# 1節 数列

## 1 数列

（教科書 p.6）

数を1列に並べたものを（①　　　　　）といい，数列の各数を（②　　　　　）という。

例1 (1)　正の奇数を順に並べて得られる数列は

(2)　自然数の 2 乗を順に並べて得られる数列は

数列を一般的に表すには，1 つの文字に項の番号を添えて

$a_1$，$a_2$，$a_3$，…，$a_n$，…

のように書く。そして，それぞれこの数列の（③　　　　　），…といい，$n$ 番目の項 $a_n$ を（④　　　　　）という。

また，この数列を簡単に（⑤　　　　　）とも書き表す。

問1　第 $n$ 項が次のように表される数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1)　$a_n = 2n - 3$

(2)　$a_n = \frac{1}{2n+1}$

(3)　$a_n = (-1)^n$

このように，数列 $\{a_n\}$ において，$a_n$ が $n$ の式で表されるとき，数列のすべての項が求められる。この $a_n$ を数列 $\{a_n\}$ の（⑥　　　　　）という。

例2 (1)　数列 $\{a_n\}$ を

$1 \cdot 2$，$2 \cdot 3$，$3 \cdot 4$，$4 \cdot 5$，$5 \cdot 6$，…

とする。この数列の一般項を推定すると

となる。

(2)　数列 $\{a_n\}$ を

$-1$，$2$，$-3$，$4$，$-5$，…

とする。数列 $\{a_n\}$ の各項の符号を除いて考えると

1，2，3，4，5，…

となり，この数列の第 $n$ 項は $n$ であるから，もとの数列の一般項を推定すると

となる。

問2　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定せよ。

(1)　1，8，27，64，125，…

(2)　$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{5}{11}$，…

(3)　$-2$，$4$，$-8$，$16$，$-32$，…

項の個数が有限である数列を（⑦　　　　　　　）といい，項の個数が有限でない数列を（⑧　　　　　　　）という。有限数列では，項の個数を（⑨　　　　　），最後の項を（⑩　　　　　）という。

**例 3**　3 の倍数で正であるものを小さい方から順に 10 個並べた数列

3，6，9，12，15，18，21，24，27，30

は有限数列で，項数は（　　　　　），末項は（　　　　　）である。

## 2 等差数列

### 等差数列

（教科書 p.8）

初項 $a$ から始めて，一定の数 $d$ を次々に加えて得られる数列を（⑪　　　　　　　）といい，$d$ をその等差数列の（⑫　　　　　）という。

**例 4**　(1)　正の奇数の列

1，3，5，7，9，…

は，初項1，公差2の等差数列である。

(2)　初項 2，公差 3 の等差数列は

2，5，8，11，14，17，20，23，…

となる。

**問3**　次の等差数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1)　初項 5，公差 8

(2)　初項 9，公差 $-4$

### 等差数列の一般項

（教科書 p.9）

| 等差数列の一般項 |
|---|
| 初項 $a$，公差 $d$ の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は $\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$ |

**例5** 初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項および第 20 項を求めてみよう。一般項は

である。また，第 20 項は

である。

**問4** 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 25 項を求めよ。

(1)　初項 4，公差 $-3$

(2)　初項 7，公差 $\frac{1}{2}$

**問5** 次の等差数列 $\{a_n\}$ の $\boxed{\phantom{00}}$ にあてはまる数を求めよ。また，一般項を求めよ。

(1)　$\boxed{\phantom{00}}$，30，37，…

(2)　2，$\boxed{\phantom{00}}$，$-4$，$-7$，…

**例題1** 第 4 項が 14，第 10 項が 62 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ。また，この数列の一般項を求めよ。

**解**

**問6** 第 3 項が $-6$，第 10 項が 29 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

**例6** 数列 $\{a_n\}$ において，$a_n = 5n + 2$ ならば

$$a_{n+1} - a_n = \{5(n+1) + 2\} - (5n + 2) = 5$$

よって，差 $a_{n+1} - a_n$ が一定であるから，数列 $\{a_n\}$ は等差数列となる。

また

$$a_1 = 5 \cdot 1 + 2 = 7$$

したがって，等差数列 $\{a_n\}$ の初項は（　　　　），公差は（　　　　）である。

問7　数列 $\{a_n\}$ において，$a_n = 3n - 4$ ならば，この数列は等差数列であることを示し，初項と公差を求めよ。

$\boxed{\text{注意}}$　一般項が $a_n = pn + q$ の形で表される数列は等差数列になる。

問8　3 つの数 $a$，$b$，$c$ について，次のことが成り立つことを証明せよ。

$a$，$b$，$c$ がこの順に等差数列となる　$\Longleftrightarrow$　$\boldsymbol{2b = a + c}$

## 3 等差数列の和

### 等差数列の和

（教科書 p.11）

例 7　等差数列 5，8，11，14，17，… の初項から第 4 項までの和 $S_4$ は，次のようになる。

$$S_4 = 5 + 8 + 11 + 14 = 38$$

| 等差数列の和 |
| --- |
| 初項 $a$，公差 $d$，項数 $n$，末項 $l$ の等差数列の和を $S_n$ とすると<br>$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}n(a + l) = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}}$ |

例 8　(1)　初項 23，末項 $-5$，項数 15 の等差数列の和を $S_{15}$ とすると

$$S_{15} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \{23 + (-5)\} = 135$$

(2)　初項 3，公差 4，項数 20 の等差数列の和を $S_{20}$ とすると

$$S_{20} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \{2 \cdot 3 + (20-1) \cdot 4\} = 820$$

問9　次の等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 7，末項 61，項数 10

(2)　初項 $-10$，公差 4，項数 6

**例 9**　5から31までの奇数の和 $5+7+9+\cdots+31$ を求めてみよう。

これは，初項5，公差2，末項31の等差数列の和である。

31を第 $n$ 項とすると　　$31=5+2(n-1)$

これより，$n=14$ となり，項数は14である。

よって，求める和 $S_{14}$ は

**問10**　次の等差数列の和を求めよ。

(1)　初項5，公差3，末項53

(2)　公差 $-3$，末項4，項数10

**例題 2**　初項3，公差2の等差数列において，初項から第何項までの和が63になるかを求めよ。

**解**

**問11**　初項21，公差 $-3$ の等差数列において，初項から第何項までの和が75になるかを求めよ。

## いろいろな自然数の数列の和

（教科書 p.13）

1から $n$ までの自然数 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ の和は，初項1，末項 $n$，項数 $n$ の等差数列の和であるから，次の公式が得られる。

(⑬　　　　　　　　　　　　　　　)

**問12**　上の公式を用いて，次の和を求めよ。

(1)　1から100までの自然数の和

(2)　101から200までの自然数の和

問13　1から始まる $n$ 個の奇数の和は，次の式で表されることを示せ。

$$\mathbf{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2}$$

例題 3　2桁の自然数のうち，5で割ると2余る数の和を求めよ。

解

問14　2桁の自然数のうち，次の条件を満たす数の和を求めよ。

(1)　7で割り切れる

(2)　7で割ると3余る

# 4 等比数列

## 等比数列

（教科書 p.14）

初項 $a$ から始めて，一定の数 $r$ を次々に掛けて得られる数列を（⑭　　　　　　　）といい，$r$ をその等比数列の（⑮　　　　　　）という。

例 10 (1)　等比数列　1, 2, 4, 8, 16, …
の公比は（　　　　　）である。

(2)　初項 1，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列は

となる。

問15 次の等比数列の初項から第 5 項までを求めよ。
(1)　初項 4，公比 3

(2)　初項 8，公比 $-1$

## 等比数列の一般項

（教科書 p.15）

| 等比数列の一般項 |
| --- |
| 初項 $a$，公比 $r$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は<br>$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$ |

注意　$r \neq 0$ のとき，$r^0 = 1$ と定める。

例 11 (1)　初項 3，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

(2)　初項 4，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

問16 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
(1)　2, 6, 18, 54, …

(2)　3, $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{8}$, …

問17 次の等比数列 $\{a_n\}$ の $\boxed{\phantom{00}}$ にあてはまる数を求めよ。また，一般項を求めよ。
(1)　2, 10, $\boxed{\phantom{00}}$, …

