練習問題A

（教科書 p.108）

1 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ の大きさについて，次の不等式が成り立つことを示せ。

$|\vec{a}+\vec{b}| \leqq |\vec{a}|+|\vec{b}|$

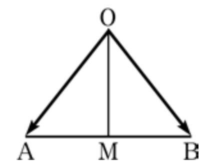
2 $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-\vec{b}|=3\sqrt{5}$ のとき，次の問に答えよ。

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $|\vec{a}+\vec{b}|$ の値を求めよ。

(2)　$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値と，そのときの t の値 t_1 を求めよ。

(3)　(2)の t_1 に対して，$\vec{a}+t_1\vec{b}$ と $\vec{b}$ とは垂直であることを確かめよ。

3 $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ である二等辺三角形 OAB の頂点 O と，底辺 AB の中点 M を結ぶ線分 OM は，底辺 AB に垂直であることをベクトルを用いて示せ。

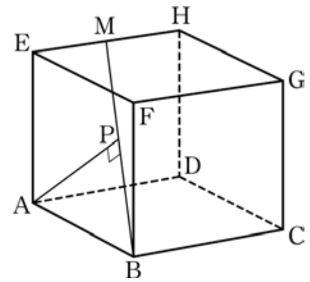


4 △ABCで，辺ABを2：1に内分する点をP，辺BCを2：3に内分する点をQ，辺CAを3：4に外分する点をRとそれぞれ定める。このとき，3点P，Q，Rは一直線上にあることを証明せよ。

5 $\vec{a}=\left(3,\ 0,\ \sqrt{3}\right)$と$x$軸，$y$軸，$z$軸の正の向きとのなす角をそれぞれ求めよ。

6 1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を P，辺 OB を2 : 1 に内分する点を Q とし，△ CPQ の重心を G とする。線分 OG の長さを求めよ。

7 立方体 ABCD − EFGH において，辺 EH の中点をM とする。このとき，線分 BM 上にある点 P において，線分 BM と線分 AP が直交するという。
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ として，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ で表せ。



練習問題Ｂ

（教科書 p.109）

8 △OAB において，$OA=2$，$OB=1$，$\angle AOB=60^\circ$ とする。OA の中点を C とし，線分 BC を引く。このとき，AB 上に点 M をとり，$OM \perp BC$ とする。AM : MB を求めよ。

9 平面上の異なる 3 点 O，A，B が一直線に並んでいないとし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく。

$$\vec{p}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

で表される点 $P(\vec{p})$ は，$\angle AOB$ の二等分線上にあることを証明せよ。

10 空間内に 4 点 $A(1,\ -1,\ 3)$，$B(4,\ 3,\ 3)$，$C(0,\ 1,\ 5)$，$D(5,\ -4,\ 8)$ がある。

（1） $AD \perp AB$，$AD \perp AC$ が成り立つことを示せ。

⑵　$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

⑶　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

⑷　点 A，B，C，D を頂点とする四面体の体積を求めよ。

11　四面体 ABCD において，次の問に答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ の値を求めよ。

⑵　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ であることを示せ。

12　四面体 OABC において，辺 OA，辺 CB をそれぞれ $1:2$ に内分する点を P，R とし，辺 AB，辺 OC をそれぞれ $3:1$ に内分する点を Q，S とする。このとき，線分 PR を $3:1$ に内分する点と線分 SQ を $1:2$ に内分する点は一致することを証明せよ。

13 点 $(-2,\ 3,\ 1)$ を中心とする球が平面 $x=3$ と接している。

(1) この球の方程式を求めよ。

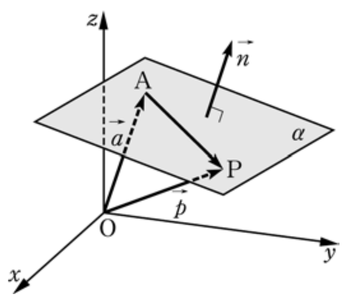
(2) この球が平面 $y=-1$ と交わってできる円の中心と半径を求めよ。

(3) 点 $(6,\ 6,\ 3)$ を通り，$\vec{u}=(4,\ 3,\ -1)$ に平行な直線が，この球と 2 点で交わっている。その交点の座標を求めよ。

