2 節 円の性質

1 円周角の定理

（教科書 p.115）

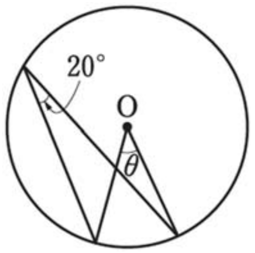
中学校では，次の（[1]　　　　　　　　）とその逆について学んだ。

円周角の定理

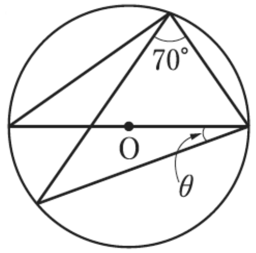
定理　1 つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の半分である。

問1　下の図において，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。

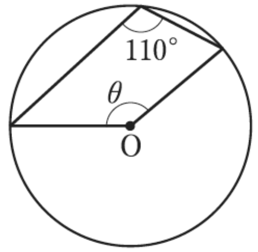
(1)



(2)



(3)

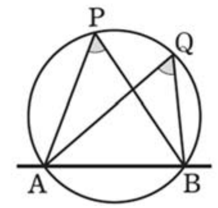


円周角の定理の逆

定理　4 点 A，B，P，Q について，P，Q が直線 AB に関して同じ側にあって

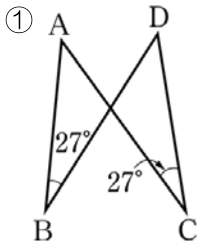
$\angle APB = \angle AQB$

ならば，この 4 点は同一円周上にある。

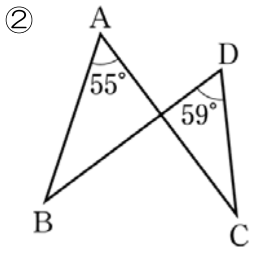


問2　次のうち，4 点 A，B，C，D が同一円周上にあるものはどれか。

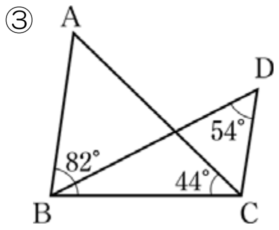
①



②



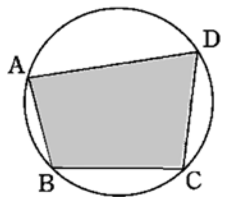
③



2 円に内接する四角形

（教科書 p.116）

四角形の 4 頂点が 1 つの円周上にあるとき，その四角形は円に（[1]　　　　　　　　）という。三角形は必ず円に内接するが，四角形は円に内接するとは限らない。



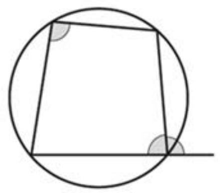
円に内接する四角形について，次の定理が成り立つ。

円に内接する四角形

定理　円に内接する四角形では

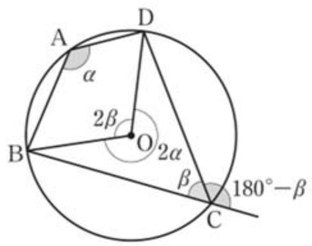
$\boxed{1}$ 対角の和は 180° である。

$\boxed{2}$ 外角は，それと隣り合う内角の対角に等しい。



証明

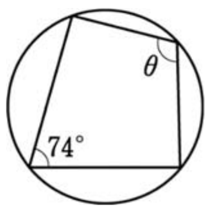
$\boxed{1}$ 円に内接する四角形を ABCD，$\angle A=\alpha$，$\angle C=\beta$ とする。
円周角の定理により，
弧 BCD に対する中心角は 2α，
弧 BAD に対する中心角は 2β となる。
$2\alpha+2\beta=360°$　より　$\alpha+\beta=180°$
したがって，$\boxed{1}$が成り立つ。



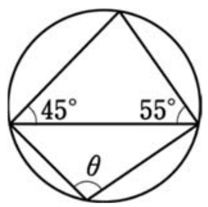
$\boxed{2}$ $\boxed{1}$より，$\alpha=180°-\beta$ であるから，∠C の外角は ∠A に等しい。

