２節 数列の極限

❶ 数列の極限

（教科書 p.91）

項が限りなく続く数列

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$

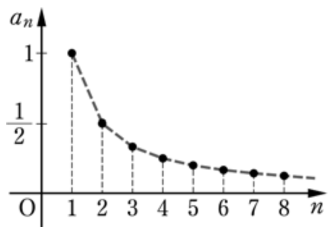
を（①　　　　　　　　）という。a_n をその（②　　　　　　　　）といい，この無限数列を $\{a_n\}$ で表す。

数列の収束

（教科書 p.91）

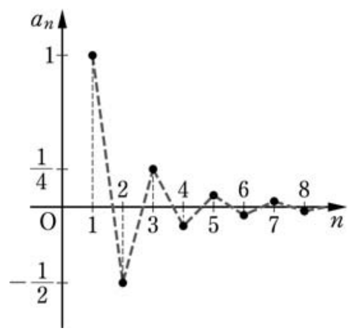
例1 (1)　数列 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$

では，n が限りなく大きくなるとき，第 n 項は（　　　　　）に限りなく近づく。



(2)　数列 $1,-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},-\frac{1}{8},\ \cdots,\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \cdots$

では，n が限りなく大きくなるとき，第 n 項は（　　　　　）に限りなく近づく。



一般に，数列 $\{a_n\}$ において，n が限りなく大きくなるにつれて，a_n が一定の値 α に限りなく近づくとき，数列 $\{a_n\}$ は α に（③　　　　　）するといい，α を数列 $\{a_n\}$ の（④　　　　　）という。

数列 $\{a_n\}$ の極限値が α であるとき

（⑤　　　　　　　　）　　または　　（⑥　　　　　　　　　　）

と書く。

例2 教科書 91 ページの例 1 は，次のように表される。

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$

例3 数列

$\frac{3}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{6}{4},\ \cdots,\ \frac{n+2}{n},\ \cdots$

の第 n 項 $\frac{n+2}{n}$ を変形すると，（　　　　　　）となる。

ここで，n を限りなく大きくすると，$1+\frac{2}{n}$ は限りなく（　　　　　）に近づく。ゆえに，この数列は（　　　　　）し，極限値は

（　　　　　　　　　　　　　）

問1 次の数列の極限値を求めよ。

(1)　$\frac{2}{1},\ \frac{5}{4},\ \frac{10}{9},\ \frac{17}{16},\ \cdots,\ \frac{n^2+1}{n^2},\ \cdots$

(2)　$2,\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{9},\ -\frac{2}{27},\ \cdots,\ \frac{2}{(-3)^{n-1}},\ \cdots$

数列の発散

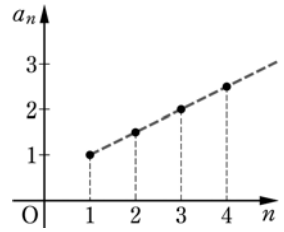
（教科書 p.93）

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，$\{a_n\}$ は（⑦　　　　　　）するという。

例4 (1)　数列

$1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ \cdots,\ \frac{n+1}{2},\ \cdots$

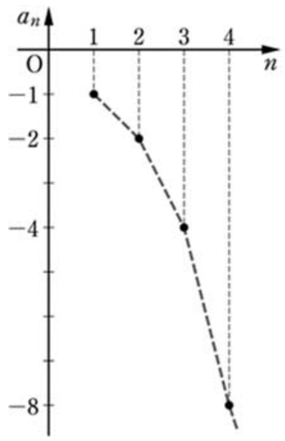
は，n を限りなく大きくすると，第 n 項 $\frac{n+1}{2}$ が限りなく大きくなるので（　　　　　　）する。



(2)　数列

$-1,\ -2,\ -4,\ -8,\ \cdots,\ -2^{n-1},\ \cdots$

は，n を限りなく大きくすると，第 n 項 -2^{n-1} は負で，その絶対値 $|-2^{n-1}|$ が限りなく大きくなるので（　　　　　　）する。



一般に，数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくすると a_n が限りなく大きくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は（⑧　　　　　　　　）するといい

