1節 三角形の性質

1 三角形と比

（教科書 p.100）

三角形における比の性質については，中学校で次のことを学んだ。

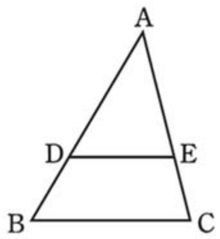
三角形と比

定理　△ABC の辺 AB，AC 上に，それぞれ点 D，E があるとき

[1] DE// BC $\Longleftrightarrow$ AD : AB = AE : AC

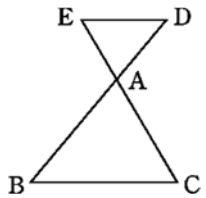
[2] DE//BC $\Longleftrightarrow$ AD : DB = AE : EC

[3] DE//BC $\Longrightarrow$ AD : AB = DE : BC



※[3]において，その逆は成り立たない。

上の定理は，点 D，E が辺 AB，AC の延長上にあるときでも成り立つ。

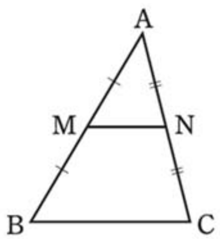


また，とくに，D と E がそれぞれ AB，AC の中点であるときには，次の中点連結定理が成り立つ。

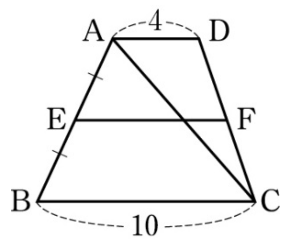
中点連結定理

定理　△ABC の辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とするとき

MN//BC，　$MN = \frac{1}{2}BC$



問1　AD = 4，BC = 10，AD//BC の台形 ABCD において，辺 AB の中点 E から辺 BC に平行な直線を引き，辺 CD との交点を G とする。EG の長さを求めよ。



内分と外分

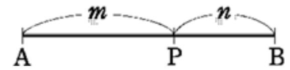
（教科書 p.101）

m，n は正の数とする。

線分 AB 上に点 P があり

AP : PB = $m : n$

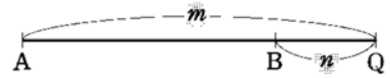
が成り立つとき，P は AB を $m : n$ に（1　　　　　）するという。