問3 下の図において，角 θ を求めよ。

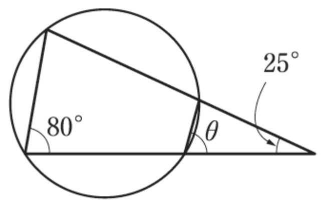
(1)



(2)



(3)



円に内接する四角形の定理は，その逆も成り立つ。

四角形が円に内接する条件

定理　次の$\boxed{1}$，$\boxed{2}$のいずれかが成り立つ四角形は円に内接する。

$\boxed{1}$ 1 組の対角の和が 180° である。

$\boxed{2}$ 1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しい。

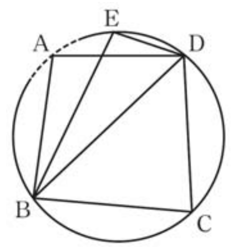
証明

$\boxed{1}$ 四角形 ABCD において，$\angle A+\angle C=180°$ とする。
△ BCD の外接円をかき， BD に関して C と反対側の円周上に点 E をとる。
四角形 BCDE は円に内接するから

$\angle C+\angle BED=180°$

一方，仮定より

$\angle C+\angle BAD=180°$

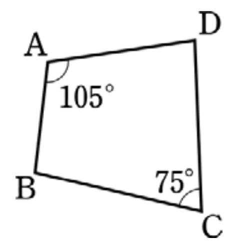


よって，$\angle BED=\angle BAD$ となり，円周角の定理の逆により，
4 点 B，D，A，E は同一円周上にある。
ここで，△ BDE の外接円は △ BCD の外接円でもあるから，4 点 A，B，C，D は同一円周上にあることになり，四角形 ABCD は円に内接する。

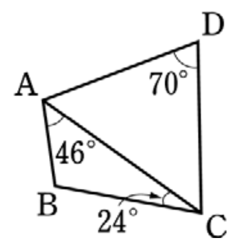
$\boxed{2}$ 四角形 ABCD において，∠C の外角が，∠C の対角 ∠A に等しいとすると，$\angle A=180°-\angle C$ が成り立つ。
このとき，$\angle A+\angle C=180°$ となり，$\boxed{1}$の場合に一致する。

問4 次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものはどれか。

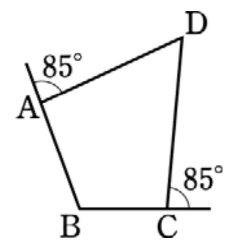
①



②

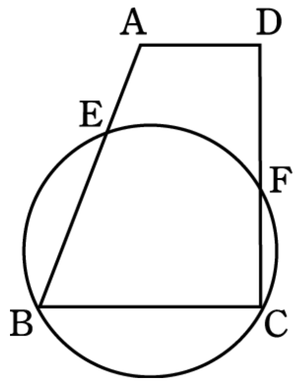


③



例題 1 AD//BC である台形 ABCD がある。この台形の頂点 B，C を通る円が，点 E，F で辺 AB，CD とそれぞれ交わるとする。

このとき，4 点 A，D，E，F は同一円周上にあることを証明せよ。



解 四角形 BCFE は円に内接するから

$\angle B =$ ……①

また，AD//BC より

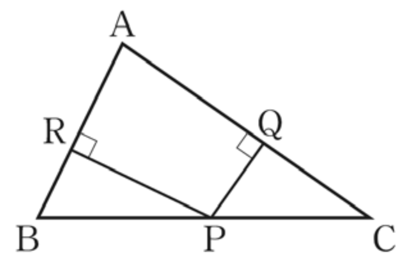
$\angle B +$ ……②

①，② より

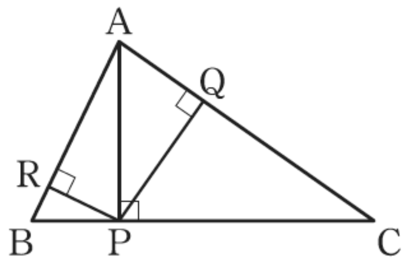
$\angle EFD + \angle A =$

問5 △ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R をとり，PQ ⊥ CA，PR ⊥ AB とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 4 点 A，R，P，Q は同一円周上にあることを証明せよ。



