３節 関数の極限

❶ 関数の極限

極限 $\lim_{x \to a} f(x)$

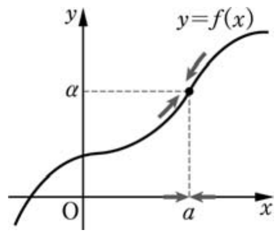
（教科書 p.112）

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば

（①　　　　　　　　　　）

または　（②　　　　　　　　　　　　　　）

と表し，α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の（③　　　　　　）という。また，この場合，“$x \to a$ のとき $f(x)$ は α に（④　　　　　　）する”という。

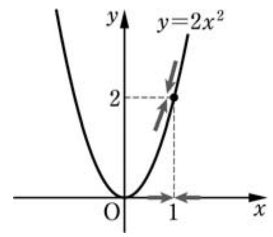


例1 関数 $f(x) = 2x^2$ では

$x \to 1$ のとき　（　　　　　　　　）

すなわち

$\lim_{x \to 1} f(x) =$



例2 関数 $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ は，（　　　　　　）では定義されていない。しかし，$x \neq 2$ の範囲では

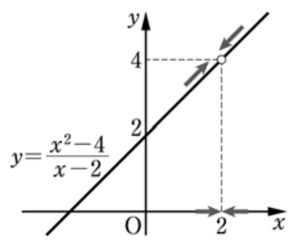
$f(x) =$

と変形される。したがって

$x \to 2$ のとき　$f(x) \to$（　　　　）

すなわち

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} =$（　　　　）



関数の極限値についても，数列の場合と同様に次の性質が成り立つ。

極限値と四則		
$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \lim_{x \to a} g(x) = \beta$ のとき		
[1]	$\lim_{x \to a} kf(x) = k\alpha$	ただし，k は定数
[2]	$\lim_{x \to a}\{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$	
	$\lim_{x \to a}\{f(x) - g(x)\} = \alpha - \beta$	
[3]	$\lim_{x \to a}\{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$	
[4]	$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$	ただし，$\beta \neq 0$

注意　定数関数 $f(x) = c$ については，$\lim_{x \to a} f(x) = c$ である。

例3 $\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 2)(3x - 1) =$

問1 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x \to 2}(x^3 - 2x + 1)$

(2) $\lim_{x \to 1} \frac{2x+1}{x^2-x+1}$

例題 1 $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-x}{x^2+x-2}$ を求めよ。

解

問2 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$

例題 2 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ を求めよ。

解

問3 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば

(⑤　　　　　　　　) または (⑥　　　　　　　　)

と表し，“$x\to a$ のとき $f(x)$ は (⑦　　　　　　　　) する”という。

また，$f(x)$ の値が負でその絶対値が限りなく大きくなるならば

(⑧　　　　　　　　) または (⑨　　　　　　　　)

と表し，“$x\to a$ のとき $f(x)$ は (⑩　　　　　　　　) する”という。

例4 (1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\left\{-\frac{1}{(x-1)^2}\right\}=$

注意 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ を，それぞれ $x\to a$ のとき $f(x)$ の「極限は正の無限大である」，「極限は負の無限大である」ということがある。

問4 次の極限を調べよ。

（1） $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}$

（2） $\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2}$

関数 $f(x), g(x)$ について，次のことが成り立つ。

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha, \lim_{x\to a}g(x)=0 \text{ ならば } \lim_{x\to a}f(x)=0$$

例題 3 等式 $\lim_{x\to 4}\frac{ax+b}{\sqrt{x}-2}=12$ が成り立つように，定数 a, b の値を定めよ。

解

問5 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

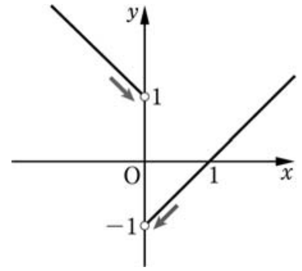
（1） $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+ax+b}{x+2}=3$

（2） $\lim_{x\to 3}\frac{ax+b}{\sqrt{x+1}-2}=3$

右側からの極限，左側からの極限

（教科書 p.116）

例5 関数 $f(x)=\frac{x(x-1)}{|x|}$ について考えてみよう。



$x>0$ のとき

$f(x)=$

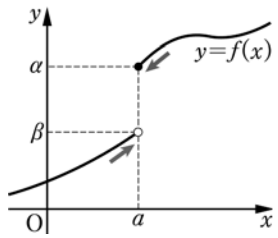
$x<0$ のとき

$f(x)=$

である。x が 0 より大きい値をとりながら限りなく 0 に近づくとき，$f(x)$ の値は限りなく（　　　　）に近づく。
また，x が 0 より小さい値をとりながら限りなく 0 に近づくとき，$f(x)$ の値は限りなく（　　　　）に近づく。