発 展　平面の方程式

（教科書 p.110）

空間において，定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な平面の方程式を求めてみよう。



この平面を α とし，α 上の任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{n}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{0}$

よって　$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \vec{p} - \vec{a}$ であるから

$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$　……①

となる。

① を平面 α のベクトル方程式といい，$\vec{n}$ を平面 α の（㊻　　　　　　　　）という。さらに

$\vec{p} = (x,\ y,\ z)$，　$\vec{a} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$，　$\vec{n} = (a,\ b,\ c)$

とすると

$\vec{p} - \vec{a} = (x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1)$

であるから，①を成分で表すと次のようになる。

$$\boldsymbol{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0} \cdots\cdots②$$

ここで，$d = -ax_1 - by_1 - cz_1$ とおくと，②は

$ax + by + cz + d = 0$

と表される。

$\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ は 1 次方程式 $ax + by + cz + d = 0$ で表される平面の法線ベクトルである。

問1 点 $(2,\ 4,\ 5)$ を通り，$\vec{n} = (3,\ -1,\ -2)$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ。

問2 2 点 $\mathrm{A}(3,\ 2,\ 5)$，$\mathrm{B}(4,\ -2,\ 1)$ がある。点 A 通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

点と平面の距離

（教科書 p.111）

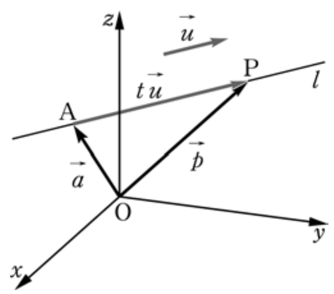
点と平面の距離
点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax + by + cz + d = 0$ の距離は $\dfrac{\boldsymbol{\lvert ax_1 + by_1 + cz_1 + d \rvert}}{\boldsymbol{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$

問3 点 $(3,\ -1,\ 2)$ と平面 $x + 2y - 3z + 4 = 0$ の距離を求めよ。

発 展　空間における直線の方程式

（教科書 p.112）

空間において，定点 A($\vec{a}$)を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{u}$ に平行な直線の方程式を求めてみよう。



この直線 l 上の任意の点を P($\vec{p}$) とすると，t を実数として

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u} \quad \cdots\cdots①$$

と表される。

① を直線 l の（㊼　　　　　　　　）という。

さらに，$\vec{p} = (x,\ y,\ z)$，$\vec{a} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\vec{u} = (a,\ b,\ c)$ として，①の両辺の各成分を比較すると次のようになる。

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \quad \cdots\cdots②$$

② を直線 l の（㊽　　　　　　　　）といい，t を（㊾　　　　　　）という。

また，$\vec{u} = (a,\ b,\ c)$ を直線 l の（㊿　　　　　　　　）という。

$a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$ のとき，②から t を消去すると

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad \cdots\cdots③$$

③は，点 A$(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，$\vec{u} = (a,\ b,\ c)$ を方向ベクトルとする直線の方程式である。

例 1 点 $(0,\ 8,\ -2)$ を通り，$\vec{u} = (3,\ -2,\ 1)$ を方向ベクトルとする直線の方程式は

問1 点 $(3,\ 4,\ -2)$ を通り，次のベクトル $\vec{u}$ を方向ベクトルとする直線の方程式を求めよ。

(1)　$\vec{u} = (-2,\ 1,\ 3)$

(2)　$\vec{u} = (5,\ 1,\ 4)$

例 2 (1)　$a \neq 0$，$b \neq 0$，$c = 0$ のとき，前ページの②より

これは，　　　　に平行な直線を表している。

(2)　$a \neq 0$，$b = 0$，$c = 0$ のとき，同様に②より

これは，　　に平行な直線を表している。

問2 点 $(5,\ -2,\ 3)$ を通り，次のベクトル $\vec{u}$ を方向ベクトルとする直線の方程式を求めよ。

(1)　$\vec{u} = (1,\ -1,\ 0)$

(2)　$\vec{u} = (0,\ 3,\ 4)$

(3)　$\vec{u} = (0,\ 2,\ 0)$

問3 次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(1)　$(-1,\ 2,\ 3)$，$(4,\ -5,\ 6)$