(2)　$\boxed{\phantom{00}}$, 12, $-3$, …

**例題 4** 第 3 項が 28，第 5 項が 112 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

**解**

**問18** 第 3 項が 18，第 5 項が 162 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

**例 12** $a_n = 2^n$，$b_n = 3^n$とするとき，$c_n = a_n b_n$ で定められる数列 $\{c_n\}$ を考えると

となるから，公比が6 の等比数列である。

**問19** $a_n = 2^n$，$b_n = 5 \cdot 3^n$ とするとき，$c_n = \frac{a_n}{b_n}$ で定められる数列 $\{c_n\}$ の公比を求めよ。

**問20** 0 でない 3 つの数 $a$，$b$，$c$ について，次のことが成り立つことを証明せよ。

$a$，$b$，$c$ がこの順に等比数列となる　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{b^2 = ac}$

# 5 等比数列の和

## 等比数列の和

（教科書 p.17）

| 等比数列の和 |
|---|
| 初項 $a$，公比 $r$ の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ は<br>$r \neq 1$ のとき　$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$<br>$r = 1$ のとき　$S_n = na$ |

例 13 初項 6，公比 $-2$，項数 4 の等比数列の和 $S_4$ は

問21 次の等比数列の和を求めよ。

(1)　初項 2，公比 $-3$，項数 6

(2)　初項 $\frac{3}{25}$，公比 $\frac{4}{3}$，項数 4

例 14 初項 3，公比 2 の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ は

問22 次の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ。

(1)　6，18，54，162，…

(2)　10，$-\frac{5}{2}$，$\frac{5}{8}$，$-\frac{5}{32}$，…

**応用例題 5**　初項から第 3 項までの和が 9，初項から第 6 項までの和が $-63$ である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

**解**

**問23**　初項から第 3 項までの和が 35，初項から第 6 項までの和が 315 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

参 考 **複利法**

（教科書 p.19）

１年ごとに利子を元金にくり入れ，その合計額を次年の元金として利子を計算する
（⑯　　　　　　　）について考えてみよう。

金額 $a$ 円を年利率 $r$ で預金したとき

| | 元金 | 利息 | 元利合計[＝元金＋利息] |
|---|---|---|---|
| １年後 | $a$ | $a\times r$ | $a(1+r)[=a+ar]$ |
| ２年後 | $a(1+r)$ | $a(1+r)\times r$ | $a(1+r)^2$ |
| ３年後 | $a(1+r)^2$ | $a(1+r)^2\times r$ | $a(1+r)^3$ |
| ‥‥ | ‥‥‥‥‥‥‥‥ | ‥‥‥‥‥‥‥‥ | ‥‥‥‥‥‥‥‥ |

複利法によれば，1年後，2年後，3年後，‥‥の元利合計は

$a(1+r)$，$a(1+r)^2$，$a(1+r)^3$，‥‥

という等比数列になる。

## 6 和の記号 Σ

（教科書 p.20）

と書き表す。すなわち，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ は $k$ が　1，2，3，…，$n$ と変わるときのすべての $a_k$ の和を表す。

**例15**

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(2k-1)=(2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+(2\cdot4-1)$

$=1+3+5+7$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

**問24** 次の和を，例 15 のように記号 Σ を用いずに表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(3k-1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}2k^2$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k$

**例16** 数列の和を記号 $\sum$ を用いて表すと，次のようになる。

(1) $1+2+3+\cdots+n=$

(2) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6=$

**問25** 次の和を記号 $\sum$ を用いて表せ。

(1)　$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

(2)　$3+5+7+\cdots+(2n+1)$

(3)　$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+4\cdot6+5\cdot7$

**例17** 次の式はいずれも $2^2+3^2+4^2+5^2$ を表している。

$$\sum_{k=2}^{5}k^2,\quad \sum_{j=2}^{5}j^2,\quad \sum_{i=1}^{4}(i+1)^2$$

**例18** $r\neq1$ のとき，初項 $a$，公比 $r$ の等比数列の和の公式

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

を記号 $\sum$ を用いて表すと　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

**問26** 次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^{k-1}$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-2)^k$

## 累乗の和

（教科書 p.21）

**例19** $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\frac{1}{6}\cdot10\cdot(10+1)\cdot(2\cdot10+1)=385$

**問27** 次の和を求めよ。

(1)　$1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$

(2)　$11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2$

問28 等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を利用して

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

が成り立つことを示せ。

累乗の和

$$\sum_{k=1}^{n}c=nc \qquad c\text{ は定数} \qquad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad \sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

## 記号 Σ の性質

（教科書 p.22）

記号 ∑ の性質

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k \qquad c\text{ は定数}$$

例20 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+4)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}(-3k)+\sum_{k=1}^{n}4$

問29　次の和を求めよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(5k+1)$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-2)$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)$

例 21　数列 $2\cdot 3,\ 3\cdot 4,\ 4\cdot 5,\ \cdots$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めてみよう。

この数列の第 $k$ 項は $(k+1)(k+2)$ である。

よって，求める和 $S_n$ は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$$

問30 数列 $1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ 4\cdot 6,\ \cdots$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ。

## 7 いろいろな数列

### 階差数列

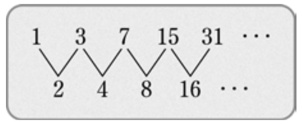
（教科書 p.24）

例22 数列 $\{a_n\}$ を　　$1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127,\ \cdots$

とする。この数列は，等差数列でも等比数列でもないが，以下のような考え方で一般項を求めてみよう。

この数列の隣り合う項の差をとると

$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \cdots$




これは，初項 2，公比 2 の等比数列であるから，

すべての自然数 $k$ について　　$a_{k+1}-a_k=2^k$

が成り立つ。右の計算から

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{array}{rl} a_2-a_1 & =2 \\ a_3-a_2 & =4 \\ a_4-a_3 & =8 \\ \cdots\cdots & \\ +)\ a_n-a_{n-1} & =2^{n-1} \\ \hline a_n-a_1 & =2+4+8+\cdots+2^{n-1} \end{array}$$

ゆえに　　＝

$a_1=1$ であるから，$a_n=2^n-1$ は $n=1$ のときも成り立つ。

一般に，数列 $\{a_n\}$ に対して

$b_n=a_{n+1}-a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

として得られる数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の（⑰　　　　　　）という。

| 階差数列を用いて一般項を表す式 |
|---|
| 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき<br>$\boldsymbol{a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k}$ |

**例題 6**　列 $2,\ 6,\ 12,\ 20,\ 30,\ 42,\ \cdots$ の一般項を求めよ。

**解**

**問31**　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ 37,\ \cdots$

(2)　$3,\ 4,\ 1,\ 10,\ -17,\ 64,\ -179,\ \cdots$

## 数列の和と一般項

（教科書 p.26）

| 数列の和と一般項 |
| --- |
| 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とすると<br>$a_1 = S_1$<br>$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$ |

**例題 7** 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が次のように与えられているとき，この数列の一般項を求めよ。$S_n=n^3-n$

**解**

**問32** 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が次のように与えられているとき，この数列の一般項を求めよ。

(1) $S_n=n^2+3n$

(2) $S_n=3^n-1$

## 分数で表された数列の和

（教科書 p.27）

**応用例題 8** 次の和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

**解**

**問33** $\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}$ が成り立つことを利用して，次の和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

## 少し複雑な数列

（教科書 p.28）

**応用例題 9** $r \neq 1$ のとき，次の和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots + nr^{n-1}$$

考え方

解

注意　例題 9 で，$r = 1$ のときは次のようになる。

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

**問34** 次の和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3^3 + \cdots + 2n \cdot 3^{n-1}$$

**応用例題 10** 正の奇数の列を次のような群に分け，第 $n$ 群には $n$ 個の数が入るようにする。

1 | 3, 5 | 7, 9, 11 | 13, 15, 17, 19 |…

第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 4 群

(1) 第 $n$ 群の最初の項を求めよ。

(2) 第 $n$ 群の項の総和を求めよ。

解

問35 自然数の列を次のような群に分ける。

$1,\ 2\ |\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ |\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\ |\ \cdots$

