１節　複素数平面

❶ 複素数平面

複素数平面

（教科書 p.48）

平面上に座標軸を定め

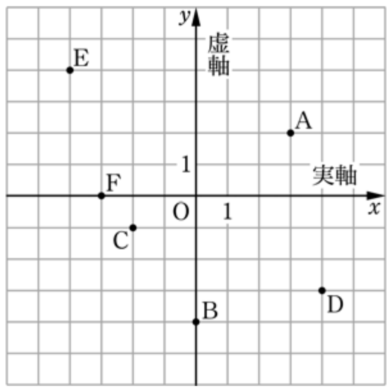
（①　　　　　　　　　　　　　　）　と　（②　　　　　　　　　）

を対応させる。このとき，すべての複素数はそれぞれ平面上の 1 つの点で表され，逆に平面上のすべての点はそれぞれ 1 つの複素数で表される。

例1 右の図で，点 A(3, 2)，B(0, −4)，C(−2, −1) はそれぞれ

（　　　　　　　），（　　　　　　），（　　　　　　　）

を表す。



問1 右の図で，点 D，E，F および原点 O は，それぞれどのような複素数を表すか。

各点 $(a,\ b)$ が複素数 $z=a+bi$ を表している平面を（③　　　　　　　　　）という。複素数平面では，x 軸を（④　　　　　　），y 軸を（⑤　　　　　　）という。

複素数 z に対応する点 P を（⑥　　　　　　）と表す。また，単に（⑦　　　　　　）ということもある。たとえば，例 1 における点 A は，$\mathrm{A}(3+2i)$ と表す。また，点 A を単に点 $3+2i$ ということもある。

問2 4 点 $\mathrm{A}(-1+i)$，$\mathrm{B}(2-3i)$，$\mathrm{C}(2i)$，$\mathrm{D}(-1)$ を，それぞれ複素数平面上に表せ。

複素数 $z=a+bi$ に対して，共役な複素数は $\bar{z}=a-bi$ であるから，複素数平面上で

（⑧　　　　　　　　　　　　　　　）

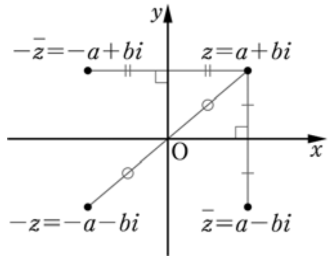
である。同様にして，

（⑨　　　　　　　　　　　　　　　）

であり，

（⑩　　　　　　　　　　　　　　　）

であることがわかる。



問3 複素数 $2-3i$ を表す点と実軸，原点，虚軸に関して対称な点が表す複素数をそれぞれ求めよ。

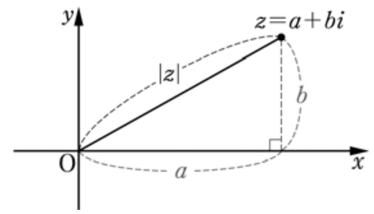
複素数の絶対値

（教科書 p.49）

点 z と原点 O との距離を複素数 z の（⑪　　　　　　　）といい，$|z|$ で表す。したがって，$z=a+bi$ とすると

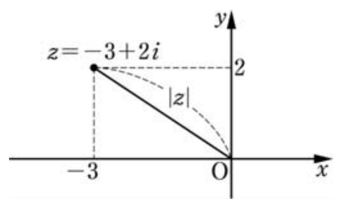
（⑫　　　　　　　　　　　　　）

である。



例2 $z=-3+2i$ について

$|z|=$



問4 次の複素数の絶対値を求めよ。

(1)　$1+2i$

(2)　$4-i$

絶対値の定義から，次のことが成り立つ。

(⑬　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

また，$z=a+bi$ とすると　　$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

であるから，次の式が成り立つ。

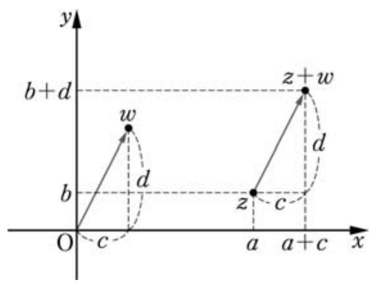
(⑭　　　　　　　　　　)