⑵ $(-3,\ 0,\ 2)$, $(4,\ 7,\ -5)$

⑶ $(3,\ -2,\ 4)$, $(5,\ -2,\ 3)$

⑷ $(-2,\ 5,\ 3)$, $(-2,\ 0,\ 3)$

問4 原点と点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通る直線の方程式を求めよ。ただし，$x_1 y_1 z_1 \neq 0$ とする。

練習問題 A

（教科書 p.108）

1　$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}+\vec{b}$ の大きさについて，次の不等式が成り立つことを示せ。

$|\vec{a}+\vec{b}| \leqq |\vec{a}|+|\vec{b}|$

両辺の平方の差を考えると

$(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2-|\vec{a}+\vec{b}|^2=2(|\vec{a}||\vec{b}|-\vec{a}\cdot\vec{b})$

$\vec{a}\cdot\vec{b} \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$ であるから

$(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2-|\vec{a}+\vec{b}|^2 \geqq 0$

ゆえに　$|\vec{a}+\vec{b}|^2 \leqq (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$

ここで　$|\vec{a}+\vec{b}| \geqq 0,\ |\vec{a}|+|\vec{b}| \geqq 0$

であるから　$|\vec{a}+\vec{b}| \leqq |\vec{a}|+|\vec{b}|$

等号が成り立つのは，$\vec{a}=\vec{0}$ のとき，または$\vec{b}=\vec{0}$ のとき，または $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が同じ向きのときである。

2　$|\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=2,\ |\vec{a}-\vec{b}|=3\sqrt{5}$ のとき，次の問に答えよ。

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $|\vec{a}+\vec{b}|$ の値を求めよ。

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$(3\sqrt{5})^2=5^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2$

$2\vec{a}\cdot\vec{b}=-16$

ゆえに　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=-8}$

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=5^2+2\times(-8)+2^2=13$

ゆえに　$\boldsymbol{|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}}$

(2)　$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値と，そのときの t の値 t_1 を求めよ。

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

$=5^2+2t\times(-8)+t^2\times2^2$

$=25-16t+4t^2$

$=4(t-2)^2+9$

$t=2$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は最小値 9 をとるから

$\boldsymbol{|\vec{a}+t\vec{b}|}$ の最小値は **3**，$\boldsymbol{t_1=2}$

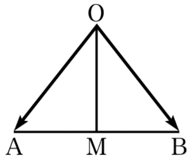
(3)　(2)の t_1 に対して，$\vec{a}+t_1\vec{b}$ と $\vec{b}$ とは垂直であることを確かめよ。

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2$

$=-8+2\times2^2=0$

ゆえに　$(\vec{a}+2\vec{b})\perp\vec{b}$

3　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ である二等辺三角形 OAB の頂点 O と，底辺 AB の中点 M を結ぶ線分 OM は，底辺 AB に垂直であることをベクトルを用いて示せ。



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

よって

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

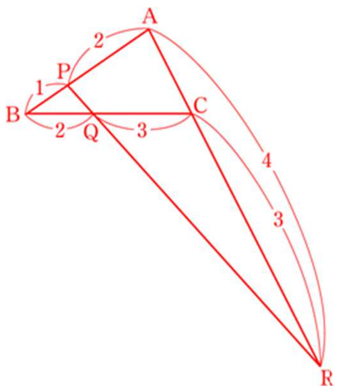
$=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2\right)$

ここで，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ より　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

ゆえに　$\mathrm{OM}\perp\mathrm{AB}$

4 △ ABC で，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を P，辺 BC を 2 : 3 に内分する点を Q，辺 CA を 3 : 4 に外分する点を R とそれぞれ定める。このとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明せよ。



