1節　関数

❶ 分数関数とそのグラフ

（教科書 p.78）

$y=\frac{1}{x}$ や $y=\frac{x+2}{x-1}$ のように，x の分数式で表される関数を x の（①　　　　　　　）という。その定義域は，分母を 0 にしない x の値全体である。
たとえば，分数関数 $y=\frac{x+2}{x-1}$ の定義域は，1 以外のすべての実数である。

$y=\frac{k}{x-p}+q$ のグラフ

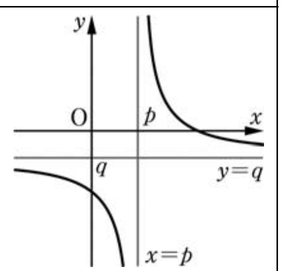
（教科書 p.78）

問1 関数 $y=\frac{3}{x}$，$y=-\frac{3}{x}$ のグラフをかけ。

関数 $y=\frac{k}{x}$ のグラフの平行移動については，次のようになる。

$y=\frac{k}{x-p}+q$ のグラフ

$y=\frac{k}{x-p}+q$ のグラフは，$y=\frac{k}{x}$ のグラフを $\boldsymbol{x}$ 軸方向に $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{y}$ 軸方向に $\boldsymbol{q}$ だけ平行移動した直角双曲線である。その漸近線は $\mathbf{2}$ 直線 $\boldsymbol{x=p}$，$\boldsymbol{y=q}$ である。



例1 関数 $y=\frac{2}{x-3}+1$ のグラフをかいてみよう。
このグラフは，
関数 $y=\frac{2}{x}$ のグラフを
x 軸方向に（　　　　　），
y 軸方向に（　　　　　）
だけ平行移動した直角双曲線である。
その漸近線は
2 直線（　　　　　　　　　）
である。

問2 次の関数のグラフをかけ。また，その漸近線を求めよ。
(1)　$y=\frac{4}{x+2}-1$

(2)　$y=-\frac{3}{x-1}+2$

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ

（教科書 p.80）

例題 1 関数 $y=\frac{2x-1}{x-1}$ のグラフをかけ。また，その漸近線を求めよ。

解

問3 次の関数のグラフをかけ。また，その漸近線を求めよ。

(1)　$y=\frac{3x}{x-2}$

(2)　$y=\frac{4x+1}{x+1}$

例題 2 関数 $y=\frac{x}{x+2}$ について，次の問に答えよ。

(1)　この関数のグラフと，直線 $y=-x$ との共有点の x 座標を求めよ。

(2)　グラフを利用して，不等式 $\frac{x}{x+2}\geqq -x$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

解

問4 グラフを利用して，次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ。

(1) $\frac{x+1}{x+2} \geqq 2$

(2) $\frac{2x-3}{x-2} > x$

❷ 無理関数とそのグラフ

（教科書 p.82）

$\sqrt{x}$, $\sqrt{-2x+4}$, $\sqrt{x^2+1}$ のように，根号の中に文字を含む式を（②　　　　　　　）といい，無理式で表される関数を（③　　　　　　　）という。その定義域は，根号の中を 0 以上にする x の値全体である。

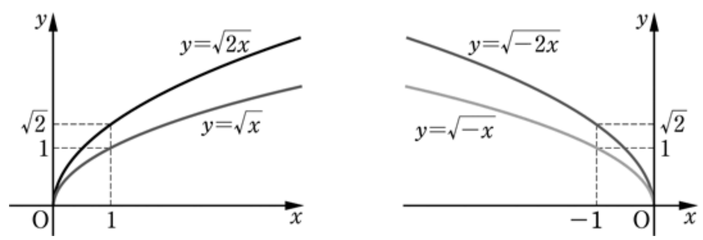
例2 $y=\sqrt{-2x+4}$ は無理関数で，その定義域は根号の中を 0 以上にする x の値全体であるから，（　　　　　　）である。

問5 無理関数 $y=-\sqrt{x+2}$ の定義域を求めよ。

$y=\sqrt{ax}$ のグラフ

（教科書 p.82）

例3 関数 $y=\sqrt{2x}$ のグラフと，関数 $y=\sqrt{-2x}$ のグラフは，次の図のようになる。これらのグラフはそれぞれ関数 $y=\sqrt{x}$ と関数 $y=\sqrt{-x}$ のグラフを（　　　　　）方向に（　　　　　）倍に拡大して得られる。