(1) 第 $n$ 群の最初の項を求めよ。

(2) 第 $n$ 群の項の総和を求めよ。

## 問 題

（教科書 p.30）

**1** 初項 $8$，公差 $7$ の等差数列には $400$ という項はあるか。また，あるとすれば第何項か。

**2** 第 $5$ 項が $108$，第 $20$ 項が $-237$ の等差数列がある。

（1） この数列の初項と公差を求めよ。

(2) この数列で，第何項が初めて負になるか。

(3) この数列の初項から第何項までの和が最も大きくなるか。

**3** $3$ つの数 $x-4,\ x,\ x+6$ がこの順で等比数列となるとき，$x$ の値を求めよ。

**4** 第 $3$ 項が $12$，第 $6$ 項が $96$ の等比数列において，初項から第 $n$ 項までの各項の平方の和を求めよ。ただし，公比は実数とする。

**5**　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，初項から第 $n$ 項までの和を求めよ。

(1)　$1^2,\ 4^2,\ 7^2,\ 10^2,\ 13^2,\ \cdots$

(2)　$2\cdot 3^2,\ 4\cdot 4^2,\ 6\cdot 5^2,\ 8\cdot 6^2,\ 10\cdot 7^2,\ \cdots$

(3)　$1,\ 1+2,\ 1+2+4,\ 1+2+4+8,\ 1+2+4+8+16,\ \cdots$

**6** 数列 2, 3, 7, 16, 32, 57, … の一般項を求めよ。

**7** 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が $S_n = n^2 - n + 1$ で表されるとき，この数列の一般項を求めよ。

**8** 次の和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

**9** $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-\sqrt{1}$,　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$,　…

が成り立つことを利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ を求めよ。

**10** 次の和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n = 4 \cdot 1 + 7 \cdot 4 + 10 \cdot 4^2 + 13 \cdot 4^3 + \cdots + (3n+1) \cdot 4^{n-1}$$

# 1 節 数列

## 1 数列

（教科書 p.6）

数を1列に並べたものを（① 数列 ）といい，数列の各数を（② 項 ）という。

例 1 (1) 正の奇数を順に並べて得られる数列は

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$

(2) 自然数の 2 乗を順に並べて得られる数列は

$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ \cdots$

数列を一般的に表すには，1 つの文字に項の番号を添えて

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$

のようにに書く。そして，それぞれこの数列の（③ 初項（第 1 項），第 2 項，第 3 項 ），…といい，$n$ 番目の項 $a_n$ を（④ 第 n 項 ）という。

また，この数列を簡単に（⑤ $\{a_n\}$ ）とも書き表す。

問1 第 $n$ 項が次のように表される数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1) $a_n = 2n-3$

$a_1 = 2\times1-3 = \mathbf{-1}$
$a_2 = 2\times2-3 = \mathbf{1}$
$a_3 = 2\times3-3 = \mathbf{3}$
$a_4 = 2\times4-3 = \mathbf{5}$
$a_5 = 2\times5-3 = \mathbf{7}$

(2) $a_n = \frac{1}{2n+1}$

$a_1 = \frac{1}{2\times1+1} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

$a_2 = \frac{1}{2\times2+1} = \mathbf{\frac{1}{5}}$

$a_3 = \frac{1}{2\times3+1} = \mathbf{\frac{1}{7}}$

$a_4 = \frac{1}{2\times4+1} = \mathbf{\frac{1}{9}}$

$a_5 = \frac{1}{2\times5+1} = \mathbf{\frac{1}{11}}$

(3) $a_n = (-1)^n$

$a_1 = (-1)^1 = \mathbf{-1}$
$a_2 = (-1)^2 = \mathbf{1}$
$a_3 = (-1)^3 = \mathbf{-1}$
$a_4 = (-1)^4 = \mathbf{1}$
$a_5 = (-1)^5 = \mathbf{-1}$

このように，数列 $\{a_n\}$ において，$a_n$ が $n$ の式で表されるとき，数列のすべての項が求められる。この $a_n$ を数列 $\{a_n\}$ の（⑥ 一般項 ）という。

例 2 (1) 数列 $\{a_n\}$ を

$1\cdot2,\ 2\cdot3,\ 3\cdot4,\ 4\cdot5,\ 5\cdot6,\ \cdots$

とする。この数列の一般項を推定すると

$a_n = n(n+1)$

となる。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ \cdots$

とする。数列 $\{a_n\}$ の各項の符号を除いて考えると

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$

となり，この数列の第 $n$ 項は $n$ であるから，もとの数列の一般項を推定すると

$a_n = (-1)^n \times n$

となる。

問2 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定せよ。

(1) $1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ \cdots$

$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 5^3,\ \cdots$

となるから，この数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定すると

$\boldsymbol{a_n = n^3}$

(2) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{11}$, …

分母は

3, 5, 7, 9, 11, …

となり，第 $n$ 項は $2n+1$ である。

分子は

1, 2, 3, 4, 5, …

となり，第 $n$ 項は $n$ であるから，もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定すると

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

(3) $-2$, 4, $-8$, 16, $-32$, …

数列 $\{a_n\}$ の各項の符号を除いて考えると

2, 4, 8, 16, 32, …

となり，この数列の第 $n$ 項は $2^n$ であるから，もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項を推定すると

$$a_n = (-1)^n \times 2^n = (-2)^n$$

項の個数が有限である数列を（⑦ 有限数列 ）といい，項の個数が有限でない数列を（⑧ 無限数列 ）という。有限数列では，項の個数を（⑨ 項数 ），最後の項を（⑩ 末項 ）という。

**例 3** 3 の倍数で正であるものを小さい方から順に 10 個並べた数列

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30

は有限数列で，項数は（ 10 ），末項は（ 30 ）である。

## 2 等差数列

### 等差数列

（教科書 p.8）

初項 $a$ から始めて，一定の数 $d$ を次々に加えて得られる数列を（⑪ 等差数列 ）といい，$d$ をその等差数列の（⑫ 公差 ）という。

**例 4** (1) 正の奇数の列

1, 3, 5, 7, 9, …

は，初項1，公差2の等差数列である。

(2) 初項 2，公差 3 の等差数列は

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, …

となる。

**問3** 次の等差数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1) 初項 5，公差 8

5, 13, 21, 29, 37

(2) 初項 9，公差 $-4$

9, 5, 1, $-3$, $-7$

### 等差数列の一般項

（教科書 p.9）

| 等差数列の一般項 |
|---|
| 初項 $a$，公差 $d$ の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = a + (n-1)d$ |

**例5** 初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項および第 20 項を求めてみよう。一般項は

$$a_n = 2 + (n-1)\cdot 3 = 3n - 1$$

である。また，第 20 項は

$$a_{20} = 3\cdot 20 - 1 = 59$$

である。

**問4** 次の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，第 25 項を求めよ。

(1) 初項 4，公差 $-3$

$\boldsymbol{a_n} = 4 + (n-1)\cdot(-3) = \boldsymbol{-3n+7}$
$\boldsymbol{a_{25}} = -3\cdot 25 + 7 = \boldsymbol{-68}$

(2) 初項 7，公差 $\frac{1}{2}$

$\boldsymbol{a_n} = 7 + (n-1)\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}n + \frac{13}{2}}$