また，線分 AB の延長上に点 Q があり

AQ : QB = $m : n$

が成り立つとき，Q は AB を $m : n$ に（2　　　　　）するという。



例1　線分 AB に対して，次のように内分する点，外分する点を図示してみよう。

(1)　AB を 2 : 3 に内分する点 C

A　　　　　　B

(2)　AB を 3 : 1 に外分する点 D

A　　　　　　B

(3)　AB を 1 : 4 に外分する点 E

A　　　　　　B

問2　線分 AB を引き，その線分について次の点を図示せよ。

(1) AB を 3 : 1 に内分する点 C

A　　　　　　B

(2)　BA を 3 : 1 に内分する点 D

A　　　　　　B

(3) AB を 5 : 1 に外分する点 E

A　　　　　　B

(4)　AB を 2 : 3 に外分する点 F

A　　　　　　B

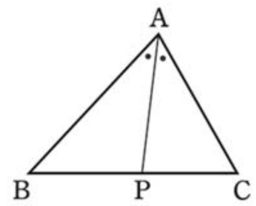
三角形の内角と外角の二等分線

（教科書 p.102）

内角の二等分線と比

定理　△ABC の ∠A の二等分線と対辺 BC との交点を P とすると，P は BC を AB : AC に内分する。

すなわち　　BP : PC = AB : AC



証明　頂点 C を通り AP に平行な直線を引き，BA の延長との交点を D とすると

∠ACD = ∠CAP　　◀錯角

∠ADC = ∠BAP　　◀同位角

ここで，∠BAP = ∠CAP であるから

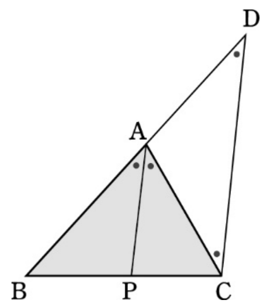
∠ACD = ∠ADC

よって，△ACD は二等辺三角形であるから

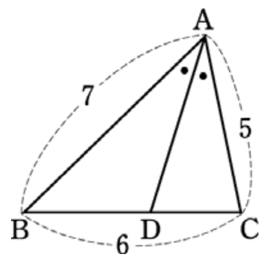
AC = AD　　…… ①

また，PA//CD より　　BP: PC = BA : AD　　…… ②

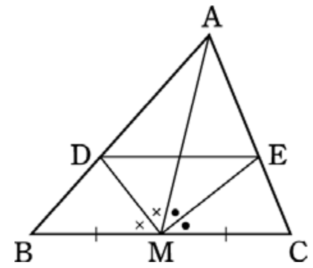
①，②より　　BP : PC = AB : AC



問3　△ABC において，∠A の二等分線と対辺 BC との交点を D とする。AB = 7，AC = 5，BC = 6 のとき，BD の長さを求めよ。



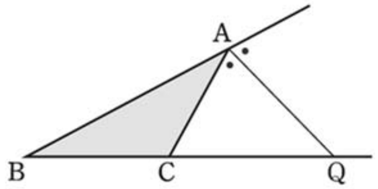
問4　△ABC の辺 BC の中点を M とし，∠AMB，∠AMC の二等分線と辺 AB，AC との交点をそれぞれ D，E とする。このとき，DE//BC であることを証明せよ。



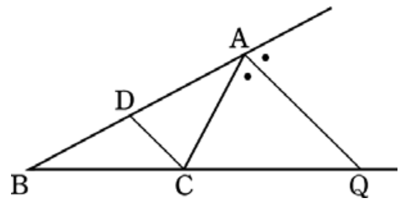
外角の二等分線と比

定理　△ABC の頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とすると，Q は BC を AB：AC に外分する。

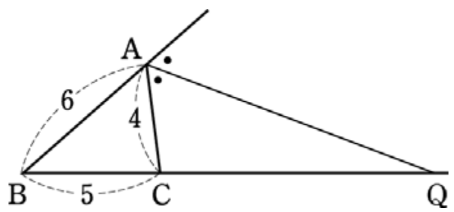
すなわち　　BQ：QC＝AB：AC



問5　上の図において，頂点 C を通って AQ に平行な直線を引き，AB との交点を D とする。これを利用して，上の定理を証明せよ。



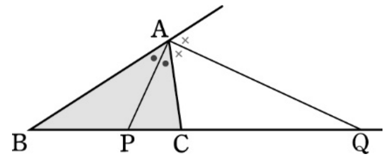
問6　△ABC において，辺 AB，BC，CA の長さをそれぞれ 6，5，4 とする。頂点 A における外角の二等分線と BC の延長との交点を Q とするとき，CQ の長さを求めよ。