一般に，関数 $f(x)$ において，x が a より大きい値をとりながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく一定の値 α に近づくならば，α を“x が右側から a に近づくときの $f(x)$ の極限値”といい，次のように表す。

（⑪　　　　　　　　　　）



“x が左側から a に近づくときの $f(x)$ の極限値”も同様に定義され，その極限値が存在して，その値が β ならば，次のように表す。

（⑫　　　　　　　　　　）

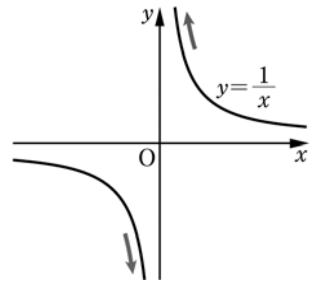
とくに，$a=0$ の場合は，次のように表す。

$x\to 0+0$ を（⑬　　　　　　　），　$x\to 0-0$ を（⑭　　　　　　　）

問6 $\lim_{x\to 3+0}\frac{x^2-3x}{|x-3|}$，$\lim_{x\to 3-0}\frac{x^2-3x}{|x-3|}$ をそれぞれ求めよ。また，$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{|x-3|}$ が存在するかどうか調べよ。

例6 関数 $f(x)=\frac{1}{x}$ について考えてみよう。

この関数のグラフは，右の図のようになるから，次のことが成り立つ。



$\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=$

$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=$

問7 次の極限を調べよ。

(1) $\lim_{x\to -3+0}\frac{1}{x+3}$

(2) $\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x-1}$

極限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

（教科書 p.118）

x の値が限りなく大きくなることを $x \to \infty$ で表し，x の値が負でその絶対値が限りなく大きくなることを $x \to -\infty$ で表す。x の値が限りなく大きくなるとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば

（⑮　　　　　　　　　）　　または　　（⑯　　　　　　　　　　　　　）

と表し，“$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は α に（⑰　　　　　　）する”という。

例題 4 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{5x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{x^2-2x+3}$

解

問8 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x+2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{2x^2-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3x+1}{7x^2+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+4}{x^2+x-1}$

例題 5 次の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right)$

解

問9 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+3}-x\right)$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x\right)$

例7 (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+1}=$

(2) $\lim_{x\to-\infty}(x^3-x^2-4x+5)$ について，$x=-t$ とおくと

$\lim_{x\to-\infty}(x^3-x^2-4x+5)=$

$=$

$=$

問10 次の極限を調べよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2-x^2}{x+3}$

(2) $\lim_{x\to-\infty}(-2x^3+3x^2+4x+1)$

❷ いろいろな関数と極限

指数関数，対数関数と極限

（教科書 p.120）

例8 (1) $\lim_{x\to+0}\log_{\frac{1}{2}}x=$

(2) $\lim_{x\to\infty}(5^x-2^x)=$

問11 次の極限を調べよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$

(2) $\lim_{x\to+0}\log_2 x$

(3) $\lim_{x\to\infty}(2^x-3^x)$

三角関数と極限

（教科書 p.121）

例9

（1）　$\lim_{x\to 0}\sin x =$

（2）　$\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x} =$

問12 次の極限値を求めよ。

（1）　$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}$

（2）　$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x$

（3）　$\lim_{x\to\frac{4}{\pi}}\tan\frac{1}{x}$

関数の極限値と大小関係

（教科書 p.122）

関数の極限値については，次の性質が成り立つ。

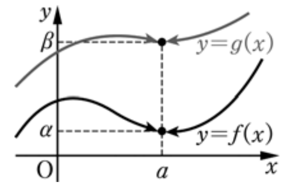
関数の極限値と大小関係

（1）　a の近くで不等式

$f(x) \leqq g(x)$ が成り立ち，

かつ $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha, \lim_{x\to a} g(x) = \beta$