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とすると

$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$，$\overrightarrow{AR}=4\vec{c}$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$

$=\left(\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}\right)-\frac{2}{3}\vec{b}$

$=-\frac{1}{15}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}=\frac{1}{15}(-\vec{b}+6\vec{c})$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}$

$=4\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{2}{3}(-\vec{b}+6\vec{c})$

よって　$\overrightarrow{PR}=10\overrightarrow{PQ}$

ゆえに，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

5 $\vec{a}=(3,\ 0,\ \sqrt{3})$ と x 軸，y 軸，z 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ求めよ。

x 軸の基本ベクトルは

$\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$

$\vec{a}$ と $\vec{e_1}$ のなす角を θ_1 とすると

$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+0^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$|\vec{e_1}|=1$

$\vec{a}\cdot\vec{e_1}=3\times1+0\times0+\sqrt{3}\times0=3$

よって　$\cos\theta_1=\frac{3}{2\sqrt{3}\times1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0°\leqq\theta_1\leqq180°$ であるから　$\theta_1=30°$

ゆえに，x 軸の正の向きとのなす角は　**30°**

y 軸の基本ベクトルは

$\vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$

$\vec{a}$ と $\vec{e_2}$ のなす角を θ_2 とすると

$\vec{a}\cdot\vec{e_2}=3\times0+0\times1+\sqrt{3}\times0=0$

$0°\leqq\theta_2\leqq180°$ であるから　$\theta_2=90°$

ゆえに，y 軸の正の向きとのなす角は　**90°**

z 軸の基本ベクトルは

$\vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$

$\vec{a}$ と $\vec{e_3}$ のなす角を θ_3 とすると

$|\vec{e_3}|=1$

$\vec{a}\cdot\vec{e_3}=3\times0+0\times0+\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$

よって　$\cos\theta_3=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times1}=\frac{1}{2}$

$0°\leqq\theta_3\leqq180°$ であるから　$\theta_3=60°$

ゆえに，z 軸の正の向きとのなす角は　**60°**

6 1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を P，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q とし，△ CPQ の重心を G とする。線分 OG の長さを求めよ。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\vec{a},\quad \overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}\right)$$

よって

$$|\overrightarrow{OG}|^2=\left|\frac{1}{9}\left(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}\right)\right|^2$$

$$=\frac{1}{81}\left(|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+9|\vec{c}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+12\vec{b}\cdot\vec{c}+6\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$

ここで

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=3$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=3\times3\times\cos60^\circ=\frac{9}{2}$$

であるから

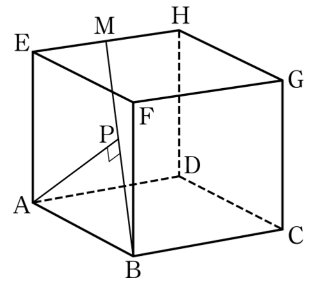
$$|\overrightarrow{OG}|^2=\frac{1}{81}\left(3^2+4\times3^2+9\times3^2+4\times\frac{9}{2}+12\times\frac{9}{2}+6\times\frac{9}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{81}\times225=\frac{25}{9}$$

ゆえに　$\mathrm{OG}=\mathbf{\dfrac{5}{3}}$

7 立方体 ABCD − EFGH において，辺 EH の中点をM とする。このとき，線分 BM 上にある点 P において，線分 BM と線分 AP が直交するという。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{e}$ として，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ で表せ。



BP : PM = $(1-s):s$ とすると

$$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+(1-s)\overrightarrow{AM}$$

ここで

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AH}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\vec{e}+\frac{1}{2}\vec{d}$$

であるから

$$\overrightarrow{AP}=s\vec{b}+(1-s)\left(\vec{e}+\frac{1}{2}\vec{d}\right)$$

$$=s\vec{b}+(1-s)\vec{e}+\frac{1-s}{2}\vec{d}$$

また　$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\vec{e}+\dfrac{1}{2}\vec{d}-\vec{b}$