問6 次の関数のグラフをかけ。

（1） $y=\sqrt{3x}$

（2） $y=\sqrt{-3x}$

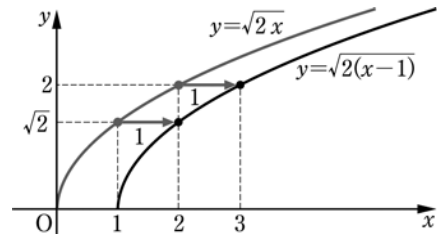
（3） $y=-\sqrt{3x}$

（4） $y=-\sqrt{-3x}$

$y=\sqrt{ax+b}$ のグラフ

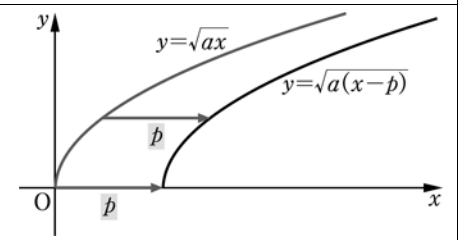
（教科書 p.84）

例4 関数 $y=\sqrt{2x}$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動すると関数（　　　　　　　　　　　）のグラフが得られる。
そのグラフは右の図のようになる。

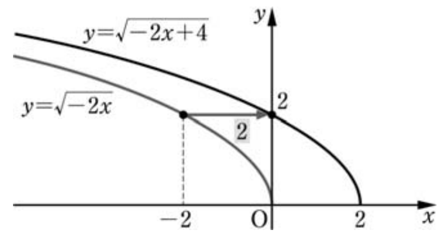


問7 関数 $y=\sqrt{3x}$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動した曲線をグラフとする関数を求め，そのグラフをかけ。

$y=\sqrt{a(x-p)}$ のグラフ
関数　$y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動すれば 関数　$y=\sqrt{a(x-p)}$ のグラフが得られる。



例5 関数 $y=\sqrt{-2x+4}$ のグラフをかいてみよう。
関数 $y=\sqrt{-2x+4}$ は（　　　　　　　　　　　）と変形される。
したがって，そのグラフは（　　　　　　　　　）
のグラフを x 軸方向に（　　　　）
だけ平行移動したもので，右の図のようになる。



問8 次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\sqrt{x-3}$

(2)　$y=\sqrt{-x-2}$

(3)　$y=-\sqrt{3x+6}$

(4)　$y=-\sqrt{-3x-5}$

例題 3 関数 $y=\sqrt{x+5}$ について，次の問に答えよ。

(1)　この関数のグラフと，直線 $y=-x+1$ の共有点の x 座標を求めよ。

(2)　グラフを利用して，不等式 $\sqrt{x+5}<-x+1$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

解

問9 グラフを利用して，次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ。

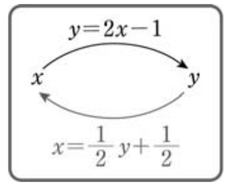
(1)　$\sqrt{-x+5} < 3$

(2)　$\sqrt{2x+8} \geqq x$

③ 逆関数と合成関数

逆関数

（教科書 p.86）



たとえば，関数

$y = 2x - 1$　　……①

を考え，それを x について解くと

$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$　　……②

となる。②は，x が y の関数であることを示している。

ここで，x と y を入れかえると　$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$　　……③

このようにして得られた関数③を①の（④　　　　　　）という。

一般に，関数 $y = f(x)$ を x に関する方程式と考えて，x について解き，ただ 1 つの解 $x = g(y)$ が得られたとする。このとき，y の値に対して，x の値がただ 1 つ定まるから，x は y の関数であると考えられる。ここで，x と y を入れかえて得られる関数 $y = g(x)$ を $y = f(x)$ の逆関数といい，次のように表す。

（⑤　　　　　　　　）

逆関数の求め方
(1)　$y = f(x)$ を x について解き，$x = g(y)$ の形に変形する。 (2)　x と y を入れかえて，$y = g(x)$ とする。

例6 関数 $y = \frac{1}{3}x + 1$ の逆関数を求めてみよう。

$y = \frac{1}{3}x + 1$ を x について解くと　（　　　　　　　　）

x と y を入れかえると，求める逆関数は　（　　　　　　　　）

問10 次の関数の逆関数を求めよ。

(1)　$y=-4x+5$

(2)　$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

例7 関数 $y=2^x$ の逆関数を求めてみよう。

$y=2^x$ を x について解くと

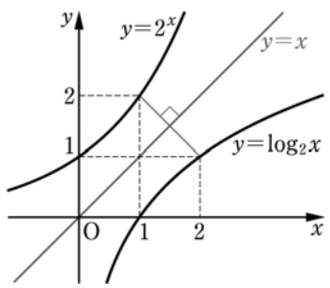
(　　　　　　　　　　)

x と y を入れかえると

(　　　　　　　　　　)

ゆえに，関数 $y=2^x$ の逆関数は

(　　　　　　　　　　)