ならば　$\alpha \leqq \beta$

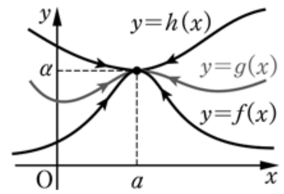


（2）　a の近くで不等式

$f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ が成り立ち，

かつ $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \alpha$

ならば　$\lim_{x\to a} g(x) = \alpha$



$\boxed{\text{注意}}$　これらのことは，$x\to\infty$ や $x\to-\infty$ のときにも成り立つ。

例10 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ を求めてみよう。

$x \neq 0$ のとき，$0 \leqq \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqq 1$ であるから

$\left|x\sin\frac{1}{x}\right| =$　　　　　←$|ab| = |a||b|$

すなわち　（　　　　　　　　　）

ここで，$x\to 0$ のとき，$|x|\to 0$

であるから

（　　　　　　　　　）

ゆえに（　　　　　　　　　）

問13 次の極限値を求めよ。

（1） $\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x}$

（2） $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

$\frac{\sin\theta}{\theta}$ の極限

（教科書 p.123）

$\frac{\sin\theta}{\theta}$ の極限
$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

例題 6 次の極限値を求めよ。

（1） $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

（2） $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

解

問14 次の極限値を求めよ。

（1） $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x}$

（2） $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x}$

例題 7 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ を求めよ。

解

問15 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$

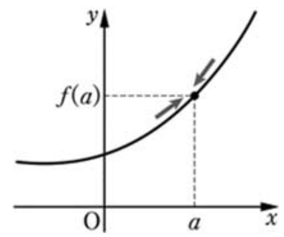
③ 関数の連続性

(教科書 p.125)

関数 $f(x)$ の定義域に属する x の値 a に対して，右の図のように

(⑱ 　　　　　　　　　　)

が成り立つとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で (⑲ 　　　　　　) であるという。



関数 $f(x)$ が，定義域に属する x の値 a で連続でないとき，$f(x)$ は $x=a$ で (⑳ 　　　　　　) であるという。

区間における連続性

(教科書 p.125)

不等式

$a<x<b,\ a\leqq x<b,\ a<x\leqq b,\ a\leqq x\leqq b$

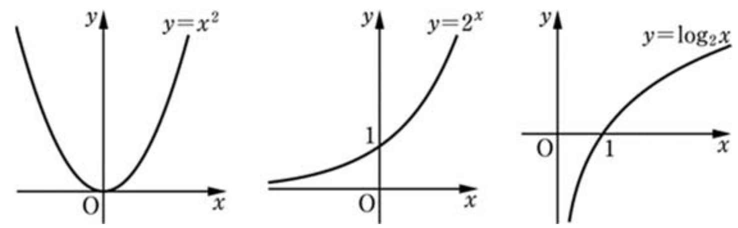
を満たす x 全体の集合を，いずれも (㉑ 　　　　　　) といい，それぞれ記号

$(a,\ b),\ [a,\ b),\ (a,\ b],\ [a,\ b]$

で表す。このうち，$(a,\ b)$ は (㉒ 　　　　　　)，$[a,\ b]$ は (㉓ 　　　　　　) とよばれる。

関数 $f(x)$ がある区間 I に属するすべての x の値で連続であるとき，$f(x)$ は (㉔ 　　　　　　) である，または区間 I における (㉕ 　　　　　　) であるという。

例11 2 次関数 $y=x^2$，指数関数 $y=2^x$，対数関数 $y=\log_2 x$ は，それぞれの関数の定義域 $(-\infty,\ \infty)$，$(-\infty,\ \infty)$，$(0,\ \infty)$ で (　　　　　　) である。



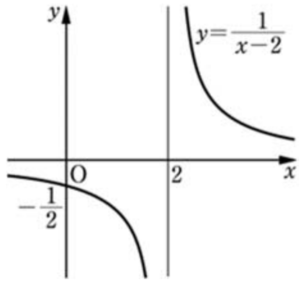
例12 分数関数

$$y=\frac{1}{x-2}$$

は，分母を 0 にしない 2 つの区間

(　　　　　　　　), (　　　　　　　　)