$\mathrm{AP}\perp\mathrm{BM}$ であるから　$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

$$\left\{s\vec{b}+(1-s)\vec{e}+\frac{1-s}{2}\vec{d}\right\}\cdot\left(\vec{e}+\frac{1}{2}\vec{d}-\vec{b}\right)=0$$

$\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{e}=\vec{e}\cdot\vec{b}=0$ であるから

$$-s\vec{b}\cdot\vec{b}+\frac{1-s}{4}\vec{d}\cdot\vec{d}+(1-s)\vec{e}\cdot\vec{e}=0$$

$\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{d}\cdot\vec{d}=\vec{e}\cdot\vec{e}$ であるから

$$-s+\frac{1-s}{4}+(1-s)=0$$

これを解いて　$s=\dfrac{5}{9}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathbf{AP}}=\mathbf{\dfrac{5}{9}}\vec{\boldsymbol{b}}+\mathbf{\dfrac{2}{9}}\vec{\boldsymbol{d}}+\mathbf{\dfrac{4}{9}}\vec{\boldsymbol{e}}$

練習問題Ｂ

（教科書 p.109）

8 △ OAB において，OA = 2，OB = 1，∠AOB = 60° とする。OA の中点を C とし，線分 BC を引く。このとき，AB 上に点 M をとり，OM ⊥ BC とする。AM : MB を求めよ。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

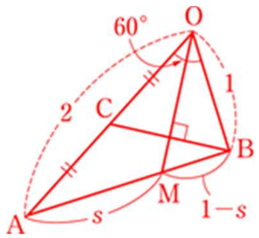
$AM:MB=s:(1-s)$

とすると

$\overrightarrow{OM}=(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

$=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$



$\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{BC}$ より　$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)=0$

$\frac{1}{2}(1-s)|\vec{a}|^2-(1-s)\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}s\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{b}|^2=0$

$\frac{1}{2}(1-s)|\vec{a}|^2+\left(\frac{3}{2}s-1\right)\vec{a}\cdot\vec{b}-s|\vec{b}|^2=0$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1\times\cos60^\circ=1$ を代入すると

$\frac{1}{2}(1-s)\times2^2+\left(\frac{3}{2}s-1\right)\times1-s\times1^2=0$

これを解いて　$s=\frac{2}{3}$

よって　$AM:MB=\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=\mathbf{2:1}$

9 平面上の異なる 3 点 O，A，B が一直線に並んでいないとし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおく。

$$\vec{p}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

で表される点 P($\vec{p}$) は，∠AOB の二等分線上にあることを証明せよ。

$\overrightarrow{OA'}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\overrightarrow{OB'}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ となる点 A′，B′ をとり，

$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$ となる点 P′ をとると，

OA′ = OB′ であるから，四角形 OA′P′B′ はひし形となる。

よって，P′ は ∠A′OB′ の二等分線上にある。

$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OP'}$ であるから，点 P は ∠AOB の二等分線上にある。

〔別解〕△OAB において，∠AOB の二等分線と辺 AB の交点を P′ とすると，内角の二等分線と比の定理より

$AP':P'B=OA:OB=|a|:|b|$

よって

$\overrightarrow{OP'}=\frac{|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$

ゆえに，

$\overrightarrow{OP}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ は $\overrightarrow{OP'}$ の実数倍で表されているから，点 P は ∠AOB の二等分線上にある。

10 空間内に 4 点 A(1, −1, 3)，B(4, 3, 3)，C(0, 1, 5)，D(5, −4, 8) がある。

（1） AD ⊥ AB，AD ⊥ AC が成り立つことを示せ。

$\overrightarrow{AD}=(5-1,\ -4-(-1),\ 8-3)$

$=(4,\ -3,\ 5)$

$\overrightarrow{AB}=(4-1,\ 3-(-1),\ 3-3)$

$=(3,\ 4,\ 0)$

よって

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=4\times3+(-3)\times4+5\times0=0$