複素数の和と差

（教科書 p.50）

原点 0 を点 w に移すように平行移動することを

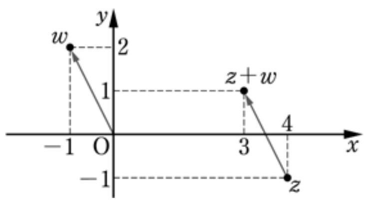
(⑮　　　　　　　　　　　　　　　　　)という。



例3 点 $z=4-i$ を $w=-1+2i$ だけ平行移動した点は

$z+w=$

$=$



問5 次の 2 点 z, w に対して，z を w だけ平行移動した点を求めよ。

(1)　$z=-2+i$, $w=3-2i$

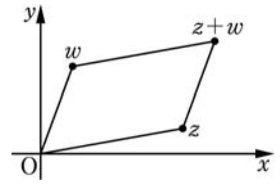
(2)　$z=-2i$, $w=-5+6i$

複素数の和

複素数平面上の 3 点 0, z, w が同一直線上になければ，4 点

0, z, $z+w$, w

は平行四辺形をつくる。



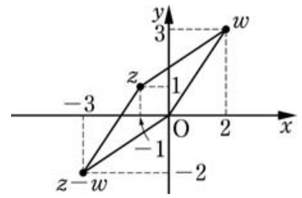
問6 $z=3-i$, $w=1+2i$ のとき，3 点 z, $z+w$, w を図示せよ。

例4 $z=-1+i$, $w=2+3i$ のとき

$z-w=$

であり，4 点 0, $z-w$, z, w は右の図のような(　　　　　　　　　)

をつくる。



問7 $z=3-i$, $w=1+2i$ のとき，3 点 $z-w$, z, w を図示せよ。

2 点間の距離

（教科書 p.51）

2 点間の距離
2 つの複素数 $z=a+bi$，$w=c+di$ の表す 2 点間の距離は $\boldsymbol{|z-w|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}$

例5 $z=2+3i$，$w=-2+4i$ のとき，2 点 z，w 間の距離は

$|z-w|=$

問8 次の 2 点間の距離を求めよ。

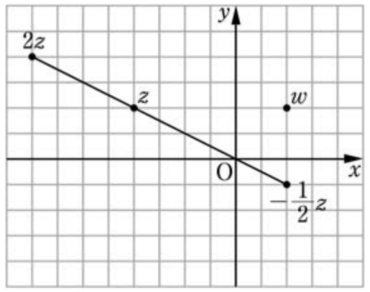
（1）　$z=5+2i$，$w=1-i$

（2）　$z=2-5i$，$w=7+7i$

複素数の実数倍

（教科書 p.52）

例6 右の図の複素数平面上の点 z に対して，$2z$，$-\frac{1}{2}z$ を図示すると，図のようになる。



問9 教科書 52 ページの例 6 の複素数平面上の点 z，w に対して，次の点を図示せよ。

（1）　$\frac{1}{2}w$

（2）　$-2w$

（3）　$-\frac{3}{2}w+z$

❷ 複素数の極形式

極形式

（教科書 p.53）

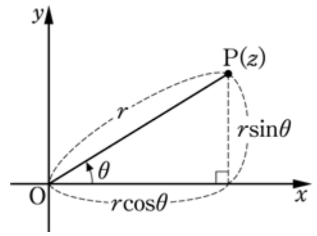
複素数平面上で，0 でない複素数 $z=a+bi$ が表す点を P とする。点 P と原点 O との距離を r，実軸の正の部分を始線としたときの動径 OP が表す角を θ とすれば

$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$

であるから

（⑯　　　　　　　　　　）

と表される。このような表し方を複素数 z の**極形式**という。



ここで

（⑰　　　　　　　　　　）

である。

また，θ を複素数 z の**偏角**といい，記号

（⑱　　　　　　　　）

で表す。偏角 θ は，$0\leqq\theta<2\pi$ ではただ 1 通りに定まる。偏角を一般角で考える場合，複素数 z の偏角の 1 つを θ とすると，$\arg z$ は次のように表される。

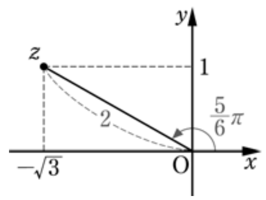
（⑲　　　　　　　　　　）　（n は整数）

$z=0$ に対しては，$r=0$ で，偏角は定義されない。

複素数の極形式
$\boldsymbol{z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$
ただし　$\boldsymbol{r = \lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2},\ \theta = \arg z}$