$\boldsymbol{a_{25}} = \frac{1}{2}\cdot 25 + \frac{13}{2} = \boldsymbol{19}$

**問5** 次の等差数列 $\{a_n\}$の$\boxed{\phantom{00}}$にあてはまる数を求めよ。また，一般項を求めよ。

(1) $\boxed{\phantom{00}}$, 30，37，…

公差を $d$ とおくと

$d = 37 - 30 = 7$

よって，$\boxed{\phantom{00}}$ にあてはまる数は

$30 - 7 = \boldsymbol{23}$

一般項は

$\boldsymbol{a_n} = 23 + (n-1)\cdot 7 = \boldsymbol{7n+16}$

(2) 2，$\boxed{\phantom{00}}$, $-4$，$-7$，…

公差を $d$ とおくと

$d = -7 - (-4) = -3$

よって，$\boxed{\phantom{00}}$ にあてはまる数は

$2 + (-3) = \boldsymbol{-1}$

一般項は

$\boldsymbol{a_n} = 2 + (n-1)\cdot(-3) = \boldsymbol{-3n+5}$

**例題 1** 第 4 項が 14，第 10 項が 62 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を求めよ。また，この数列の一般項を求めよ。

**解** 初項を $a$，公差を $d$ とおくと

第 4 項が 14 であるから　$a + 3d = 14$

第 10 項が 62 であるから $a + 9d = 62$

となる。

これらを連立させて解くと

$a = -10,\quad d = 8$

すなわち，初項は $-10$，公差は 8 である。

したがって，一般項は

$a_n = -10 + (n-1)\cdot 8 = 8n - 18$

**問6** 第 3 項が $-6$，第 10 項が 29 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

初項を $a$，公差を $d$ とおくと

第 3 項が $-6$ であるから$a + 2d = -6$

第 10 項が 29 であるから　$a + 9d = 29$

これらを連立させて解くと

$a = -16,\ d = 5$

すなわち，初項は $-16$，公差は 5 である。

したがって，一般項は

$a_n = -16 + (n-1)\cdot 5 = \boldsymbol{5n - 21}$

**例6** 数列 $\{a_n\}$ において，$a_n = 5n + 2$ ならば

$$a_{n+1} - a_n = \{5(n+1)+2\} - (5n+2) = 5$$

よって，差 $a_{n+1} - a_n$ が一定であるから，数列 $\{a_n\}$ は等差数列となる。

また

$$a_1 = 5\cdot 1 + 2 = 7$$

したがって，等差数列 $\{a_n\}$ の初項は（　7　），公差は（　5　）である。

**問7** 数列 $\{a_n\}$ において，$a_n = 3n - 4$ ならば，この数列は等差数列であることを示し，初項と公差を求めよ。

$$a_{n+1} - a_n = \{3(n+1) - 4\} - (3n - 4)$$
$$= 3$$

よって，差 $a_{n+1} - a_n$ が一定であるから，数列 $\{a_n\}$ は等差数列となる。

また　$a_1 = 3 \cdot 1 - 4 = -1$

したがって，等差数列 $\{a_n\}$ の初項は $\mathbf{-1}$，公差は $\mathbf{3}$ である。

注意　一般項が $a_n = pn + q$ の形で表される数列は等差数列になる。

**問8** 3 つの数 $a,\ b,\ c$ について，次のことが成り立つことを証明せよ。

$a,\ b,\ c$ がこの順に等差数列となる $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{2b = a + c}$

($\Rightarrow$ の証明)

$a$，$b$，$c$ がこの順に等差数列となるから，$b - a$ と $c - b$ は等しい。

よって　$b - a = c - b$

すなわち　$2b = a + c$

($\Leftarrow$ の証明)

$2b = a + c$ より，この式を変形して

$$b - a = c - b$$

$b - a$ と $c - b$ が等しいから，$a$，$b$，$c$ はこの順に等差数列となる。

# 3 等差数列の和

## 等差数列の和

（教科書 p.11）

**例 7** 等差数列 5, 8, 11, 14, 17, … の初項から第 4 項までの和 $S_4$ は，次のようになる。

$$S_4 = 5 + 8 + 11 + 14 = 38$$

| 等差数列の和 |
|---|
| 初項 $a$，公差 $d$，項数 $n$，末項 $l$ の等差数列の和を $S_n$ とすると<br>$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}n(a + l) = \frac{1}{2}n\{2a + (n - 1)d\}}$ |

**例 8** (1)　初項 23，末項 $-5$，項数 15 の等差数列の和を $S_{15}$ とすると

$$S_{15} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \{23 + (-5)\} = 135$$

(2)　初項 3，公差 4，項数 20 の等差数列の和を $S_{20}$ とすると

$$S_{20} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \{2 \cdot 3 + (20 - 1) \cdot 4\} = 820$$

**問9** 次の等差数列の和を求めよ。

(1)　初項 7，末項 61，項数 10

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (7 + 61) = \mathbf{340}$$

(2)　初項 $-10$，公差 4，項数 6

$$S_6 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \{2 \cdot (-10) + (6 - 1) \cdot 4\} = \mathbf{0}$$

**例 9** 5 から 31 までの奇数の和 $5+7+9+\cdots+31$ を求めてみよう。
これは，初項 5，公差 2，末項 31 の等差数列の和である。
31 を第 $n$ 項とすると　　$31=5+2(n-1)$
これより，$n=14$ となり，項数は 14 である。
よって，求める和 $S_{14}$ は　　$S_{14}=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot(5+31)=252$

**問10** 次の等差数列の和を求めよ。
(1)　初項 5，公差 3，末項 53
53 を第 $n$ 項とすると
$53=5+3(n-1)$
これより，$n=17$ となり，項数は 17 である。
よって，求める和 $S_{17}$ は

$$S_{17}=\frac{1}{2}\cdot 17\cdot(5+53)=\mathbf{493}$$

(2)　公差 $-3$，末項 4，項数 10
初項を $a$ とおくと
$a+(10-1)\cdot(-3)=4$
これより，$a=31$ となり，初項は 31 である。
よって，求める和 $S_{10}$ は

$$S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(31+4)=\mathbf{175}$$

**例題 2**　初項 3，公差 2 の等差数列において，初項から第何項までの和が 63 になるかを求めよ。

**解**　第 $n$ 項までの和が 63 になるとすると，等差数列の和の公式により

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 3+(n-1)\cdot 2\}=63$$

ゆえに　　$n^2+2n-63=0$
$(n+9)(n-7)=0$
これを解いて　　$n=-9,\ 7$
$n$ は自然数であるから，第 7 項までの和が 63 になる。

**問11** 初項 21，公差 $-3$ の等差数列において，初項から第何項までの和が 75 になるかを求めよ。

第 $n$ 項までの和が 75 になるとすると，等差数列の和の公式により

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 21+(n-1)\cdot(-3)\}=75$$

ゆえに　　$n^2-15n+50=0$
$(n-5)(n-10)=0$
これを解いて　　$n=5,\ 10$
よって，第 **5** 項，第 **10** 項までの和が 75 になる。

## いろいろな自然数の数列の和

（教科書 p.13）

1 から $n$ までの自然数 1, 2, 3, ⋯ , $n$ の和は，初項 1，末項 $n$，項数 $n$ の等差数列の和であるから，次の公式が得られる。

（⑬　$\mathbf{1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)}$　）

**問12** 上の公式を用いて，次の和を求めよ。
(1)　1 から 100 までの自然数の和

$$\frac{1}{2}\cdot 100\cdot(100+1)=\mathbf{5050}$$

(2)　101 から 200 までの自然数の和

$$\frac{1}{2}\cdot 200\cdot(200+1)-5050=\mathbf{15050}$$

**問13** 1 から始まる $n$ 個の奇数の和は，次の式で表されることを示せ。

$$\mathbf{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2}$$

初項 1，末項 $2n-1$，項数 $n$ の等差数列の和であるから

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

$$=\frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}=\frac{1}{2}n\cdot 2n=n^2$$

ゆえに　$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

〔別証〕初項1，公差2，項数$n$ の等差数列の和であるから

$$1+3+5+:::+(2n-1)$$

$$=\frac{1}{2}n\{2\cdot 1+(n-1)\cdot 2\}=\frac{1}{2}n\cdot 2n=n^2$$

**例題 3**　2 桁の自然数のうち，5 で割ると 2 余る数の和を求めよ。

**解**　5 で割ると 2 余る 2 桁の自然数を並べたものは，公差 5 の等差数列で，初項は 12 であるから，一般項は

$$12+5(n-1)=5n+7$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| …… | …… | …… | …… | …… |