（⑨　　　　　　　　）または（⑩　　　　　　　　　　）

と書く。また，数列 $\{a_n\}$ において，n を限りなく大きくすると a_n が負で絶対値 $|a_n|$ が限りなく大きくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は（⑪　　　　　　　　）するといい，次のように書く。

（⑫　　　　　　　　）または（⑬　　　　　　　　　　）

例5 教科書 93 ページの例 4 は，次のように表される。

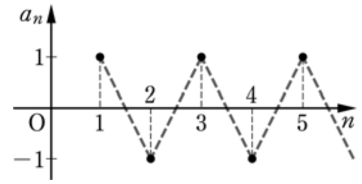
(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=$

(2)　$\lim_{n\to\infty}(-2^{n-1})=$

数列

$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots$

は，収束しないから発散する。しかし，正の無限大にも負の無限大にも発散しない。このような数列は（⑭　　　　　　）するという。振動するとき，極限はない。



数列 $\{a_n\}$ の収束，発散についてまとめると，次のようになる。

数列の収束・発散

- 収束 ……… $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$　（一定の値 α に収束）
- 発散(収束しない)
  - $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$　（正の無限大に発散）
  - $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$　（負の無限大に発散）
  - 振動　（極限はない）

$\boxed{\text{注意}}$　数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$ のとき，それぞれ数列 $\{a_n\}$ の「極限は正の無限大である」，「極限は負の無限大である」ということがある。

問2 次の数列の収束，発散を調べよ。

(1)　$5,\ 8,\ 11,\ \cdots,\ 3n+2,\ \cdots$

(2)　$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ 1-\frac{1}{n+1},\ \cdots$

(3)　$1,\ -2,\ 3,\ \cdots,\ (-1)^{n-1}n,\ \cdots$

(4)　$-1,\ -4,\ -9,\ \cdots,-n^2,\ \cdots$

極限値と四則

（教科書 p.94）

数列の極限値については，次の性質が成り立つ。

極限値と四則

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき

[1] $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$ ただし，k は定数

[2] $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta, \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$

[3] $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

[4] $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ ただし，$\beta \neq 0$

例6 $\lim_{n\to\infty} a_n = 3, \lim_{n\to\infty} b_n = 2$ のとき

（1） $\lim_{n\to\infty} (5a_n - 3b_n) =$

（2） $\lim_{n\to\infty} a_n b_n =$

問3 教科書 95 ページの例 6 の数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty} (2a_n + 7b_n)$ を求めよ。

例7

（1） $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1} =$

分母の数列が 0 以外の値に収束するような式に変形する

（2） $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3}{n+4} =$

$\lim_{n\to\infty}\left(2n+\frac{3}{n}\right)=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)=1$

問4 次の極限を調べよ。

（1） $\lim_{n\to\infty} \frac{5n-4}{2n+3}$

（2） $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+7}{3n-1}$

（3） $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-5}{n^2+4}$

例8 $\lim_{n\to\infty} (n^2 - 3n) =$

$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty, \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right) = 1$

問5 次の極限を調べよ。

（1） $\lim_{n\to\infty} (n^3 - 2n^2)$

（2） $\lim_{n\to\infty} (4n - 3n^2)$

例題 1 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ を求めよ。

考え方 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ を利用して，式を変形する。

解

問6 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

数列の極限と大小関係

（教科書 p.96）

数列の極限と大小関係については，次の性質が成り立つ。

数列の極限と大小関係
[1] 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ において，$a_n \leqq b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ ならば　$\alpha \leqq \beta$ [2] 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ において，$a_n \leqq b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ ならば　$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ [3] 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ において，$a_n \leqq b_n \leqq c_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき， $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$ ならば，$\{b_n\}$ も収束して $\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha$

注意　上の性質 [3] は（⑮　　　　　　　　　）とよばれている。

例題 2 θ を定数とするとき，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta$ を求めよ。

解

問7 θ を定数とするとき，次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos n\theta$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin^2 n\theta$