したがって　AD ⊥ AB

$\overrightarrow{AC}=(0-1,\ 1-(-1),\ 5-3)$

$=(-1,\ 2,\ 2)$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times(-1)+(-3)\times2+5\times2$

$=0$

したがって　AD ⊥ AC

(2)　$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=\sqrt{25}=5$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3\times(-1)+4\times2+0\times2=5$$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}=\dfrac{5}{5\times3}=\dfrac{}{\mathbf{3}}$

(3)　△ ABC の面積を求めよ。

$\sin\theta>0$であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\mathbf{5\sqrt{2}}$$

(4)　点 A, B, C, D を頂点とする四面体の体積を求めよ。

(1)より，△ ABC ⊥ AD であり

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}$$

$$=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

よって，求める体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{AD}$$

$$=\frac{1}{3}\times5\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=\mathbf{\frac{50}{3}}$$

11　四面体 ABCD において，次の問に答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ の値を求めよ。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$=\mathbf{0}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ であることを示せ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$

これを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$ に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

12　四面体 OABC において，辺 OA，辺 CB をそれぞれ 1 : 2 に内分する点を P，R とし，辺 AB，辺 OC をそれぞれ 3 : 1 に内分する点を Q，S とする。このとき，線分 PR を 3 : 1 に内分する点と線分 SQ を 1 : 2 に内分する点は一致することを証明せよ。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+2}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+1}=\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3}{4}\vec{c}$$

線分 PR を 3 : 1 に内分する点を M とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{3+1}=\frac{\frac{1}{3}\vec{a}+3\cdot\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}}{4}=\frac{1}{12}\left(\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c}\right)$$

線分 SQ を 1 : 2 に内分する点を N とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{1+2}=\frac{2\cdot\frac{3}{4}\vec{c}+\frac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}}{3}=\frac{1}{12}\left(\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c}\right)$$

ゆえに，線分 PR を 3 : 1 に内分する点と線分SQ を 1 : 2 に内分する点は一致する。

13 点 $(-2,\ 3,\ 1)$ を中心とする球が平面 $x=3$ と接している。

⑴　この球の方程式を求めよ。

平面 $x=3$ と接しているから，求める球の半径は　$3-(-2)=5$

したがって，求める球の方程式は

$$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$$

⑵　この球が平面 $y=-1$ と交わってできる円の中心と半径を求めよ。

$y=-1$ を(1)の方程式に代入して

$$(x+2)^2+(-1-3)^2+(z-1)^2=25$$

$$(x+2)^2+(z-1)^2=9$$

よって，円の中心 $(-2,\ -1,\ 1)$，　半径 3

⑶　点 $(6,\ 6,\ 3)$ を通り，$\vec{u}=(4,\ 3,\ -1)$ に平行な直線が，この球と 2 点で交わっている。その交点の座標を求めよ。

点 $(6,\ 6,\ 3)$ を通り，$\vec{u}=(4,\ 3,\ -1)$を方向ベクトルとする直線上の任意の点を $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とすると，t を実数として

$$(x,\ y,\ z)=(6,\ 6,\ 3)+t(4,\ 3,\ -1)$$

$$=(6+4t,\ 6+3t,\ 3-t)$$

よって $\begin{cases} x=6+4t \\ y=6+3t \\ z=3-t \end{cases}$

これらを(1)の方程式に代入して

$$(6+4t+2)^2+(6+3t-3)^2+(3-t-1)^2=25$$

$$(4t+8)^2+(3t+3)^2+(2-t)^2=25$$

$$26t^2+78t+52=0$$

$$t^2+3t+2=0$$

$$(t+1)(t+2)=0$$

$$t=-1,\ -2$$

$t=-1$ のとき　$x=2,\ y=3,\ z=4$

$t=-2$ のとき　$x=-2,\ y=0,\ z=5$

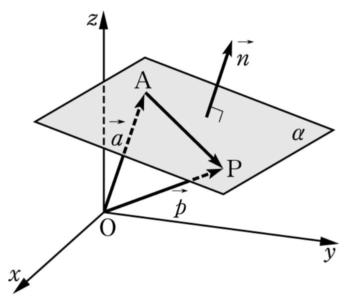
したがって，求める交点の座標は

$$(2,\ 3,\ 4),\ (-2,\ 0,\ 5)$$

発 展　平面の方程式

（教科書 p.110）

空間において，定点 $A(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な平面の方程式を求めてみよう。