ここで，$5n+7\leqq 99$ を満たす最大の自然数 $n$ は

$$n\leqq\frac{92}{5}=18.4$$

よって　$n=18$

求める数の和は，初項 12，公差 5，項数 18 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 18\cdot\{2\cdot 12+(18-1)\cdot 5\}=981$$

**問14** 2 桁の自然数のうち，次の条件を満たす数の和を求めよ。

(1)　7 で割り切れる

7 で割り切れる 2 桁の自然数を並べたものは，公差 7 の等差数列で，初項は 14 であるから，一般項は

$$14+7(n-1)=7n+7$$

ここで，$7n+7\leqq 99$ を満たす最大の自然数 $n$ は

$$n\leqq\frac{92}{7}=13.1\cdots$$

よって　$n=13$

求める数の和は，初項 14，公差 7，項数 13 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot\{2\cdot 14+(13-1)\cdot 7\}=\mathbf{728}$$

(2)　7 で割ると 3 余る

7 で割ると 3 余る 2 桁の自然数を並べたものは，公差 7 の等差数列で，初項は 10 であるから，一般項は

$$10+7(n-1)=7n+3$$

ここで，$7n+3\leqq 99$ を満たす最大の自然数 $n$ は

$$n\leqq\frac{96}{7}=13.7\cdots$$

よって　$n=13$

求める数の和は，初項 10，公差 7，項数 13 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 13\cdot\{2\cdot 10+(13-1)\cdot 7\}=\mathbf{676}$$

# 4 等比数列

## 等比数列

（教科書 p.14）

初項 $a$ から始めて，一定の数 $r$ を次々に掛けて得られる数列を（⑭　等比数列　）といい，$r$ をその等比数列の（⑮　公比　）という。

例10 (1)　等比数列　1, 2, 4, 8, 16, ⋯
の公比は（　2　）である。

(2)　初項 1，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列は

$$1,\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad -\frac{1}{8},\quad \frac{1}{16},\quad -\frac{1}{32},\quad \cdots$$

となる。

問15 次の等比数列の初項から第 5 項までを求めよ。

(1)　初項 4，公比 3

**4，12，36，108，324**

(2)　初項 8，公比 $-1$

**8，−8，8，−8，8**

## 等比数列の一般項

（教科書 p.15）

| 等比数列の一般項 |
|---|
| 初項 $a$，公比 $r$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$ |

注意　$r \neq 0$ のとき，$r^0 = 1$ と定める。

例11 (1)　初項 3，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

(2)　初項 4，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

問16 次の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　2, 6, 18, 54, ⋯

初項 2，公比 $\frac{6}{2} = 3$ の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$

(2)　3, $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{8}$, ⋯

初項 3，公比 $-\frac{3}{2} \div 3 = -\frac{1}{2}$ の等比数列$\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

問17 次の等比数列 $\{a_n\}$ の $\boxed{\phantom{00}}$ にあてはまる数を求めよ。また，一般項を求めよ。

(1)　2, 10, $\boxed{\phantom{00}}$, ⋯

公比を $r$ とおくと　$r = \frac{10}{2} = 5$

よって，$\boxed{\phantom{00}}$ にあてはまる数は

$10 \times 5 = \boldsymbol{50}$

したがって，一般項は

$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 5^{n-1}}$

(2)　$\boxed{\phantom{00}}$, 12, $-3$, ⋯

公比を $r$ とおくと　$r = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}$

よって，$\boxed{\phantom{00}}$ にあてはまる数は

$$12 \div \left(-\frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{-48}$$

したがって，一般項は

$$\boldsymbol{a_n = -48 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$$

**例題 4**　第 3 項が 28，第 5 項が 112 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

**解**　初項を $a$，公比を $r$とおくと

第 3 項が 28 であるから　$ar^2 = 28$　……①

第 5 項が 112 であるから　$ar^4 = 112$　……②

となる。

②÷①より　$r^2 = 4$

したがって　$r = \pm 2$

(i)　$r = 2$ のとき

①に代入して　$a = 7$

よって　$a_n = 7 \cdot 2^{n-1}$

(ii)　$r = -2$ のとき

①に代入して　$a = 7$

よって　$a_n = 7 \cdot (-2)^{n-1}$

(i)，(ii)より，求める一般項は

$a_n = 7 \cdot 2^{n-1}$　または　$a_n = 7 \cdot (-2)^{n-1}$

**問18**　第 3 項が 18，第 5 項が 162 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

初項を $a$，公比を $r$ とおくと

第 3 項が 18 であるから

$ar^2 = 18$　……①

第 5 項が 162 であるから

$ar^4 = 162$　……②

② ÷ ①より　$r^2 = 9$

したがって　$r = \pm 3$

(i)　$r = 3$ のとき

①に代入して　$a = 2$

よって　$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

(ii)　$r = -3$ のとき

①に代入して　$a = 2$

よって　$a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$

(i)，(ii) より，求める一般項は

$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$　または$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}}$

**例 12**　$a_n = 2^n$，$b_n = 3^n$とするとき，$c_n = a_n b_n$ で定められる数列 $\{c_n\}$ を考えると

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{n+1} \cdot 3^{n+1}}{2^n \cdot 3^n} = 6$$

となるから，公比が6 の等比数列である。

**問19**　$a_n = 2^n$，$b_n = 5 \cdot 3^n$ とするとき，$c_n = \frac{a_n}{b_n}$ で定められる数列 $\{c_n\}$ の公比を求めよ。

$c_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{2^n}{5 \cdot 3^n}$であるから

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{n+1}}{5 \cdot 3^{n+1}} \div \frac{2^n}{5 \cdot 3^n}$$

$$= \frac{2^{n+1} \cdot 5 \cdot 3^n}{5 \cdot 3^{n+1} \cdot 2^n} = \frac{2}{3}$$

となるから，公比が $\frac{2}{3}$ の等比数列である。

**問20**　0 でない 3 つの数 $a$, $b$, $c$ について，次のことが成り立つことを証明せよ。

$a$, $b$, $c$ がこの順に等比数列となる　$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{b^2 = ac}$

**(⇒ の証明)**

$a$，$b$，$c$ がこの順に等比数列となるから，$\frac{b}{a}$ と $\frac{c}{b}$ は等しい。

よって　$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

すなわち　$b^2 = ac$

**(⇐ の証明)**

$b^2 = ac$ であり，$a$，$b$，$c$ のいずれも 0 でないから，

この式を変形すると　$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

$\frac{b}{a}$ と $\frac{c}{b}$ が等しいから，$a$，$b$，$c$ はこの順に等比数列となる。

# 5 等比数列の和

## 等比数列の和

（教科書 p.17）

| 等比数列の和 |
| --- |
| 初項 $a$，公比 $r$ の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ は<br>$r \neq 1$ のとき　$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$<br>$r = 1$ のとき　$S_n = na$ |

例13 初項 6，公比 $-2$，項数 4 の等比数列の和 $S_4$ は

$$S_4 = \frac{6\{1-(-2)^4\}}{1-(-2)} = \frac{6\cdot(-15)}{3} = -30$$

問21 次の等比数列の和を求めよ。

(1)　初項 2，公比 $-3$，項数 6

$$S_6 = \frac{2\{1-(-3)^6\}}{1-(-3)} = \frac{2\cdot(-728)}{4} = \mathbf{-364}$$

(2)　初項 $\frac{3}{25}$，公比 $\frac{4}{3}$，項数 4

$$S_4 = \frac{\frac{3}{25}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^4 - 1\right\}}{\frac{4}{3}-1} = \frac{\frac{3}{25}\cdot\frac{175}{81}}{\frac{1}{3}} = \mathbf{\frac{7}{9}}$$

例14 初項 3，公比 2 の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ は

$$S_n = \frac{3(2^n-1)}{2-1} = 3(2^n-1)$$

問22 次の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ。

(1)　6，18，54，162，…

初項 6，公比 $\frac{18}{6} = 3$ の等比数列であるから

$$S_n = \frac{6(3^n-1)}{3-1} = \mathbf{3(3^n-1)}$$

(2)　10，$-\frac{5}{2}$，$\frac{5}{8}$，$-\frac{5}{32}$，…

初項 10，公比 $\left(-\frac{5}{2}\right) \div 10 = -\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$S_n = \frac{10\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \mathbf{8\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}}$$