内角の二等分線と比の定理と上の定理は，その逆も成り立つことが知られている。

角の二等分線と比の定理の逆

定理　△ABC において，辺 BC を AB：AC に内分，外分する点をそれぞれ P，Q とすると



1　AP は頂点 A における内角を 2 等分する。

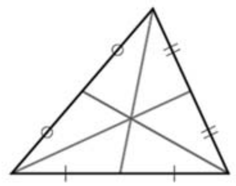
2　AQ は頂点 A における外角を 2 等分する。

2 三角形の重心・外心・垂心・内心

三角形の重心

（教科書 p.104）

三角形の頂点と対辺の中点を結んだ線分を（[1]　　　　　　　）という。

三角形の重心
定理　三角形の 3 本の中線は 1 点で交わる。その交点は，それぞれの中線を 2 : 1 に内分する。 

証明　△ABC において，2 本の中線 BE と CF の交点を G とする。E，F はそれぞれ辺 AC，AB の中点であるから

　　EF//BC　かつ　BC = 2EF

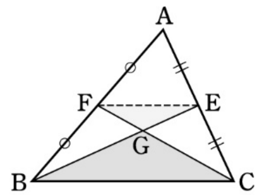
よって　　BG : GE = CG : GF = 2 : 1

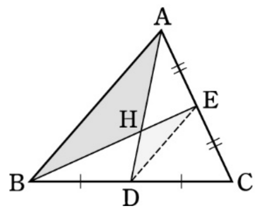
一方，2 本の中線 BE と AD の交点を H とすると，同様に

　　DE//AB　かつ　AB = 2DE

であるから　　BH : HE = AH : HD = 2 : 1

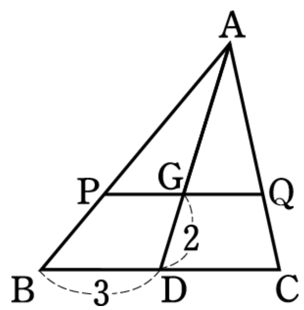
よって，G と H はともに中線 BE を 2 : 1 に内分するから一致する。
したがって，3 本の中線は 1 点 G で交わり，G はそれぞれの中線を 2 : 1 に内分する。





三角形の 3 本の中線の交点を，その三角形の（[2]　　　　　　　）という。

問7　右の図において，点 G は △ABC の重心で，線分 PQ は G を通り辺 BC に平行である。BD = 3，GD = 2　のとき，AG，GQ の長さをそれぞれ求めよ。

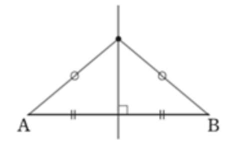


三角形の外心

（教科書 p.105）

線分 AB の垂直二等分線上の点は，両端 A，B から等距離にある。逆に，両端 A，B から等距離にある点は AB の垂直二等分線上にある。

このことを用いて，次の定理を導いてみよう。



三角形の外心
定理　三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。

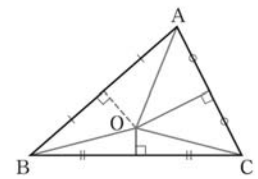
証明　△ABC において，2 辺 BC，CA の垂直二等分線の交点を O とすると

　　OB = OC　かつ　OC = OA

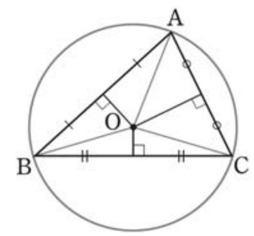
であるから　　OA = OB

よって，O は辺 AB の垂直二等分線上にある。

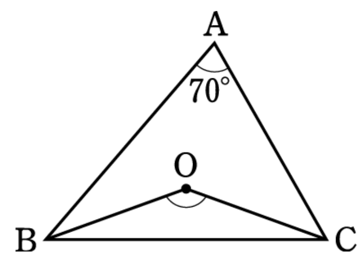
したがって，3 辺の垂直二等分線は 1 点 O で交わる。



上の図で，OA = OB = OC であるから，点 O は 3 つの頂点から等距離にある。よって，O を中心として 3 つの頂点を通る円をかくことができる。この円を三角形の（[3]　　　　　　　）といい，中心 O を三角形の（[4]　　　　　　）という。



問8　右の図において，点 O は △ABC の外心である。∠BOC の大きさを求めよ。



問9 ∠A が直角の直角三角形 ABC の外心の位置はどこか。

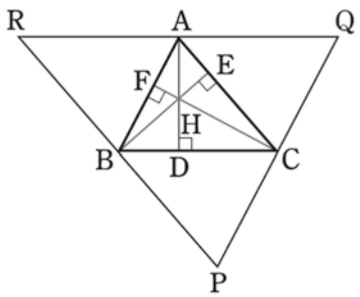
三角形の垂心

（教科書 p.106）

三角形の垂心

定理　三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした3本の垂線は1点で交わる。

証明



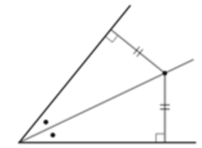
△ABC の頂点 A，B，C から対辺，またはその延長にそれぞれ垂線 AD，BE，CF を下ろす。
また，頂点 A，B，C を通り，それぞれの対辺に平行な直線の各交点を，右の図のように P，Q，R とする。
BC//RA，AC//RB より，
四角形 ARBC は平行四辺形であるから　　BC = RA
同様に，四角形 ABCQ は平行四辺形であるから　　BC = AQ
よって　　RA = AQ　　…… ①
また，BC//RQ，AD ⊥ BC より
　　AD ⊥ RQ　　…… ②
①，② より，AD は △PQR の辺 QR の垂直二等分線である。
同様に，BE，CF は，それぞれ辺 RP，PQ の垂直二等分線である。
三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わるから，3本の垂線 AD，BE，CF は1点 H で交わる。