(2) 点 P が AP ⊥ BC を満たすとき，4 点 B，C，Q，R は同一円周上にあることを証明せよ。



3 接線と弦のつくる角

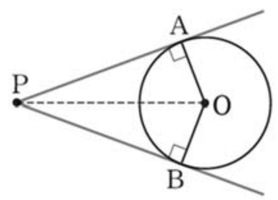
円の接線

（教科書 p.119）

ある円に対して，円の外部の点からは 2 本の接線が引ける。このとき，次の定理が成り立つ。

接線の長さ

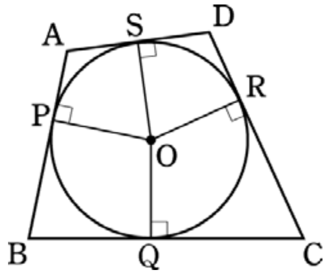
定理　円の外部の 1 点 P からその円に引いた 2 本の接線において，点 P から 2 つの接点 A，B までの距離は等しい。
すなわち　　$PA = PB$



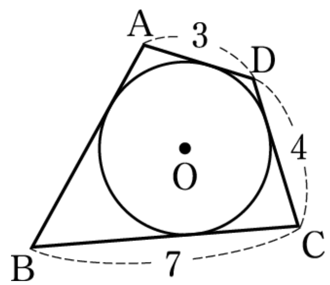
円外の点から接点までの距離を（[1]　　　　　　　　　　）という。

例 1　次の図のように，四角形 ABCD の 4 辺が，P，Q，R，S で円 O に接しているとき，2 組の対辺の長さの和が等しいことを示してみよう。

$AP = AS$，$BP = BQ$，
$CQ = CR$，$DR = DS$
であるから



問6　右の図のように，四角形 ABCD の 4 辺が円 O に接しているとき，辺 AB の長さを求めよ。



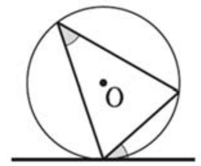
接線と弦のつくる角

（教科書 p.120）

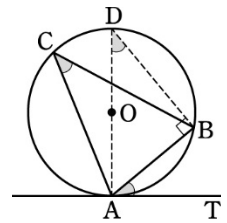
円の接線と接点を通る弦のつくる角について，次の定理が成り立つ。

接線と弦のつくる角

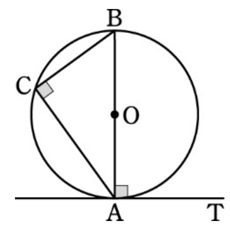
定理　円の接線とその接点を通る弦のつくる角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。

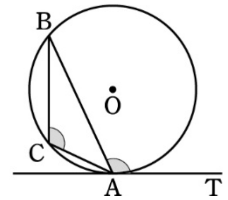


証明　右の図のように，円 O 上の点 A における接線を AT，A を通る弦を AB として，$\angle BAT$ が鋭角のとき $\angle BAT = \angle ACB$ を証明する。



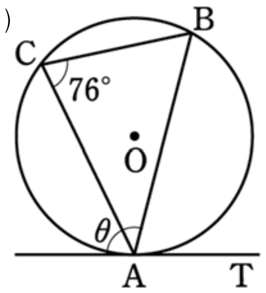
直径 AD を引くと，$\angle DAT$ は直角であるから
$\angle BAT = 90° - \angle DAB$
一方，AD は直径であるから，$\angle ABD$ も直角で
あり　　$\angle ADB = 90° - \angle DAB$
よって　　$\angle BAT = \angle ADB$
$\angle ACB$ と $\angle ADB$ はいずれも弧 AB に対する円周角であるから
$\angle ACB = \angle ADB$　　よって　　$\angle BAT = \angle ACB$
$\angle BAT$ が直角，鈍角の場合も同様に定理は成り立つ。



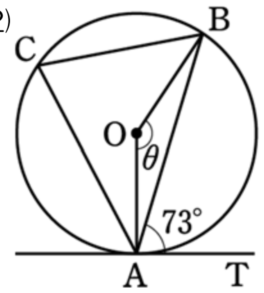


問7 下の図において，AT は円 O の接線，A は接点である。角 θ を求めよ。

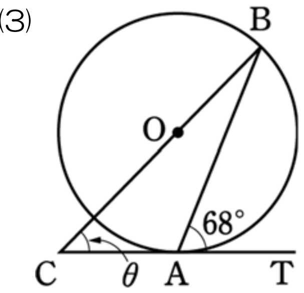
(1)