この平面を α とし，α 上の任意の点を $P(\vec{p})$ とすると

$\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$ または $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$

よって　$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$

$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$ であるから

$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$　……①

となる。

① を平面 α のベクトル方程式といい，$\vec{n}$ を平面 α の（㊻　法線ベクトル　）という。さらに

$\vec{p} = (x,\ y,\ z)$,　$\vec{a} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$,　$\vec{n} = (a,\ b,\ c)$

とすると

$\vec{p} - \vec{a} = (x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1)$

であるから，①を成分で表すと次のようになる。

$\boldsymbol{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0}$……②

ここで，$d = -ax_1 - by_1 - cz_1$ とおくと，②は

$ax + by + cz + d = 0$

と表される。

$\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ は 1 次方程式 $ax + by + cz + d = 0$ で表される平面の法線ベクトルである。

問1 点 $(2,\ 4,\ 5)$ を通り，$\vec{n} = (3,\ -1,\ -2)$ を法線ベクトルとする平面の方程式を求めよ。

$3(x - 2) - (y - 4) - 2(z - 5) = 0$

すなわち　$\boldsymbol{3x - y - 2z + 8 = 0}$

問2 2 点 $A(3,\ 2,\ 5)$, $B(4,\ -2,\ 1)$ がある。点 A 通り，$\overrightarrow{AB}$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

$\overrightarrow{AB} = (4 - 3,\ -2 - 2,\ 1 - 5)$

$= (1,\ -4,\ -4)$

点 $A(3,\ 2,\ 5)$ を通り，$\overrightarrow{AB}$ を法線ベクトルとするから

$(x - 3) - 4(y - 2) - 4(z - 5) = 0$

すなわち　$\boldsymbol{x - 4y - 4z + 25 = 0}$

点と平面の距離

（教科書 p.111）

点と平面の距離
点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax + by + cz + d = 0$ の距離は $\dfrac{\boldsymbol{\lvert ax_1 + by_1 + cz_1 + d \rvert}}{\boldsymbol{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$

問3 点 $(3,\ -1,\ 2)$ と平面 $x + 2y - 3z + 4 = 0$ の距離を求めよ。

$$\frac{\lvert 3 + 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 + 4 \rvert}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{\lvert -1 \rvert}{\sqrt{14}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{14}}{14}}$$

発 展　空間における直線の方程式

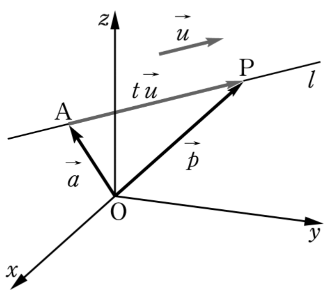
（教科書 p.112）

空間において，定点 $A(\vec{a})$を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{u}$ に平行な直線の方程式を求めてみよう。

この直線 l 上の任意の点を $P(\vec{p})$ とすると，t を実数として

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u} \quad \cdots\cdots①$$

と表される。



①　を直線 l の（[47]　ベクトル方程式　）という。

さらに，$\vec{p} = (x,\ y,\ z)$, $\vec{a} = (x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{u} = (a,\ b,\ c)$ として，①の両辺の各成分を比較すると次のようになる。

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \quad \cdots\cdots②$$

②　を直線 l の（[48]　媒介変数表示　）といい，t を（[49]　媒介変数　）という。

また，$\vec{u} = (a,\ b,\ c)$ を直線 l の（[50]　方向ベクトル　）という。

$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$ のとき，②から t を消去すると

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad \cdots\cdots③$$

③は，点 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通り，$\vec{u} = (a,\ b,\ c)$ を方向ベクトルとする直線の方程式である。