三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした3本の垂線の交点を，その三角形の（5　　　　　）という。

問10 辺 AB を斜辺とする直角三角形 ABC の垂心の位置はどこか。

三角形の内心

（教科書 p.107）

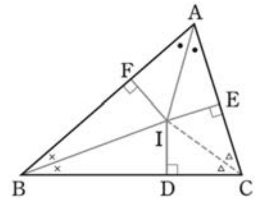


角の二等分線上の点は，角をつくる2辺から等距離にある。逆に，2辺から等距離にある点は，角の二等分線上にある。
このことを用いて，次の定理を導いてみよう。

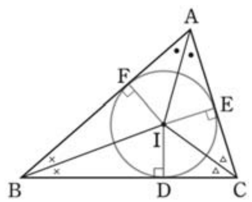
三角形の内心

定理　三角形の3つの内角の二等分線は1点で交わる。

証明

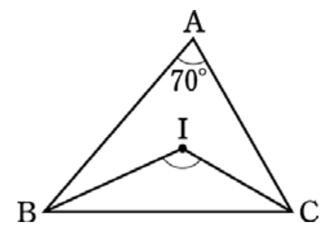


△ABC において，∠A と ∠B の二等分線の交点を I とする。I から辺 BC，CA，AB にそれぞれ垂線 ID，IE，IF を下ろすと
　　IE = IF　かつ　IF = ID
であるから　　ID = IE
よって，I は ∠C の二等分線上にある。
したがって，3つの内角の二等分線は1点 I で交わる。



上の図で，ID = IE = IF であるから，点 I は3点 D，E，F から等距離にある。よって，I を中心として D，E，F を通る円をかくことができる。この円は三角形の3辺に接しているから，三角形の（6　　　　　）といい，中心 I を三角形の（7　　　　　）という。
内心は3辺からの距離が等しい点である。

問11 右の図において，点 I は △ABC の内心である。このとき，∠BIC の大きさを求めよ。



参考　三角形の傍心

（教科書 p.108）

三角形の 1 つの内角の二等分線と，他の 2 つの頂点における外角の二等分線は 1 点で交わる。

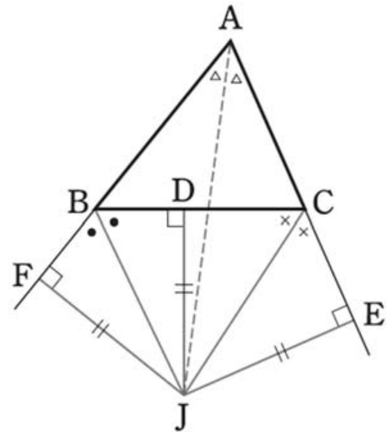
証明　右の図のように，頂点 B，C における外角の二等分線の交点を J とするとき，AJ が ∠A の二等分線であることを示す。
J から辺 BC，さらに辺 AC，AB の延長にそれぞれ垂線 JD，JE，JF を下ろす。
このとき

$JF = JD$　かつ　$JE = JD$

であるから

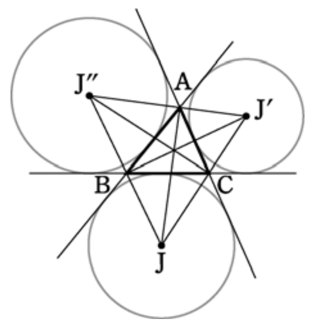
$JF = JE$

よって，J は ∠A の二等分線上にある。
∠B，∠C についても同様に証明できる。



右の図における交点 J を △ABC の ∠A に対する（[8]　　　　　　）という。この傍心 J は，頂点 B，C における外角の二等分線上にあるから，J を中心にして BC および AB，AC の延長線に接する円をかくことができる。この円を，△ABC の ∠A に対する（[9]　　　　　　）という。