(2)



(3)



4 方べきの定理

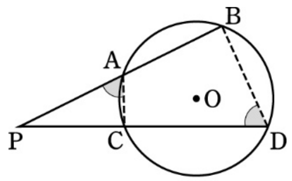
（教科書 p.121）

点 P と円 O が与えられたとき，P を通る 2 直線と円 O との 4 つの交点について考えてみよう。
点 P とこれらの点の間の距離には，次の（[1]　　　　　　　　　　）が成り立つ。

方べきの定理(1)
定理　点 P を通る 2 直線が，円 O とそれぞれ 2 点 A，B と 2 点 C，D で交わるとき $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$

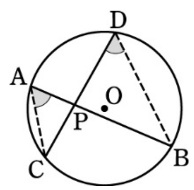
証明 (i)　点 P が円 O の外部にあるとき

△ PAC と△ PDB において，
円に内接する四角形の定理により
$\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{PDB}$
また，$\angle\mathrm{P}$ は共通である。
したがって　$\triangle\mathrm{PAC}\backsim\triangle\mathrm{PDB}$
よって　$\mathrm{PA}:\mathrm{PD}=\mathrm{PC}:\mathrm{PB}$
すなわち　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$

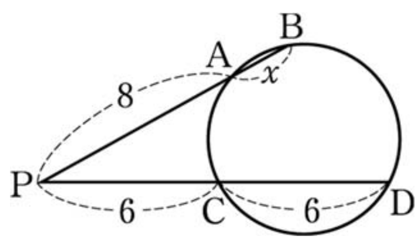


(ii)　点 P が円 O の内部にあるとき

△ PAC と△ PDB において，
円周角の定理により
$\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{PDB}$
また，対頂角は等しいから
$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{DPB}$
したがって　$\triangle\mathrm{PAC}\backsim\triangle\mathrm{PDB}$
よって　$\mathrm{PA}:\mathrm{PD}=\mathrm{PC}:\mathrm{PB}$
すなわち　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$

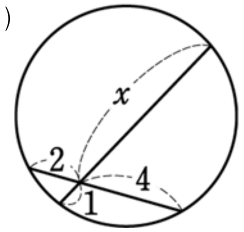


例 2 右の図において，AB の長さ x を求めてみよう。

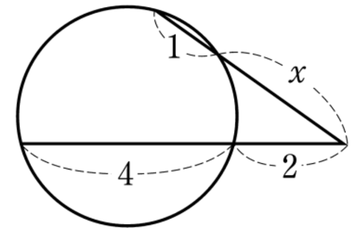


問8 下の図において，x を求めよ。

(1)



(2)

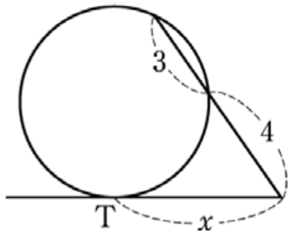


方べきの定理(2)
定理　点 P を通る 2 直線の一方が円 O と 2 点 A，B で交わり，もう一方が点 T で接するとき $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$

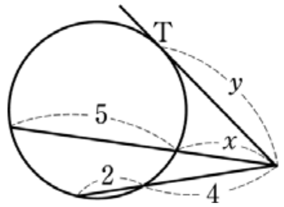
証明 T と A，T と B を結ぶ。△ PTA と△ PBT において，
接線と弦のつくる角の定理により
$\angle\mathrm{PTA}=\mathrm{PBT}$
また，$\angle\mathrm{P}$ は共通である。
したがって　$\triangle\mathrm{PTA}\backsim\triangle\mathrm{PB}$
よって　$\mathrm{PA}:\mathrm{PT}=\mathrm{PT}:\mathrm{PB}$
すなわち　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$

問9 下の図において，x，y を求めよ。ただし，T は接点とする。

(1)



(2)