応用例題 5

初項から第 3 項までの和が 9，初項から第 6 項までの和が −63 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解　初項を $a$，公比を $r$，初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とする。

$r=1$ のとき　$S_3=9$ より　$3a=9$

$S_6=-63$ より　$6a=-63$

ゆえに，これらを同時に満たす $a$ は存在しない。

よって，$r\neq 1$ であるから

$S_3=9$ より　$\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=9$　……①

$S_6=-63$ より　$\dfrac{a(1-r^6)}{1-r}=-63$　……②

②より　$\dfrac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=-63$

これに①を代入して　$9(1+r^3)=-63$

$1+r^3=-7$

$r^3=-8$

$r$ は実数であるから　$r=-2$

これを①に代入して　$a=3$

ゆえに，この等比数列の初項は 3，公比は −2 である。

問23　初項から第 3 項までの和が 35，初項から第 6 項までの和が 315 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

初項を $a$，公比を $r$，初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とする。

$r=1$ のとき

$S_3=35$ より　$3a=35$

$S_6=315$ より　$6a=315$

ゆえに，これらを同時に満たす $a$ は存在しない。

よって，$r\neq 1$ であるから

$S_3=35$ より　$\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=35$　……①

$S_6=315$ より　$\dfrac{a(1-r^6)}{1-r}=315$　……②

②より　$\dfrac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r}=315$

これに①を代入して　$35(1+r^3)=315$

$1+r^3=9$

$r^3=8$

$r$ は実数であるから　$r=2$

これを①に代入して　$a=5$

ゆえに，この等比数列の初項は **5**，公比は **2**である。

## 参 考　複利法

（教科書 p.19）

1 年ごとに利子を元金にくり入れ，その合計額を次年の元金として利子を計算する（⑯　複利法　）について考えてみよう。

金額 $a$ 円を年利率 $r$ で預金したとき

| | 元金 | 利息 | 元利合計[＝元金＋利息] |
|---|---|---|---|
| 1 年後 | $a$ | $a\times r$ | $a(1+r)[=a+ar]$ |
| 2 年後 | $a(1+r)$ | $a(1+r)\times r$ | $a(1+r)^2$ |
| 3 年後 | $a(1+r)^2$ | $a(1+r)^2\times r$ | $a(1+r)^3$ |
| .... | ........ | | |

複利法によれば，1年後，2年後，3年後，･･･の元利合計は

$a(1+r)$，$a(1+r)^2$，$a(1+r)^3$，･･･

という等比数列になる。

## 6 和の記号Σ

（教科書 p.20）

と書き表す。すなわち，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ は $k$ が 1，2，3，⋯，$n$ と変わるときのすべての $a_k$ の和を表す。

**例 15** (1) $$\sum_{k=1}^{4}(2k-1)=(2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+(2\cdot4-1)$$
$$=1+3+5+7$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

**問24** 次の和を，例 15 のように記号 Σ を用いずに表せ。

(1) $$\sum_{k=1}^{4}(3k-1)$$

$$=(3\cdot1-1)+(3\cdot2-1)+(3\cdot3-1)+(3\cdot4-1)$$
$$=\mathbf{2+5+8+11}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{3}2k^2$$

$$=2\cdot1^2+2\cdot2^2+2\cdot3^2$$
$$=\mathbf{2+8+18}$$

(3) $$\sum_{k=1}^{n}2^k$$

$$=\mathbf{2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n}$$

**例16** 数列の和を記号 $\sum$ を用いて表すと，次のようになる。

（1） $1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k$

（2） $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6=\sum_{k=1}^{5} k(k+1)$

**問25** 次の和を記号 $\sum$ を用いて表せ。

（1） $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

$=\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k^3}$

（2） $3+5+7+\cdots+(2n+1)$

$=\sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{2k+1})$

（3） $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+5\cdot 7$

$=\sum_{k=1}^{5} \boldsymbol{k(k+2)}$

**例17** 次の式はいずれも $2^2+3^2+4^2+5^2$ を表している。

$$\sum_{k=2}^{5} k^2,\quad \sum_{j=2}^{5} j^2,\quad \sum_{i=1}^{4} (i+1)^2$$

**例18** $r\neq 1$ のとき，初項 $a$，公比 $r$ の等比数列の和の公式

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

を記号 $\sum$ を用いて表すと　$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

**問26** 次の和を求めよ。

（1） $\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 3^{k-1}$

$=\dfrac{2(3^n-1)}{3-1}=\boldsymbol{3^n-1}$

（2） $\sum_{k=1}^{n} (-2)^k$

$=\sum_{k=1}^{n} \{-2\cdot(-2)^{k-1}\}$

$=\dfrac{-2\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$

$=\boldsymbol{-\dfrac{2}{3}\{1-(-2)^n\}}$

## 累乗の和

（教科書 p.21）

**例19** $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\frac{1}{6}\cdot 10\cdot(10+1)\cdot(2\cdot 10+1)=385$

**問27** 次の和を求めよ。

（1） $1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$

$=\dfrac{1}{6}\cdot 20\cdot(20+1)\cdot(2\cdot 20+1)=\boldsymbol{2870}$

（2） $11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2$

$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$

$=2870-\dfrac{1}{6}\cdot 10\cdot(10+1)\cdot(2\cdot 10+1)$

$=2870-385=\boldsymbol{2485}$

問28　等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を利用して

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

が成り立つことを示せ。

等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ において

$k=1$ とすると

$2^4-1^4=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$

$k=2$ とすると

$3^4-2^4=4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1$

$k=3$ とすると

$4^4-3^4=4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1$

…………………

$k=n$ とすると

$(n+1)^4-n^4=4\cdot n^3+6\cdot n^2+4\cdot n+1$

これら $n$ 個の等式の辺々を加えると

$$(n+1)^4-1^4=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

よって

$$\begin{aligned}4\sum_{k=1}^{n}k^3&=(n+1)^4-1-6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\\&=(n+1)^4-1-6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\\&=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)\\&=(n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}\\&=(n+1)(n^3+n^2)\\&=n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

ゆえに

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

**累乗の和**

$$\sum_{k=1}^{n}c=nc\quad c\text{ は定数}\qquad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\qquad \sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

## 記号 Σ の性質

（教科書 p.22）

**記号 ∑ の性質**

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k\qquad c\text{ は定数}$$

例20

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+4)&=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}(-3k)+\sum_{k=1}^{n}4\\&=\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+4n\\&=\frac{1}{6}n\{(n+1)+(2n+1)-9(n+1)+24\}\\&=\frac{1}{3}n(n^2-3n+8)\end{aligned}$$

問29 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n}(5k+1)$

$$= \sum_{k=1}^{n} 5k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n$$

$$= \frac{1}{2}n\{5(n+1)+2\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}n(5n+7)}$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k-2)$

$$= \sum_{k=1}^{n}(k^2-k-2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 2$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) - 2n$$

$$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - 3(n+1) - 12\}$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2-14) = \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n^2-7)}$$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 - \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)-2\}$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-2)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

例21 数列 $2\cdot3,\ 3\cdot4,\ 4\cdot5,\ \cdots$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めてみよう。

この数列の第 $k$ 項は $(k+1)(k+2)$ である。

よって，求める和 $S_n$ は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 2n$$

$$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) + 9(n+1) + 12\}$$

$$= \frac{1}{3}n(n^2+6n+11)$$

**問30** 数列 $1\cdot3,\ 2\cdot4,\ 3\cdot5,\ 4\cdot6,\ \cdots$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ。

この数列の第 $k$ 項は $k(k+2)$ である。

よって，求める和 $S_n$ は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} k(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k^2+2k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+6\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)} \end{aligned}$$