右の図のように，△ABC の ∠B，∠C に対する傍心と傍接円もそれぞれ 1 つずつある。

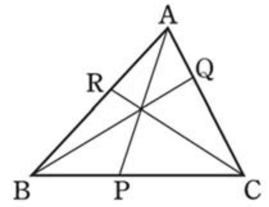


問1　△ABC の 3 つの傍心をそれぞれ J，J′，J″ とするとき，△JJ′J″ の垂心は，△ABC の内心と一致することを示せ。

3 三角形の比の定理

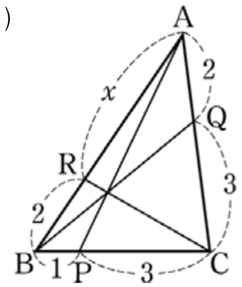
（教科書 p.109）

三角形の頂点から対辺に引いた３直線について，次の（1　　　　　）が成り立つ。

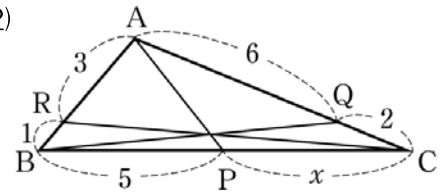
チェバの定理
定理　△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交わるとき $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ 

問 12 下の図において，x を求めよ。

(1)

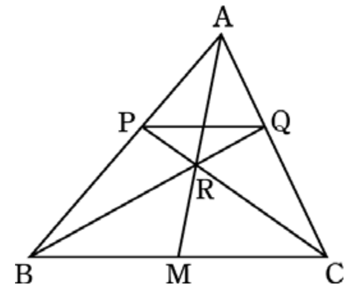


(2)



例題 1　△ABC において，PQ//BC となるように点 P，Q をそれぞれ辺 AB，AC 上にとり，線分 PC と QB の交点を R とする。線分 AR の延長と辺 BC との交点を M とするとき，M が BC の中点であることを証明せよ。

解　△ABC の辺上の点 M，Q，P について，チェバの定理を用いると



$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AP}{PB}=1 \qquad \cdots\cdots①$$

また，PQ//BC より

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \qquad \cdots\cdots②$$

②を①に代入して

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AQ}{QC}=1$$

よって

$$\frac{BM}{MC}=1$$

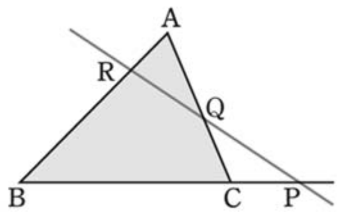
したがって，BM = MC となり，M は BC の中点である。

問 13 △ABC の辺 BC の中点を M とする。線分 AM 上に点 R をとり，CR の延長と辺 AB との交点を P，BR の延長と辺 AC との交点を Q とする。このとき，PQ//BC であることを証明せよ。

チェバの定理は，その逆も成り立つことが知られている。

チェバの定理の逆
定理　△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ が成り立てば，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる。

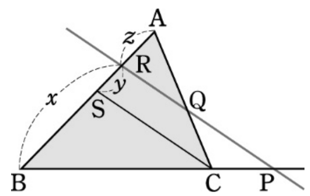
一直線上の 3 点について，次の（2　　　　　　　　　　）が成り立つ。

メネラウスの定理
定理　ある直線が △ABC の辺 BC，CA，AB，またはその延長と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ 

証明　点 C を通って PQ に平行な直線を引き，AB との交点を S とする。
RB $=x$，RS $=y$，AR $=z$ と表すと

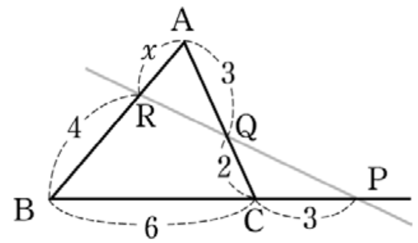
$\frac{BP}{PC}=\frac{x}{y}$，$\frac{CQ}{QA}=\frac{y}{z}$，$\frac{AR}{RB}=\frac{z}{x}$