教科書 87 ページの例 7 で，関数 $y=2^x$ の

定義域は　実数全体，　　　値域は　正の実数全体

であり，その逆関数 $y=\log_2 x$ の

定義域は　正の実数全体，　値域は　実数全体

である。一般に，(⑥　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

問11 次の関数の逆関数を求めよ。

(1)　$y=3^x$

(2)　$y=\log_{10} x$

例8 関数 $y=x^2\ (x\geqq 0)$ の逆関数を求めてみよう。

$y=x^2$ を x について解くと

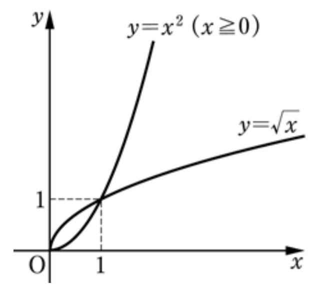
(　　　　　　　　　　)

$x\geqq 0$ であるから

(　　　　　　　　　　)

ここで，x と y を入れかえると，

求める逆関数は　(　　　　　　　　　　)



注意　例 8 において，$y=x^2$ の定義域を制限しなければ，$y=9$ のとき，$x=\pm 3$ となり，x の値はただ 1 つに定まらない。したがって，$y=x^2$ の逆関数は考えられない。

問12 次の関数の逆関数を求めよ。

(1)　$y = x^2\ (x \leqq 0)$

(2)　$y = x^2 + 1\ (x \geqq 0)$

逆関数のグラフ

（教科書 p.88）

一般に，次のことがいえる。

逆関数のグラフ
関数 $y = f(x)$ のグラフとその逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $\boldsymbol{y = x}$ に関して対称である。

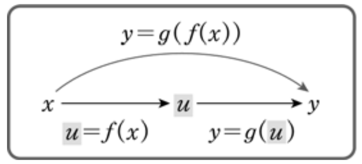
問13 次の関数とその逆関数のグラフをかけ。

(1)　$y = 2x + 3$

(2)　$y = 3^{-x}$

合成関数

（教科書 p.88）



一般に，y が u の関数で

$$y = g(u)$$

と表され，u が x の関数で

$$u = f(x)$$

と表されるとき，y は x の関数で

（⑦　　　　　　　　　）

と表される。このようにして得られる関数 $y = g\big(f(x)\big)$ を，f と g の（⑧　　　　　　　　　）という。$g\big(f(x)\big)$ を（⑨　　　　　　　　　）と書くこともある。

例9 $f(x) = x^2$，$g(x) = 2x + 1$ のとき，合成関数 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ を求めてみよう。

$(g \circ f)(x) =$

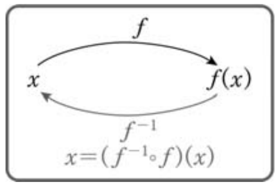
$(f \circ g)(x) =$

問14 $f(x) = 2x - 3$，$g(x) = \frac{1}{x-2}$ であるとき，合成関数 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。

一般に，関数 $y=f(x)$ が逆関数 $y=f^{-1}(x)$ をもつとき

(⑩　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

が成り立つ。



問15 $f(x)=2^x$，$g(x)=\log_2 x$ であるとき，次の合成関数を求めよ。

(1)　$(g\circ f)(x)$

(2)　$(f\circ g)(x)$

Training

（教科書 p.90）

1　直角双曲線 $y=\frac{2}{x}$ を平行移動した次の曲線をグラフとする関数を求めよ。

(1)　漸近線が，2 直線 $x=2$，$y=-3$ である曲線

(2)　y 軸と点 $(0,\ 1)$ で交わり，x 軸を漸近線とする曲線

2 関数 $y=\frac{2x-5}{x-4}$ について，次の問に答えよ。

(1) グラフをかけ。また，漸近線を求めよ。

(2) この関数のグラフと，直線 $y=x$ との共有点の x 座標を求めよ。

(3) グラフを利用して，不等式 $\frac{2x-5}{x-4}\leqq x$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

3 関数 $y=2\sqrt{x}$ のグラフを C とする。次の曲線をグラフとする関数を求めよ。

(1) C と x 軸に関して対称である曲線

(2) C と y 軸に関して対称である曲線

(3) C を x 軸方向に -2 だけ平行移動した曲線

(4) C を x 軸方向に平行移動して，点 $(7,\ 4)$ を通るようにした曲線

4 関数 $y=\sqrt{2x-1}$ について，次の問に答えよ。

(1) グラフをかけ。

(2) この関数のグラフと，直線 $y=x-2$ との共有点の x 座標を求めよ。

(3) グラフを利用して，不等式 $\sqrt{2x-1}<x-2$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

5 次の関数とその逆関数のグラフをかけ。

(1) $y=-\frac{1}{2}x+1$

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}x$

6 $f(x)=x-3$, $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$ であるとき，合成関数 $(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。