## 7 いろいろな数列

### 階差数列

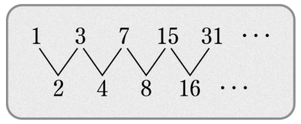
（教科書 p.24）

**例22** 数列 $\{a_n\}$ を　　$1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127,\ \cdots$

とする。この数列は，等差数列でも等比数列でもないが，以下のような考え方で一般項を求めてみよう。

この数列の隣り合う項の差をとると

$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \cdots$




これは，初項 2，公比 2 の等比数列であるから，

すべての自然数 $k$ について　　$a_{k+1} - a_k = 2^k$

が成り立つ。右の計算から

$$\begin{aligned} \cancel{a_2} - a_1 &= 2 \\ \cancel{a_3} - \cancel{a_2} &= 4 \\ \cancel{a_4} - \cancel{a_3} &= 8 \\ &\cdots\cdots \\ +)\ a_n - \cancel{a_{n-1}} &= 2^{n-1} \\ \hline a_n - a_1 &= 2+4+8+\cdots+2^{n-1} \end{aligned}$$

$n \geqq 2$ のとき

$a_n - a_1$

$= 2+4+8+\cdots+2^{n-1}$

$= \dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$= 2^n - 2$

ゆえに　　$a_n = a_1 + (2^n-2) = 1 + (2^n-2) = 2^n - 1$

$a_1 = 1$ であるから，$a_n = 2^n - 1$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

一般に，数列 $\{a_n\}$ に対して

$b_n = a_{n+1} - a_n$　　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

として得られる数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の（⑰　　階差数列　　）という。

| 階差数列を用いて一般項を表す式 |
| --- |
| 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき $$\boldsymbol{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$$ |

**例題 6**　列 2, 6, 12, 20, 30, 42, … の一般項を求めよ。

**解**　この数列を $\{a_n\}$，その階差数列を $\{b_n\}$とすると，$\{b_n\}$ は

4, 6, 8, 10, 12, …

となる。

これは，初項 4，公差 2 の等差数列であるから

$$b_n = 4 + (n-1)\cdot 2 = 2n + 2$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+2) = 2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 2$$

$$= 2 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + 2(n-1) = n(n+1)$$

$a_1 = 2$ であるから，$a_n = n(n+1)$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$a_n = n(n+1)$

**問31**　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, …

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，3，5，7，9，11，…

これは，初項 1，公差 2 の等差数列であるから

$$b_n = 1 + (n-1)\cdot 2 = 2n - 1$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= 1 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n - (n-1)$$

$$= n^2 - 2n + 2$$

$a_1 = 1$ であるから，$a_n = n^2 - 2n + 2$ は$n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{a_n = n^2 - 2n + 2}$

(2)　3, 4, 1, 10, −17, 64, −179, …

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，−3，9，−27，81，−243，…

これは，初項 1，公比 −3 の等比数列であるから

$$b_n = 1\cdot(-3)^{n-1} = (-3)^{n-1}$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1}(-3)^{k-1}$$

$$= 3 + \frac{1\cdot\{1-(-3)^{n-1}\}}{1-(-3)}$$

$$= 3 + \frac{1}{4}\{1-(-3)^{n-1}\}$$

$$= \frac{1}{4}\{13-(-3)^{n-1}\}$$

$a_1 = 3$ であるから，

$a_n = \frac{1}{4}\{13-(-3)^{n-1}\}$ は

$n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{4}\{13-(-3)^{n-1}\}}$

## 数列の和と一般項

（教科書 p.26）

| 数列の和と一般項 |
|---|
| 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とすると<br>$a_1 = S_1$<br>$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$ |

**例題 7**　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が次のように与えられているとき，この数列の一般項を求めよ。$S_n = n^3 - n$

**解**　$a_1 = S_1 = 1^3 - 1 = 0$

また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^3 - n) - \{(n-1)^3 - (n-1)\} \\ &= 3n(n-1) \end{aligned}$$

$a_1 = 0$ であるから，$a_n = 3n(n-1)$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$a_n = 3n(n-1)$

**問32**　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が次のように与えられているとき，この数列の一般項を求めよ。

(1)　$S_n = n^2 + 3n$

$a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$

また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 2n + 2 \end{aligned}$$

$a_1 = 4$ であるから，$a_n = 2n + 2$ は$n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{a_n = 2n + 2}$

(2)　$S_n = 3^n - 1$

$a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2$

また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) \\ &= 3 \cdot 3^{n-1} - 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

$a_1 = 2$ であるから，$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$

## 分数で表された数列の和

（教科書 p.27）

**応用例題 8**　次の和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

**解**

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

が成り立つから

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

**問33**　$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$ が成り立つことを利用して，次の和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}$$

が成り立つから

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1} = \boldsymbol{\frac{2n}{2n+1}}$$

## 少し複雑な数列

（教科書 p.28）

**応用例題 9**

$r \neq 1$ のとき，次の和 $S_n$を求めよ。

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots + nr^{n-1}$$

**考え方** 等比数列の和の公式の導き方と同様に $S_n - rS_n$ を計算する。

**解**

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots + nr^{n-1} \quad \cdots\cdots①$$

①の両辺に $r$ を掛けて

$$rS_n = \qquad r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n \quad \cdots\cdots②$$

①－②より

$$(1-r)S_n = (1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}) - nr^n$$

$r \neq 1$ であるから

$$(1-r)S_n = \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n$$

$$= \frac{1 - r^n - nr^n(1-r)}{1-r}$$

$$= \frac{1 - (n+1)r^n + nr^{n+1}}{1-r}$$

よって

$$S_n = \frac{1 - (n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2}$$

**注意** 例題 9 で，$r = 1$ のときは次のようになる。

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

**問34** 次の和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3^3 + \cdots + 2n \cdot 3^{n-1}$$

$$S_n = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3^3 + \cdots + 2n \cdot 3^{n-1} \quad \cdots\cdots①$$

①の両辺に 3 を掛けて

$$3S_n = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + \cdots + 2(n-1) \cdot 3^{n-1} + 2n \cdot 3^n \quad \cdots\cdots②$$

① － ②より

$$-2S_n = 2(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}) - 2n \cdot 3^n$$

$$= 2 \cdot \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3-1} - 2n \cdot 3^n$$

$$= 3^n - 1 - 2n \cdot 3^n$$

$$= -(2n-1) \cdot 3^n - 1$$

よって $\boldsymbol{S_n = \frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{2}}$

**応用例題 10**

正の奇数の列を次のような群に分け，第 $n$ 群には $n$ 個の数が入るようにする。

| 1 | 3, 5 | 7, 9, 11 | 13, 15, 17, 19 | … |
|---|---|---|---|---|
| 第 1 群 | 第 2 群 | 第 3 群 | 第 4 群 | |

(1) 第 $n$ 群の最初の項を求めよ。

(2) 第 $n$ 群の項の総和を求めよ。

**解** (1) $n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに含まれる奇数の個数は

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)n$$

ゆえに，第 $n$ 群の最初の項は，奇数の列の

$$\frac{1}{2}(n-1)n + 1 = \frac{1}{2}(n^2 - n + 2)$$

番目である。

また，$k$ 番目の奇数は $2k-1$ であるから，求める数は

$$2 \cdot \frac{1}{2}(n^2 - n + 2) - 1 = n^2 - n + 1$$

これは，$n = 1$ のときも成り立つ。

(2) 第 $n$ 群は初項 $n^2 - n + 1$，公差 2，項数 $n$ の等差数列であるから，その和は

$$\frac{1}{2}n\{2(n^2 - n + 1) + (n-1) \cdot 2\} = n^3$$

問35　自然数の列を次のような群に分ける。

$1,\ 2\ |\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ |\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\ |\ \cdots$

(1)　第 $n$ 群の最初の項を求めよ。

第 $n$ 群の項の個数は $2n$ であるから，$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までに含まれる自然数の個数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n = n(n-1)$$

ゆえに，第 $n$ 群の最初の項は

$$n(n-1)+1 = \boldsymbol{n^2 - n + 1}$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