注意　arg は偏角を意味する argument に由来する記号である。

例7 絶対値 $r = 2$，偏角 $\theta = \frac{5}{6}\pi$ の複素数 z を求めてみよう。



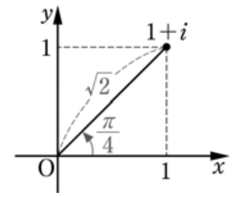
$z =$

問10 次の絶対値 r と偏角 θ をもつ複素数を求め，図示せよ。

(1)　$r = 2,\ \theta = \frac{\pi}{3}$

(2)　$r = \sqrt{2},\ \theta = \frac{5}{4}\pi$

例8 (1)　$1 + i$ を極形式で表してみよう。

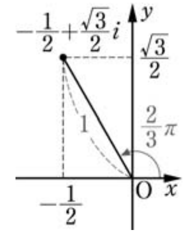


絶対値は　$r =$

右の図より，偏角は　$\theta =$

よって　$1 + i =$

(2)　$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ を極形式で表してみよう。



絶対値は　$r =$

右の図より，偏角は　$\theta =$

よって　$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i =$

問11 次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　$\sqrt{3} + i$

(2)　$1 - i$

⑶　$-\sqrt{3}-3i$

⑷　-1

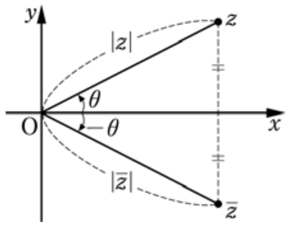
⑸　$2i$

複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と共役な複素数 $\bar{z}$ を極形式で表すと，右の図より

$$\bar{z}=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

である。よって，次のことが成り立つ。

（⑳　　　　　　　　　　　　　　　　）



注意　等式 $\arg\bar{z}=-\arg z$ は，両辺が 2π の整数倍の違いを除いて一致することを意味している。この章では，偏角についての等式は，この意味で考える。

複素数の積と商

（教科書 p.55）

0 でない 2 つの複素数 z_1，z_2 を極形式でそれぞれ

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\ z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

と表すとき，z_1，z_2 の積や商について，次のことが成り立つ。

複素数の積と商
⑴　積　$\boldsymbol{z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}}$ $\boldsymbol{\lvert z_1z_2\rvert=\lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert}$ $\boldsymbol{\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2}$ ⑵　商　$\boldsymbol{\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}}$ $\boldsymbol{\left\lvert\dfrac{z_1}{z_2}\right\rvert=\dfrac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}}$ $\boldsymbol{\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2}$

性質⑴が成り立つことを示してみよう。

証明　$z_1z_2=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\times r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

ゆえに　$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|$

$\arg(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2=\arg z_1+\arg z_2$

問12 性質(2)が成り立つことを示せ。

例9 $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$，$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ のとき

$z_1 z_2 =$

$\frac{z_1}{z_2} =$

問13 $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，$z_2 = 3\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ のとき，$z_1 z_2$ と $\frac{z_1}{z_2}$ をそれぞれ求めよ。

複素数の積の図表示

（教科書 p.56）

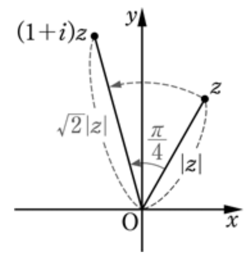
一般に，次のことが成り立つ。

複素数の積と回転１
$w = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ のとき，点 wz は点 z を原点 O を中心に θ_0 だけ回転し，さらに原点からの距離 $\lvert z\rvert$ を r_0 倍にした点である。

例10 点 z と点 $(1+i)z$ の位置関係を考えてみよう。

$1 + i =$

であるから，点 $(1+i)z$ は（　　　　　）を（　　　　　　）を中心に（　　　　）だけ回転し，原点からの距離 $\lvert z\rvert$ を（　　　　）倍にした点である。



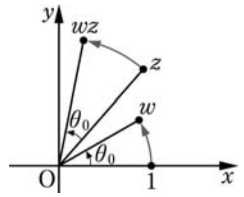
問14 点 z に対して，次の点はどのような位置関係にあるか。

(1)　$(\sqrt{3} + 3i)z$

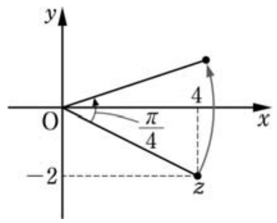
(2)　$\sqrt{2}(-1 + i)z$

複素数の積と回転２

$w=\cos\theta_0+i\sin\theta_0$ のとき，点 wz は点 z を原点 O を中心に θ_0 だけ回転した点である。



例11 $z=4-2i$ とする。点 z を原点 O を中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す複素数は



（　　　　　　　　　　　　）

＝

＝

問15 次の θ に対して，点 $-2+4i$ を原点 O を中心に θ だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(1)　$\theta=\frac{\pi}{6}$