例 1　点 $(0,\ 8,\ -2)$ を通り，$\vec{u} = (3,\ -2,\ 1)$ を方向ベクトルとする直線の方程式は

$$\frac{x}{3} = \frac{y - 8}{-2} = z + 2$$

問1　点 $(3,\ 4,\ -2)$ を通り，次のベクトル $\vec{u}$ を方向ベクトルとする直線の方程式を求めよ。

(1)　$\vec{u} = (-2,\ 1,\ 3)$

$$\frac{x - 3}{-2} = y - 4 = \frac{z + 2}{3}$$

(2)　$\vec{u} = (5,\ 1,\ 4)$

$$\frac{x - 3}{5} = y - 4 = \frac{z + 2}{4}$$

例 2　(1)　$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$ のとき，前ページの②より

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}, \quad z = z_1$$

これは，xy 平面に平行な直線を表している。

(2)　$a \neq 0,\ b = 0,\ c = 0$ のとき，同様に②より

$$y = y_1, \quad z = z_1$$

これは，x 軸に平行な直線を表している。

問2　点 $(5,\ -2,\ 3)$ を通り，次のベクトル $\vec{u}$ を方向ベクトルとする直線の方程式を求めよ。

(1)　$\vec{u} = (1,\ -1,\ 0)$

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 - t \\ z = 3 \end{cases} \quad より$$

$$x - 5 = -(y + 2),\ z = 3$$

(2)　$\vec{u} = (0,\ 3,\ 4)$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \quad より$$

$$x = 5,\ \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 3}{4}$$

(3)　$\vec{u} = (0,\ 2,\ 0)$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 \end{cases} \quad より$$

$$x = 5,\ z = 3$$

問3　次の 2 点を通る直線の方程式を求めよ。

(1)　$(-1,\ 2,\ 3)$, $(4,\ -5,\ 6)$

$$\frac{x + 1}{4 + 1} = \frac{y - 2}{-5 - 2} = \frac{z - 3}{6 - 3}$$

すなわち

$$\frac{x +}{5} = \frac{y - 2}{-7} = \frac{z - 3}{3}$$

⑵　$(-3,\ 0,\ 2)$，$(4,\ 7,\ -5)$

$$\frac{x+3}{4+3}=\frac{y}{7-0}=\frac{z-2}{-5-2}$$

すなわち

$$\frac{x+3}{7}=\frac{y}{7}=\frac{z-2}{-7}$$

よって　$\boldsymbol{x+3=y=-(z-2)}$

⑶　$(3,\ -2,\ 4)$，$(5,\ -2,\ 3)$

$\mathrm{A}(3,\ -2,\ 4)$，$\mathrm{B}(5,\ -2,\ 3)$ とする。このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(5-3,\ -2+2,\ 3-4)\\&=(2,\ 0,\ -1)\end{aligned}$$

より $\begin{cases}x=3+2t\\y=-2\\z=4-t\end{cases}$

t を消去して

$$\boldsymbol{\frac{x-3}{2}=-(z-4),\ y=-2}$$

⑷　$(-2,\ 5,\ 3)$，$(-2,\ 0,\ 3)$

$\mathrm{A}(-2,\ 5,\ 3)$，$\mathrm{B}(-2,\ 0,\ 3)$ とする。このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(-2+2,\ 0-5,\ 3-3)\\&=(0,\ -5,\ 0)\end{aligned}$$

より $\begin{cases}x=-2\\y=5-5t\\z=3\end{cases}$

したがって　$\boldsymbol{x=-2,\ z=3}$

問4　原点と点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通る直線の方程式を求めよ。ただし，$x_1y_1z_1\neq 0$ とする。

方向ベクトルとして $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ をとると

$x_1\neq 0$，$y_1\neq 0$，$z_1\neq 0$ であるから

$$\boldsymbol{\frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z}{z_1}}$$