(2)　第 $n$ 群の項の総和を求めよ。

第 $n$ 群は初項 $n^2-n+1$，公差 1，項数 $2n$ の等差数列であるから，その和は

$$\frac{1}{2} \cdot 2n\{2(n^2-n+1)+(2n-1)\cdot 1\}$$

$$= \boldsymbol{n(2n^2+1)}$$

〔別解〕第 $n$ 群の項の総和$S$ を求めるには，第 1 群から第 $n$ 群までの項の総和 $T$ から第 1 群から第$(n-1)$ 群までの項の総和 $U$ を引けばよい。

第 1 群から第 $n$ 群までに含まれる自然数の個数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2 \cdot \frac{1}{2}(n+1)n = n(n+1)$$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$S = T - U = \sum_{k=1}^{n(n+1)} k - \sum_{k=1}^{n(n-1)} k$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)\{n(n+1)+1\} - \frac{1}{2}n(n-1)\{n(n-1)+1\}$$

$$= \frac{1}{2}n\{(n+1)(n^2+n+1)-(n-1)(n^2-n+1)\}$$

$$= \frac{1}{2}n(4n^2+2) = n(2n^2+1)$$

これは，$n = 1$ のときも成り立つ。

## 問 題

（教科書 p.30）

**1**　初項 $8$，公差 $7$ の等差数列には $400$ という項はあるか。また，あるとすれば第何項か。

初項 $8$，公差 $7$ の等差数列の第 $n$ 項が $400$ であるとすると

$8+(n-1)\cdot 7=400$

よって　$n=57$

ゆえに，この等差数列には $400$ という項が，第**57** 項にある。

**2**　第 $5$ 項が $108$，第 $20$ 項が $-237$ の等差数列がある。

(1)　この数列の初項と公差を求めよ。

初項を $a$，公差を $d$ とおくと

第 $5$ 項が $108$ であるから

$a+4d=108$

第 $20$ 項が $-237$ であるから

$a+19d=-237$

これらを連立させて解くと

$a=200$，$d=-23$

ゆえに　初項は **200**，公差は **−23**

(2)　この数列で，第何項が初めて負になるか。

この数列の第 $n$ 項を $a_n$ とすると

$a_n=200+(n-1)\cdot(-23)$

$=-23n+223$

$a_n<0$ となる条件は

$-23n+223<0$

$$n>\frac{223}{23}=9.6\cdots$$

ゆえに，第 **10** 項が初めて負になる。

(3)　この数列の初項から第何項までの和が最も大きくなるか。

(2) より，この数列の初項から第 $9$ 項までが正で，第 $10$ 項からは負である。

ゆえに，正の項のみをすべて加えれば和が最も大きくなるから，初項から第 **9** 項までの和が最も大きくなる。

**3**　$3$ つの数 $x-4$，$x$，$x+6$ がこの順で等比数列となるとき，$x$ の値を求めよ。

$x-4$，$x$，$x+6$ がこの順に等比数列となるから

$x^2=(x-4)(x+6)$

$-2x=-24$

よって　$\boldsymbol{x=12}$

**4**　第 $3$ 項が $12$，第 $6$ 項が $96$ の等比数列において，初項から第 $n$ 項までの各項の平方の和を求めよ。ただし，公比は実数とする。

初項を $a$，公比を $r$ とおくと

第 $3$ 項が $12$ であるから　$ar^2=12$　……①

第 $6$ 項が $96$ であるから　$ar^5=96$　……②

② ÷ ①より　$r^3=8$

$r$ は実数であるから　$r=2$

これを①に代入して　$a=3$

よって，第 $n$ 項は　$3\cdot 2^{n-1}$

ゆえに，各項を平方して得られる数列の第 $n$ 項は

$(3\cdot 2^{n-1})^2=9\cdot 4^{n-1}$

よって，初項 $9$，公比 $4$ の等比数列である。

したがって，求める和は

$$\frac{9(4^n-1)}{4-1}=\boldsymbol{3(4^n-1)}$$

**5**　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，初項から第 $n$ 項までの和を求めよ。

(1)　$1^2,\ 4^2,\ 7^2,\ 10^2,\ 13^2,\ \cdots$

数列 $\{a_n\}$ の各項の指数を除いて考えると

$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ \cdots$

となり，この数列の第 $n$ 項は

$1+(n-1)\cdot 3=3n-2$

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=\boldsymbol{(3n-2)^2}$

また，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-2)^2=\sum_{k=1}^{n}(9k^2-12k+4)$$
$$=9\sum_{k=1}^{n}k^2-12\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}4$$
$$=9\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-12\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+4n$$
$$=\frac{1}{2}n\{3(n+1)(2n+1)-12(n+1)+8\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(6n^2-3n-1)}$$

(2)　$2\cdot 3^2,\ 4\cdot 4^2,\ 6\cdot 5^2,\ 8\cdot 6^2,\ 10\cdot 7^2,\ \cdots$

$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots$

という数列の第 $n$ 項は $2n$ であり

$3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ \cdots$

という数列の第 $n$ 項は $(n+2)^2$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=\boldsymbol{2n(n+2)^2}$

また，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}2k\,(k+2)^2=\sum_{k=1}^{n}(2k^3+8k^2+8k)$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}k^3+8\sum_{k=1}^{n}k^2+8\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+8\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+8\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}n^2(n+1)^2+\frac{4}{3}n(n+1)(2n+1)+4n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{3n(n+1)+8(2n+1)+24\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(3n^2+19n+32)}$$

(3)　$1,\ 1+2,\ 1+2+4,\ 1+2+4+8,\ 1+2+4+8+16,\ \cdots$

数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=1+2+4+8+16+\cdots+2^{n-1}$$
$$=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=\boldsymbol{2^n-1}$$

また，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n$$
$$=\boldsymbol{2^{n+1}-n-2}$$

**6** 数列 2, 3, 7, 16, 32, 57, ⋯ の一般項を求めよ。

与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。その階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，4，9，16，25，⋯

よって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$b_n = n^2$

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$
$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$
$$= 2 + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$$
$$= \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 12)$$

$a_1 = 2$ であるから，

$a_n = \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 12)$は $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{6}(2n^3 - 3n^2 + n + 12)}$

**7** 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ が $S_n = n^2 - n + 1$ で表されるとき，この数列の一般項を求めよ。

$a_1 = S_1 = 1^2 - 1 + 1 = 1$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= (n^2 - n + 1) - \{(n-1)^2 - (n-1) + 1\}$$
$$= 2n - 2$$

よって，一般項 $a_n$ は

$\boldsymbol{a_1 = 1}$，$\boldsymbol{n \geqq 2}$ **のとき**，$\boldsymbol{a_n = 2n - 2}$

**8** 次の和 $S_n$ を求めよ。

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$\frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right)$$

が成り立つ。

$$S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{n}{3n+1}}$$

**9** $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \sqrt{1}$，　$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$，　⋯

が成り立つことを利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ を求めよ。

$$\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$
$$= \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$
$$= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$
$$= \boldsymbol{\sqrt{n+1} - 1}$$

**10**　次の和 $S_n$ を求めよ。

$S_n = 4\cdot 1 + 7\cdot 4 + 10\cdot 4^2 + 13\cdot 4^3 + \cdots + (3n+1)\cdot 4^{n-1}$

$S_n = 4\cdot 1 + 7\cdot 4 + 10\cdot 4^2 + 13\cdot 4^3 + \cdots + (3n+1)\cdot 4^{n-1}$　……①

①の両辺に 4 を掛けて

$4S_n = 4\cdot 4 + 7\cdot 4^2 + \cdots + (3n-2)\cdot 4^{n-1} + (3n+1)\cdot 4^n$　……②

①　－ ②より，$n \geqq 2$ のとき

$-3S_n = 4\cdot 1 + 3(4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1}) - (3n+1)\cdot 4^n$

$= 4 + 3\cdot\dfrac{4(4^{n-1}-1)}{4-1} - (3n+1)\cdot 4^n$

$= 4 + 4^n - 4 - (3n+1)\cdot 4^n$

$= -3n\cdot 4^n$

よって $S_n = n\cdot 4^n$ で，$S_1 = 4$ であるからこれは $n = 1$ のときも成り立つ。

ゆえに　$\boldsymbol{S_n = n\cdot 4^n}$