よって　$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}=1$

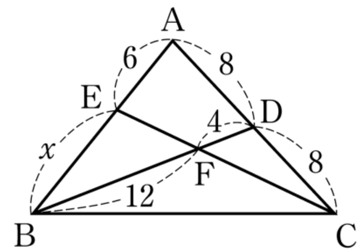


問 14　下の図において，x を求めよ。

(1)



(2)



メネラウスの定理は，その逆も成り立つことが知られている。

メネラウスの定理の逆
定理　△ABC の辺 BC，CA，AB，またはその延長上にそれぞれ点 P，Q，R があり，この 3 点のうち 1 つまたは 3 つが辺の延長上にあるとき $$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$ が成り立てば，3 直線 P，Q，R は一直線上にある。

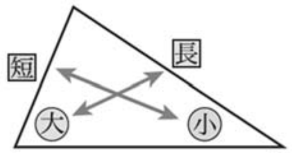
参考　辺と角の大小関係

（教科書 p.112）

次の定理が成り立つ。

辺と角の大小関係

定理　三角形において，長い辺に対する角は，短い辺に対する角より大きい。
また，大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺より長い。



辺と角の大小関係を用いると，三角形の 3 辺の長さについて，次の関係を示すことができる。

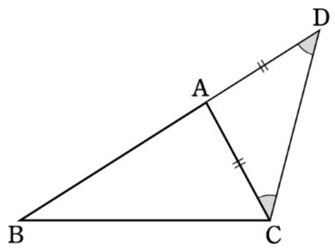
三角形の 3 辺の長さの関係

定理　三角形において

$\boxed{1}$　2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さより大きい。

$\boxed{2}$　2 辺の長さの差は，他の 1 辺の長さより小さい。

証明　$\boxed{1}$を証明する。△ABC において，辺 AB と AC の長さの和が，辺 BC の長さより大きいことを示す。



辺 BA の延長上に，$AD = AC$ となるように点 D をとることができる。
このとき，辺 AB と AC の和は

$AB + AC = AB + AD = BD$

となる。

△ACD は二等辺三角形であるから　$\angle ACD = \angle D$

よって

$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = \angle BCA + \angle D > \angle D$

△BCD において，$\angle BCD > \angle D$ であるから，辺と角の大小関係により $BD > BC$ となる。

したがって，$BD = AB + AC$ であるから

$AB + AC > BC$

が成り立つ。

同様に，$AC + BC > AB$，$AB + BC > AC$ も成り立つ。

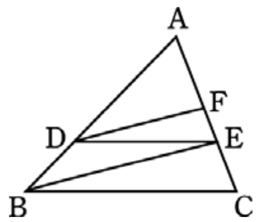
問1　上の定理の$\boxed{2}$を証明せよ。

問 題

（教科書 p.114）

1 右の図において，BC//DE，BE//DF のとき，次の式が成り立つことを証明せよ。

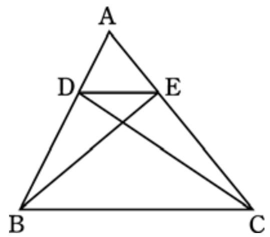
$AE^2 = AF \cdot AC$



2 右の図において，DE//BC，AD : DB ＝ 1 : 2 とする。

次の比を求めよ。

⑴ △ADE : △DBE



⑵ △DBE : △DBC

⑶ △ADE : △DBC

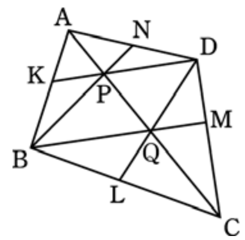
3 △ABC において，辺 BC 上に点 D をとって

△ABD : △ACD = AB : AC

となるようにすると，AD は ∠A を 2 等分することを証明せよ。

4 右の図のように，四角形 ABCD の対角線 AC 上に点 P，Q をとり，DP の延長と辺 AB の交点を K, DQ の延長と辺 BC の交点を L, BQ の延長と辺 CD の交点を M，BP の延長と辺 AD の交点を N とする。このとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1$$



5 右の図において，AP は△ABC の頂点 A における外角の二等分線である。このとき，AR の長さを求めよ。