❷ 無限等比数列

（教科書 p.98）

数列 $a,\ ar,\ ar^2,\ \cdots,\ ar^{n-1},\ \cdots$ を初項 a，公比 r の（⑯　　　　　　　　　）という。

数列 $\{r^n\}$ の極限
(1)　$r>1$　のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$
(2)　$r=1$　のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=1$
(3)　$\lvert r\rvert<1$　のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$　　$\longleftarrow \lvert r\rvert<1 \Longleftrightarrow -1<r<1$
(4)　$r\leqq -1$　のとき　数列 $\{r^n\}$ は振動し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n$ は存在しない。

例9

(1)　$1.1>1$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}1.1^n=$

(2)　$\left|-\frac{3}{4}\right|<1$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n=$

問8 第 n 項が次の式で表される数列の収束，発散を調べよ。

(1)　0.99^n

(2)　$\left(-\frac{4}{3}\right)^n$

(3)　$\left(\sqrt{2}\right)^n$

数列 $\{r^n\}$ の極限の結果から次のことがわかる。
数列 $\{r^n\}$ が収束する $\Longleftrightarrow -1 < r \leqq 1$

例10 数列 $\{(2x-1)^n\}$ が収束するような x の値の範囲を求めてみよう。
（　　　　　　　　　　　）であるから　（　　　　　　　　）

問9 数列 $\left\{\left(\frac{x-3}{2}\right)^n\right\}$ が収束するような x の値の範囲を求めよ。

例題 3 $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-5^n}{3^n+5^n}$ を求めよ。

解

問10 次の極限を調べよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-(-5)^n}{(-5)^n+3^n}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{3^n+4^n}$

例題 4　数列 $\left\{\frac{r^{n+1}}{1+r^n}\right\}$ の極限を調べよ。ただし，$r \neq -1$ とする。

考え方　$|r| < 1,\ r = 1,\ |r| > 1$ の場合に分けて考える。

解

問11 数列 $\left\{\frac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$ の極限を調べよ。ただし，$r \neq -1$ とする。

Challenge 例題 漸化式と極限

（教科書 p.102）

例題 $a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

解

問1 $a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

3 無限級数

（教科書 p.103）

無限数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

の形の式を（⑰　　　　　　　　）といい，a_n をこの無限級数の（⑱　　　　　　　　）という。

この無限級数を記号 Σ を用いて（⑲　　　　　　　　）とも書く。すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において，初項から第 n 項までの和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

を，この無限級数の（⑳　　　　　　　　）という。すなわち

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$
$$\cdots\cdots$$

数列 $\{S_n\}$ が収束して，その極限値が S であるとき，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=S$$

であるとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は S に（㉑　　　　　　）するといい，S をこの無限級数の（㉒　　　　　）という。このとき

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S \quad \text{または} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$$

と書く。

数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は（㉓　　　　　　）するという。

例題 5 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\cdots$

解

問12 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}+\cdots$

④ 無限等比級数

（教科書 p.105）

初項 a，公比 r の無限等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ からつくられた無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

を初項 a，公比 r の（㉔　　　　　　　　　）という。

教科書 99 ページの数列 $\{r^n\}$ の極限を用いると，無限等比級数は次のようになる。

(i)　$|\boldsymbol{r}| < \mathbf{1}$ のとき

$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ より，$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$

よって，この無限等比級数は収束し，その和は（㉕　　　　　）である。

(ii)　$\boldsymbol{r} = \mathbf{1}$ のとき

$S_n = na$ で，$a \neq 0$ であるから，この無限等比級数は（㉖　　　　　）する。

(iii)　$\boldsymbol{r} \leqq -\mathbf{1}$ または $\mathbf{1} < \boldsymbol{r}$ のとき

数列 $\{r^n\}$ は発散するから，$\{S_n\}$ も発散する。

よって，この無限等比級数は（㉗　　　　　）する。

無限等比級数の収束・発散
無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ の収束，発散は次のようになる。ただし，$a \neq 0$ とする。 [1]　$\lvert r\rvert < 1$ のとき収束して，その和は $\frac{a}{1-r}$ [2]　$\lvert r\rvert \geqq 1$ のとき発散する。