方べきの定理(1)は，その逆も成り立つ。

方べきの定理(1)の逆

定理　2 つの線分 AB，CD，またはそれぞれの延長が 1 点 P で交わっているとき，$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ならば，4 点 A，B，C，D は同一円周上にある。

証明 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ より

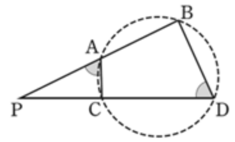
$$PA : PD = PC : PB$$

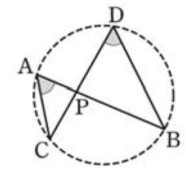
また，$\angle APC = \angle DPB$ であるから

$$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$$

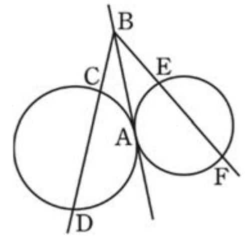
よって　　$\angle CAP = \angle BDP$

したがって，4 点 A，B，C，D は同一円周上にある。





問 10 2 つの円が点 A で同じ直線に接している。この直線上の A と異なる点 B を通る 2 本の直線と，2 円との 2 つの交点をそれぞれ C，D および E，F とする。このとき，4 点 C，D，E，F は同一円周上にあることを証明せよ。



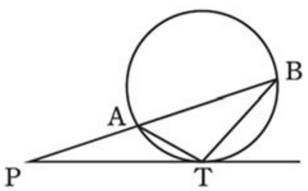
方べきの定理(2)についても，その逆は成り立つ。

方べきの定理(2)の逆

定理　一直線上にない 3 点 A，B，T と線分 BA の延長上の 1点を P とするとき

$$PA \cdot PB = PT^2$$

が成り立つならば，PT は 3 点 A，B，T を通る円に接する。

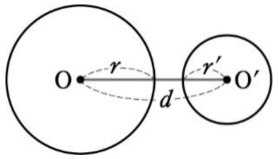


5 2つの円

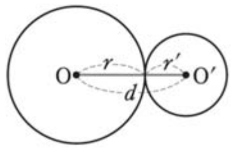
（教科書 p.124）

半径の異なる2つの円の位置関係については，下の図のように5通りの場合が考えられる。
$\boxed{2}$のような場合には2円は（1　　　　　　　　）といい，$\boxed{4}$のような場合には（2　　　　　　　　）という。いずれの場合も2円は1点を共有しており，その点を（3　　　　　　）という。

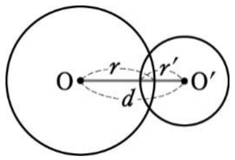
$\boxed{1}$ 互いに外部にある



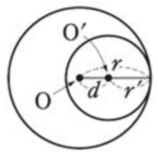
$\boxed{2}$ （4　　　　　　　　）



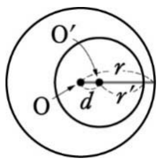
$\boxed{3}$ 2点で交わる



$\boxed{4}$ （5　　　　　　　　）



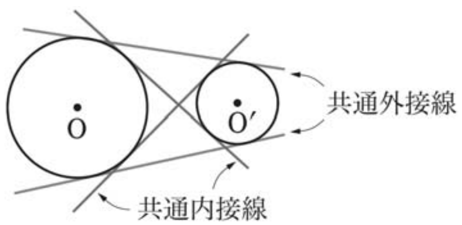
$\boxed{5}$ 一方が他方を含む



2つの円の位置関係は，それらの円の半径 r，r' と中心間の距離 d との関係で定まる。ただし，$r>r'$ とする。

1	$d>r+r'$	共有点はなし
2	$d=r+r'$	共有点は1個
3	$r-r'<d<r+r'$	共有点は2個
4	$r-r'=d$	共有点は1個
5	$r-r'>d$	共有点はなし

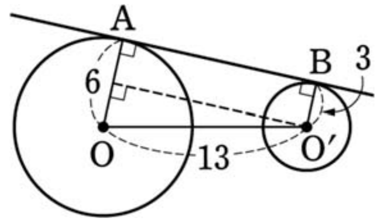
また，右の図のように1本の直線が2つの円の両方の接線となることがある。このような接線を2円の（6　　　　　　　）という。共通接線には，その接線に対して同じ側に2円がある（7　　　　　　　）と反対側に2円がある（8　　　　　　　）の2種類がある。