(2)　$\theta=\frac{\pi}{2}$

Challenge 例題 三角形の頂点を表す複素数

（教科書 p.58）

例題 $z=1+i$ とする。2 点 0, z を頂点とする正三角形の第 3 の頂点を表す複素数 w を求めよ。

考え方 z の表す点を P, w の表す点を Q とすると，△OPQ が正三角形となるのは OP = OQ, ∠POQ = $\frac{\pi}{3}$ となるときである。

解

問1 $z=1+2i$ とする。原点 O が直角の頂点となる直角二等辺三角形の頂点の 1 つが z であるとき，第 3 の頂点を表す複素数 w を求めよ。

❸ ド・モアブルの定理

ド・モアブルの定理

（教科書 p.59）

ド・モアブルの定理
整数 n に対して $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

例12 $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3 =$

問16 次の計算をせよ。

(1)　$\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3$

(2)　$\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-2}$

例13 ド・モアブルの定理を用いて $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^4$ を計算してみよう。

$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i =$

であるから　$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^4 =$

$=$

$=$

問17 次の計算をせよ。

(1)　$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

(2)　$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^5$

例題 1　$(1+i)^7$ を計算せよ。

解

問18 次の計算をせよ。

(1)　$\left(\sqrt{3}+i\right)^4$

(2)　$(1-i)^{-3}$

(3)　$\left(\sqrt{3}-3i\right)^5$

1の n 乗根

（教科書 p.61）

自然数 n に対し，方程式 $z^n=1$ を満たす複素数 z を（㉑　　　　　　）という。

例14 ド・モアブルの定理を用いて 1 の 3 乗根を求めてみよう。

1 の 3 乗根を z とすると　（　　　　　　）　……①

ここで　$z=$　　　　　　　　……②

とおくと，ド・モアブルの定理により

$z^3=$

また　$1=$　　　　　　　であるから，①より

（　　　　　　　　　　　　）

両辺の絶対値と偏角を比較して

$r^3=1,\ r>0$　より　$r=$

$3\theta=0+2\pi\times k$　より　$\theta=$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で求めると　$k=$

よって　$\theta=$

したがって，②より 1 の 3 乗根は

$z=$

すなわち　$z=$

問19 1の4乗根，1の6乗根をそれぞれ求め，複素数平面上に図示せよ。

複素数 α に対し，方程式 $z^n = \alpha$ を満たす複素数 z を（㉒　　　　　　　　）という。

例題 2　方程式 $z^3=8i$ を解け。

解

問20 方程式 $z^4=8\left(-1+\sqrt{3}i\right)$ を解け。

Training

（教科書 p.63）

1　次の 2 点間の距離を求めよ。

(1)　$z = 4 - 3i,\ w = -1 + 9i$

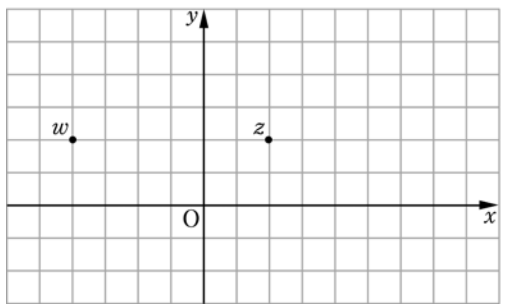
(2)　$z = 5 + i,\ w = 2 - 3i$

2　右の図の複素数平面上の点 $z,\ w$ に対して

$z + w,\ z - w,$

$\frac{5}{2}z,\ z - \frac{1}{2}w$

をそれぞれ図示せよ。



3　次の複素数を極形式で表せ。偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　$-\sqrt{3} - i$

(2)　$-1 + i$

(3)　$3i$

(4)　-4

4　次の計算をせよ。

(1)　$2\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

(2)　$\dfrac{\sqrt{3}\left(\cos\frac{11}{18}\pi + i\sin\frac{11}{18}\pi\right)}{2\left(\cos\frac{5}{18}\pi + i\sin\frac{5}{18}\pi\right)}$

5　点 z に対して，次の点はどのような位置関係にあるか。

(1)　$\left(-\sqrt{3} + i\right)z$

(2)　$-2(1 + i)z$

(3)　iz

6 点 $\sqrt{3}+i$ を原点 0 を中心に次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(1) $\frac{\pi}{3}$

(2) $\frac{4}{3}\pi$

(3) $\frac{5}{6}\pi$

(4) $-\frac{\pi}{2}$

7 次の計算をせよ。

(1) $\left(\sqrt{3}+i\right)^9$

(2) $\left(\sqrt{3}-i\right)^4$

(3) $\left(\frac{\sqrt{3}-3i}{2}\right)^6$

(4) $(-1+i)^{-5}$

8 次の方程式を解け。

(1) $z^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$

(2) $z^3 = -i$