

2節 図形への応用

1 複素数平面上的図形

内分点と外分点

(教科書 p.64)

内分点と外分点

2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に

内分する点は $\frac{n\alpha+m\beta}{m+n}$, 外分する点は $\frac{-n\alpha+m\beta}{m-n}$

とくに, 線分 AB の中点は $\frac{\alpha+\beta}{2}$

問1 次の2点 α, β を結ぶ線分を $3:2$ に内分する点および外分する点を表す複素数を求めよ。

(1) $\alpha = 2 + 4i, \beta = 7 - i$

(2) $\alpha = 4 - i, \beta = -2 + 3i$

垂直二等分線

異なる2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線上の点 $P(z)$ は

$$AP = BP$$

すなわち

$$(|z - \alpha| = |z - \beta|) \quad (1)$$

を満たす点である。

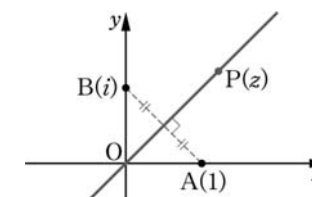
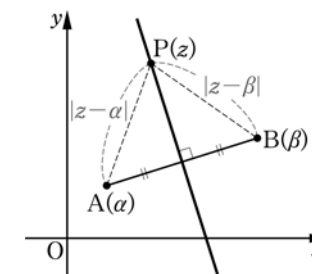
例1 $|z - 1| = |z - i|$

を満たす点 $P(z)$ は, 2点 $A(1)$, $B(i)$ を結ぶ線分 AB の () をえがく。

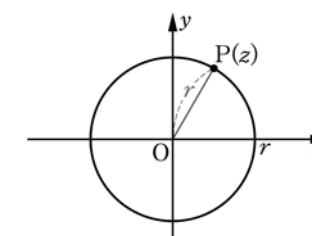
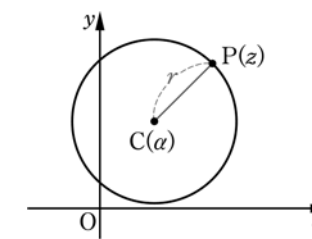
問2 次の条件を満たす点 z はどのような図形をえがくか。

$$|z + 2| = |z - i|$$

(教科書 p.65)



(教科書 p.66)



円

点 $C(\alpha)$ を中心とする半径 r の円上の点 $P(z)$ は

$$CP = r$$

すなわち

$$(|z - \alpha| = r) \quad (2)$$

を満たす点である。

とくに, 原点 O を中心とする半径 r の円上の点 $P(z)$ は

$$(|z| = r) \quad (3)$$

を満たす点である。

例2 $|z + 1 - i| = 2$ を満たす点 $P(z)$ は、どのような図形をえがくか調べてみよう。

()
と変形できるから、点 $P(z)$ は () を中心とする
() をえがく。

問3 次の条件を満たす点 z はどのような図形をえがくか。

(1) $|z| = 1$

(2) $|z - 2i| = 3$

(3) $|z + 2 - 3i| = 2$

例題 $w = i(z + 2)$ とする。点 z が単位円上を動くとき、点 w はどのような図形をえがくか。

1

解

問4 点 z が単位円上を動くとき、次のように表される点 w はどのような図形をえがくか。

(1) $w = z - 1$

(2) $w = i(2z + 1)$

問5 $2w = z + 1 + i$ とする。点 z が原点 0 を中心とする半径 2 の円上を動くとき、点 w はどのような図形をえがくか。

Challenge **例題** 複素数平面上の点の軌跡

(教科書 p.68)

共役な複素数について、次のことが成り立つ。

(1) $(z^4)^{\circledast} = (z^{\circledast})^4$ (2) $(z^5)^{\circledast} = (z^{\circledast})^5$

(3) $(z^6)^{\circledast} = (z^{\circledast})^6$ (4) $(z^7)^{\circledast} = (z^{\circledast})^7$

例題 複素数平面において、2点 $A(-1)$, $B(2)$ からの距離の比が $2:1$ である点 $P(z)$ のえがく図形を求めよ。

解

問1 複素数平面において、2点 $A(-2i)$, $B(2i)$ からの距離の比が $3:1$ である点 $P(z)$ のえがく図形を求めよ。

一般に、 $m \neq n$ とするとき、2点 A, B からの距離の比が $m:n$ である点全体は円を表す。この円を $(\textcircled{8})$ という。