のそれぞれで (　　　　　　) である。

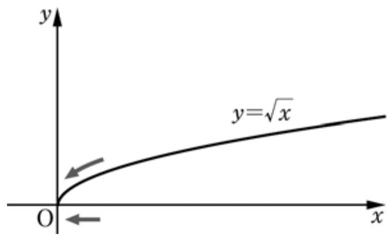


問16 関数 $y=\frac{x-1}{x+3}$ が連続である区間を求めよ。

例13 無理関数 $f(x)=\sqrt{x}$ は区間(　　　　　　　　)で(　　　　　　　)で

$$\lim_{x\to+0}f(x)=$$

であるから，その定義域 (　　　　　　　　) で (　　　　　　　)である。



問17 関数 $y=\sqrt{x-5}$ が連続である区間を求めよ。

例14 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-x}{x-1} & (x\neq 1)\\ 2 & (x=1)\end{cases}$

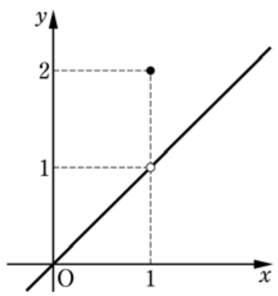
とすると

$$\lim_{x\to 1}f(x)=$$

であるが

$$f(1)=$$

であるから，関数 $f(x)$ は (　　　　　　　) で (　　　　　　　) である。



問18 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & (x\neq 3)\\ a & (x=3)\end{cases}$ が区間 $(-\infty,\ \infty)$ で連続となるように，定数 a の値を定めよ。

実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。この記号 [　] を (㉖　　　　　　　　　　　　)
という。たとえば，$[1.2]=1$, $[-2.3]=-3$, $[2]=2$ である。

例15 関数 $y=[x]$ は，x の整数値で不連続である。

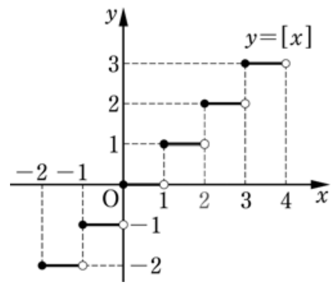
たとえば，$x=2$ に対しては

$$\lim_{x\to 2+0}[x]=$$

$$\lim_{x\to 2-0}[x]=$$

であるから，$\lim_{x\to 2}[x]$ は存在しない。

よって，関数 $y=[x]$ は (　　　　　　　) で (　　　　　　　) である。



問19 関数 $y=\left[\frac{x}{2}\right]$ が，次の x の値で連続であるかどうかを調べよ。

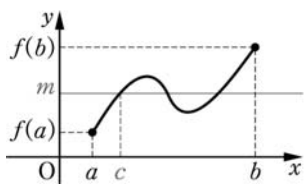
(1)　$x=1$

⑵　$x=2$

中間値の定理

（教科書 p.128）

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続ならば，この関数のグラフは点 $(a,\ f(a))$ と $(b,\ f(b))$ の間で切れ目なく続いている。したがって，次の（㉗　　　　　　　　　　）が成り立つ。



中間値の定理
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続であり，$f(a)\neq f(b)$ ならば， $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 m に対して $f(c)=m$ となるような実数 c が a と b の間に少なくとも 1 つ存在する。

例題 8　方程式 $2^x+x-4=0$ は，$1<x<2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを証明せよ。

証明

問20　方程式 $x^3-2x+5=0$ は，$-3<x<-2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを証明せよ。

Training

（教科書 p.129）

１７　次の極限値を求めよ。

（1）　$\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x^2-3x-10}{x^2-x-6}$

（2）　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

１８　等式 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=7$ が成り立つように，定数 a, b の値を定めよ。

１９　次の極限値を求めよ。

（1）　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x}-2x\right)$

（2）　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-x-1}-\sqrt{2}x\right)$

２０　次の極限を調べよ。

（1）　$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+3}{x^2-3x+1}$

（2）　$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x(x+5)}$

２１　次の極限を調べよ。

（1）　$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x}{1-4^x}$

（2）　$\lim_{x\to+0}2^{\frac{1}{x}}$

(3)　$\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{2x+3}{x+1}$

(4)　$\lim_{x\to\infty}\left\{\log_2(x+2)-\log_2 x\right\}$

２２　次の極限値を求めよ。

（1）　$\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$

（2）　$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2}$

２３　次の極限値を求めよ。

（1）　$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\tan x}$

（2）　$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2}$

２４　次の関数が連続である区間を求めよ。

（1）　$y = \frac{4x^2-2x+5}{3x^2+2x-1}$

（2）　$y = \frac{3}{4^x-2}$

２５　4 次方程式 $x^4 - 3x + 1 = 0$ は，1 より小さい正の解をもつことを証明せよ。