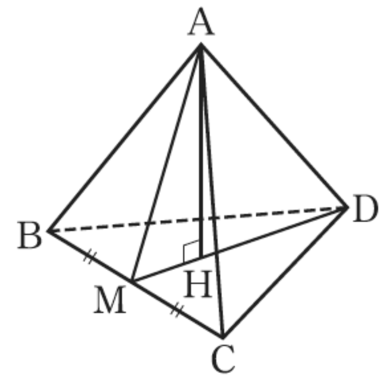


問4 三垂線の定理$\boxed{2}$を証明せよ。

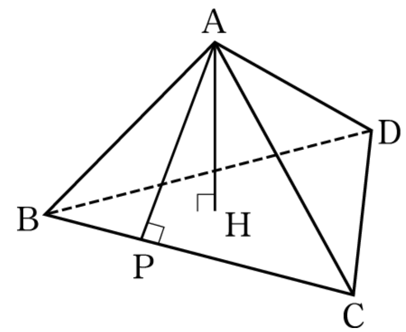
（教科書 p.139）

例題 1 正四面体 ABCD において，辺 BC の中点を M とし，頂点 A から線分 DM に下ろした垂線を AH とする。このとき，$AH \perp$ 平面 BCD となることを証明せよ。

解



問5 四面体 ABCD の頂点 A から平面 BCD に下ろした垂線を AH，A から辺 BC に下ろした垂線を AP とするとき，$HP \perp BC$ であることを示せ。



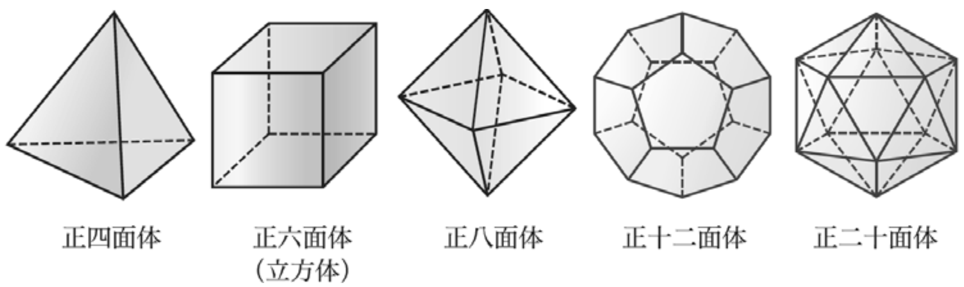
2 多面体

直方体や角錐のように，平面だけで囲まれた立体を([1] 　　　　　)という。多面体は，その面の数によって，五面体，六面体などという。

多面体 （教科書p.140）

へこみのない多面体を([2] 　　　　　)という。凸多面体のうち，どの面もすべて合同な正多角形であり，どの頂点にも同じ数の面が集まっているものを([3] 　　　　　)という。

正多面体は次の 5 種類があり，これらだけしかないことが知られている。



正多面体の頂点の数，辺の数，面の数は次の表のようになる。

正多面体	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
頂点の数	4	8	6	20	12
辺の数	6	12	12	30	30
面の数	4	6	8	12	20

一般に，凸多面体の頂点の数，辺の数，面の数について，次の([4] 　　　　　)が成り立つことが知られている。

オイラーの多面体定理

定理　凸多面体の頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると

$$v-e+f=2$$

例 3 オイラーの多面体定理が成り立つことを正八面体で確かめてみよう。

正八面体では

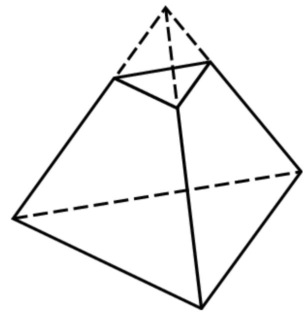
頂点の数　$v=$　　，　辺の数　$e=$　　，　面の数　$f=$

であるから

$v-e+f=$

問6 すべての正多面体について，オイラーの多面体定理が成り立つことを確かめよ。

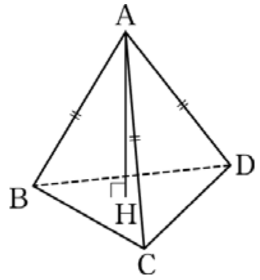
問7 次の図は，正四面体を底面と平行な平面で切って，上側を取り除いたものである。この図形について，オイラーの多面体定理が成り立つことを確かめよ。



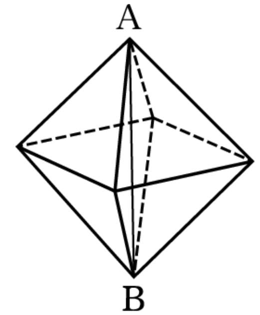
問 題

（教科書 p.141）

17 AB = AC = AD である四面体 ABCD において，頂点 A から平面 BCD に下ろした垂線を AH とする。このとき，点 H は △BCD の外心であることを，三垂線の定理を用いて証明せよ。



18 右の図のような 1 辺の長さが a の正八面体について，次の値を求めよ。



(1) 対角線 AB の長さ

(2) 体積

(3) 表面積

19 右の図は，正八面体から各頂点を含む四角錐を取り除いたものである。この図形について，オイラーの多面体定理が成り立つことを確かめよ。