2 2直線のなす角

2直線のなす角

(教科書 p.69)

例3 2点 $Q(3+2i)$, $R(-5+i)$ において, $\angle QOR$ を求めてみよう。

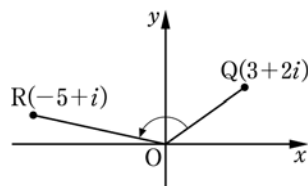
$$\frac{-5+i}{3+2i} = \frac{(-5+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{-13+13i}{13}$$

$$= -1+i$$

=

よって

$$\angle QOR =$$



問6 2点 $Q(2+i)$, $R(1+3i)$ において, $\angle QOR$ を求めよ。

問7 3点 $P(-\sqrt{3}+i)$, $Q(i)$, $R(-2\sqrt{3}+4i)$ において, $\angle QPR$ を求めよ。

3点の位置関係

異なる3点 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$, $R(\gamma)$ について

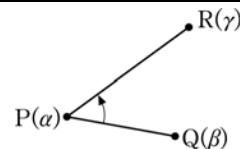
3点 P , Q , R が一直線上にある $\iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数

2直線 PQ , PR が垂直に交わる $\iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数

複素数と角

異なる3点 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$, $R(\gamma)$ に対して

$$\angle QPR = \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$$

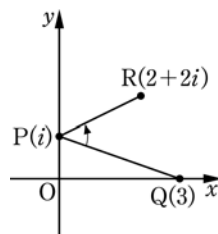


例4 3点 $P(i)$, $Q(3)$, $R(2+2i)$ において, $\angle QPR$ を求めてみよう。

()

()

よって $\angle QPR =$



例5 x を実数とする。3点 $P(2i)$, $Q(1+i)$, $R(x)$ が一直線上にあるときの x の値を求めてみよう。

$$\frac{x-2i}{(1+i)-2i} = \frac{x-2i}{1-i} = \frac{(x+2)+(x-2)i}{2} \dots\dots ①$$

よって, 3点 が一直線上にあるとき, ①は () であるから

() すなわち () である。

—— (虚部) = 0

問8 x を実数とする。3点 $P(2+5i)$, $Q(-1-i)$, $R(4+xi)$ について, 2直線 PQ , PR が垂直に交わる
ときの x の値を求めよ。

例題 3点 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$, $R(\gamma)$ において, $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = i$ が成り立つとき, $\triangle PQR$ はどのような三角形か。

2

解

問9 3点 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$, $R(\gamma)$ において, $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = 1 + \sqrt{3}i$ が成り立つとき, $\triangle PQR$ はどのような三角形か。

Training

(教科書 p.72)

9 2点 $A(5 + 6i)$, $B(1 - 2i)$ について, 次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を $1 : 3$ に内分する点

(2) 線分 AB を $1 : 3$ に外分する点

(3) 線分 AB の中点

10 次の条件を満たす点 z はどのような図形をえがくか。

(1) $|z| = |z + 4 - 2i|$

(2) $|z - 1 + i| = \sqrt{2}$

1 1 点 z が単位円上を動くとき、次のように表される点 w はどのような図形をえがくか。

(1) $w = 2i(z - 3)$

(2) $w = (i - 1)(z + 1)$

1 2 3つの複素数 α, β, γ の表す点をそれぞれ P, Q, R とする。次のそれぞれの場合において、 $\angle QPR$ を求めよ。

(1) $\alpha = 1 + 2i, \beta = 3 + 3i, \gamma = 2 + 5i$

(2) $\alpha = -2, \beta = i, \gamma = 1 - 6i$

1 3 x は実数であり, $x \neq 0$ とする。3 点 $P(2 - i)$, $Q(x)$, $R(xi)$ について, 次の条件を満たすような実数 x の値を求めよ。

(1) 3 点 P , Q , R が一直線上にある。

(2) 2 直線 PQ , PR が垂直に交わる。

1 4 3 点 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$, $R(\gamma)$ において, $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 1 - i$ が成り立つとき, $\triangle PQR$ はどのような三角形か。