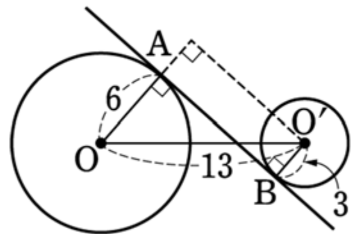
問11 共通接線の本数は，5つの位置関係でどのように変わるか。

問 12 下の図において，直線 AB は 2 つの円の共通接線で，A，B は接点である。
このとき，線分 AB の長さを求めよ。

(1)

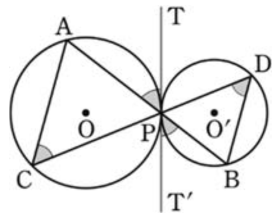


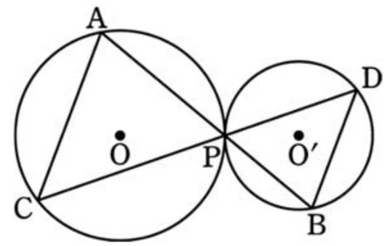
(2)



応 用 例題 2 点 P で 2 つの円が外接している。点 P を通る 2 本の直線がそれぞれの円と点 A, B および C, D で交わるとき，AC//BD となることを証明せよ。

解



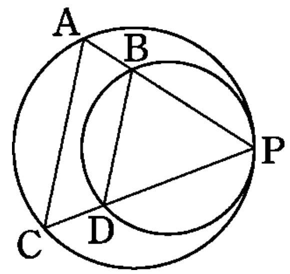


図のように，点 P を通る共通接線 TPT′ を引くと，接線と弦のつくる角の定理により

$\angle ACP =$

$\angle BDP =$

問 13 例題２において，2 つの円が点 P で内接しているときにも，AC//BD となることを証明せよ。

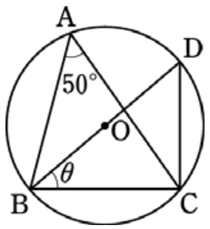


問 題

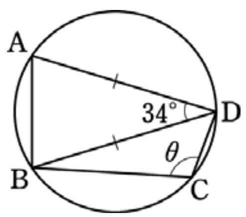
（教科書 p.126）

6 下の図において，角 θ を求めよ。ただし，O は円の中心である。また，(2)では $AD = BD$ とする。

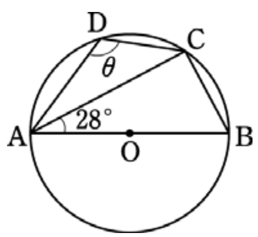
(1)



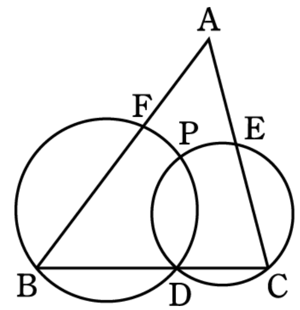
(2)



(3)

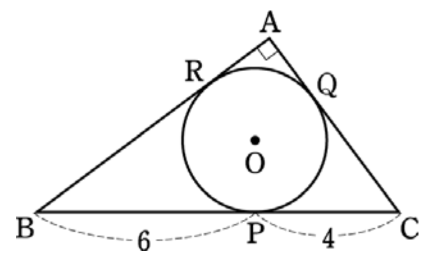


7 △ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 D，E，F がある。3 点 B，D，F および C，D，E を通る 2 つの円が，右の図のように，△ABC の内部の点 P で交わっているとき，4 点 A，E，F，P は同一円周上にあることを証明せよ。



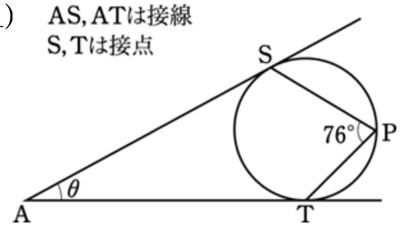
8 右の図において，円 O は直角三角形 ABC の内接円で，P，Q，R は接点である。

$BP = 6$，$CP = 4$ のとき，円 O の半径を求めよ。



9 下の図において，角 θ を求めよ。

(1)



(2)