例題 6　次の無限等比級数の収束，発散を調べよ。また，収束するときはその和を求めよ。

(1)　$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$

(2)　$2 - 4 + 8 - 16 + \cdots$

解

問13　次の無限等比級数の収束，発散を調べよ。また，収束するときはその和を求めよ。

(1)　$64 - 32 + 16 - 8 + \cdots$

(2)　$5 - 5 + 5 - 5 + \cdots$

例題 7　無限等比級数 $1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots$ が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また，そのときの和を求めよ。

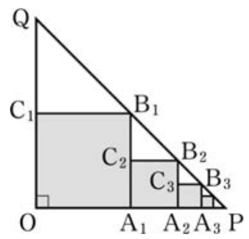
解

問14　無限等比級数 $1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + \cdots$ が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また，そのときの和を求めよ。

無限等比級数の図形への応用

（教科書 p.107）

例題 8　右の図のように，$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=1$ の直角二等辺三角形 OPQ に，正方形 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$ を内接させる。次に直角二等辺三角形 $\mathrm{A_1PB_1}$ に正方形 $\mathrm{A_1A_2B_2C_2}$ を内接させる。このように順に正方形をつくっていくとき，これらの正方形の面積の総和 S を求めよ。



解

問15 教科書 107 ページの例題 8 において，$\triangle\mathrm{QC_1B_1}$，$\triangle\mathrm{B_1C_2B_2}$，$\triangle\mathrm{B_2C_3B_3}$，$\cdots$ の周の長さの総和を求めよ。

循環小数

（教科書 p.108）

例題 9　次の循環小数を分数で表せ。

(1)　$0.\dot{5}\dot{7}$

(2)　$0.2\dot{3}$

解

問16 次の循環小数を分数で表せ。

(1)　$0.\dot{6}$

(2) $0.\dot{3}2\dot{4}$

(3) $1.5\dot{3}\dot{6}$

⑤ いろいろな無限級数

（教科書 p.109）

無限級数の和の性質
無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束し，その和がそれぞれ S, T であるとき [1] $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kS$ ただし，k は定数 [2] $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T$ [3] $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = S - T$

例題 10

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ の和を求めよ。

解

問17 次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n + (-3)^n}{5^n}$

次の命題が成り立つ。

無限級数の収束・発散
[1]　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する　$\Longrightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
[2]　数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない　$\Longrightarrow$ 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

注意　[2] は [1] の対偶である。

例11 数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ は，（　　　　　　　　　　）で（　　　　）に収束しないから，無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\cdots$$ は（　　　　　）する。

問18 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ は発散することを示せ。

Training

（教科書 p.111）

7　次の数列の収束，発散を調べよ。

(1)　$\frac{3}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{3},\ \cdots,\ \frac{2n+1}{n},\ \cdots$

(2)　$0,\ 1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1+(-1)^n}{n},\ \cdots$

8　次の極限を調べよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n+3}$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{n^2-2}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2+2n-1}{n+5}$

(4) $\lim_{n\to\infty}(2n-3n^2)$

9 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-3}\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n}$

１０ θを定数とするとき，$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n\theta}{n^2}$ を求めよ。

１１ 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^{n-1}+3^{n-1}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{0.3^n-0.2^n}{0.5^n+0.1^n}$

１２ 数列 $\left\{\frac{r^{2n+1}}{1+r^{2n}}\right\}$ の極限を調べよ。

１３ 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\frac{3}{2\cdot5}+\frac{3}{5\cdot8}+\frac{3}{8\cdot11}+\cdots+\frac{3}{(3n-1)(3n+2)}+\cdots$

(2) $\frac{2}{\sqrt{3}+1}+\frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}+\cdots$

１４　無限等比級数 $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x^3+\cdots$ が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また，そのときの和を求めよ。

１５　次の循環小数を分数で表せ。

(1)　$0.\dot{2}3\dot{4}$

(2)　$12.5\dot{6}\dot{3}$

１６　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot(-2)^n+2\cdot5^n}{10^n}$ の和を求めよ。