練習問題A

（教科書 p.42）

1 初項が 13 で，初項から第 3 項までの和と，初項から第 11 項までの和とが等しい等差数列がある。この数列の公差を求めよ。

2 ある等差数列の初めの 10 項の和が 100，次の 10 項の和が 200 であるという。その次の 10 項の和を求めよ。

3 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項がそれぞれ $a_n = 9n - 8$，$b_n = 6n + 1$ であるとき，この 2 つの数列に共通に含まれる項を並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。また，この数列の初項から第 10 項までの和を求めよ。

4　等比数列をなす 3 つの数 $1,\ r,\ r^2$ を並べかえると等差数列になった。
このとき，r の値を求めよ。ただし，$r<0$ とする。

5　次の和を求めよ。

(1)　$1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1$

(2)　$1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

6　数列 $2\cdot3,\ 4\cdot3^2,\ 6\cdot3^3,\ 8\cdot3^4,\ 10\cdot3^5,\ \cdots$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

7　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ \cdots$$

8　n を 2 以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

9 数列 $1,\ 1+2+1,\ 1+2+3+2+1,\ 1+2+3+4+3+2+1,\ \cdots$ がある。

(1)　この数列の各項を順次計算することにより，一般項を推定せよ。

(2)　数学的帰納法を用いて，(1)で推定した式が正しいことを証明せよ。

練習問題B

（教科書 p.43）

10　-5 と 15 の間に n 個の数を並べて，初項 -5，末項 15 の等差数列をつくる。
この等差数列の総和が 100 となるとき，n の値を求めよ。

11　$4,\ a,\ b$ および $b,\ c,\ 64$ がこの順でそれぞれ等比数列となり，$a,\ b,\ c$ がこの順で等差数列になるようにしたい。$a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

12　$\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ を計算せよ。
また，その結果を利用して，次の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

13　数列 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \cdots$

について，次の問に答えよ。

(1)　$\frac{1}{17}$ は，この数列の第何項か。

(2)　この数列の第 200 項は何か。

14 $a_1 = 5,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+3}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

15 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 2a_n + 1$ で表されるとき，a_n を n の式で表せ。

16 平面上に n 個の円があって，どの 2 つの円も異なる 2 点で交わり，また，どの 3 つの円も同一の点で交わっていない。このとき，これらの円によって平面はいくつの部分に分けられているか。

発 展　3 項間の漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$

（教科書 p.44）

例題 1　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

解

問1　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

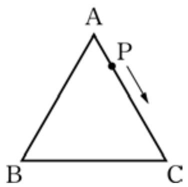
（1）　$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

⑵　$a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

参考　確率と漸化式

（教科書 p.46）

例 1 点Pは△ABCの1つの頂点に達してから1秒を経過するごとに，確率 $\frac{1}{4}$ でその点に留まり，確率 $\frac{3}{8}$ で時計回りに，確率 $\frac{3}{8}$ で時計回りとは逆向きに隣の点に移動する。頂点Aを出発した点Pが，n 秒後に頂点Aにある確率 p_n を求めてみよう。



頂点Aを出発した点Pが，$(n+1)$ 秒後に頂点Aにあるという事象は

① n 秒後に頂点Aにあり，$(n+1)$ 秒後も頂点Aにある

② n 秒後に頂点Aになく，$(n+1)$ 秒後に頂点Aに移動する

の和事象であり，これらの事象は互いに排反である。

事象①，②の起こる確率は，それぞれ $\frac{1}{4}p_n$，$\frac{3}{8}(1-p_n)$ であるから

$p_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{3}{8}(1-p_n)$　すなわち

$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{8}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$ と変形できるから，

$q_n=p_n-\frac{1}{3}$ とおくと

$p_1=\frac{1}{4}$ より　　$q_1=p_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$

よって，数列 $\{q_n\}$ は初項 $-\frac{1}{12}$，公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列であるから

$q_n=$　　　　　　　　ゆえに　$p_n=$

問1 1個のさいころを n 回投げるとき，2以下の目が奇数回出る確率 p_n を求めよ。

発 展　**連立漸化式**

（教科書 p.47）

例題 1　次のように定められた数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=3,\ b_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+b_n,\ b_{n+1}=a_n+4b_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

解

注意　$a_{n+1}=4a_n+b_n$ より　$b_n=a_{n+1}-4a_n$　……⑤

⑤より　$b_{n+1}=a_{n+2}-4a_{n+1}$　……⑥

⑤，⑥を $b_{n+1}=a_n+4b_n$ に代入すると，次の 3 項間の漸化式が得られる。

$a_{n+2}-8a_{n+1}+15a_n=0$

問1　次のように定められた数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。

$a_1=4,\ b_1=-1,\ a_{n+1}=4a_n-2b_n,\ b_{n+1}=-a_n+3b_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1)　$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ がすべての n について成り立つような定数 α, β の値を求めよ。

⑵　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

練習問題 A

（教科書 p.42）

1　初項が 13 で，初項から第 3 項までの和と，初項から第 11 項までの和とが等しい等差数列がある。この数列の公差を求めよ。

公差を d とおくと

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\{2\cdot 13+(3-1)d\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 11\cdot\{2\cdot 13+(11-1)d\}$$

これを解いて　$d=-2$

ゆえに　公差は $\mathbf{-2}$

2　ある等差数列の初めの 10 項の和が 100，次の 10 項の和が 200 であるという。その次の 10 項の和を求めよ。

初項を a，公差を d とおくと

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\{2a+(10-1)d\}=100$$

すなわち　$2a+9d=20$　……①

$$\frac{1}{2}\cdot 20\cdot\{2a+(20-1)d\}=100+200$$

すなわち　$2a+19d=30$　……②

①，②を連立させて解くと　$a=\frac{11}{2}$，$d=1$

ゆえに，求めるその次の 10 項の和は

$$\frac{1}{2}\cdot 30\cdot\left\{2\cdot\frac{11}{2}+(30-1)\cdot 1\right\}-(100+200)$$

$$=600-300=\mathbf{300}$$

3　2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項がそれぞれ $a_n=9n-8$, $b_n=6n+1$ であるとき，この 2 つの数列に共通に含まれる項を並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。また，この数列の初項から第 10 項までの和を求めよ。

$a_l=b_m$ とすると　$9l-8=6m+1$

よって　$9(l-1)=6m$

$3(l-1)=2m$

2 と 3 は互いに素で，$l-1\geqq 0$，$m\geqq 1$ であるから

$l-1=2k$，$m=3k$　(k は正の整数)

と表される。

よって，数列 $\{c_n\}$ の第 n 項は数列 $\{b_n\}$ の第 $3n$項に一致する。

したがって

$$c_n=6\cdot 3n+1=\mathbf{18n+1}$$

また，数列 $\{c_n\}$ は等差数列であるから，初項から第 10 項までの和を S_{10} とすると

$$S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(c_1+c_{10})$$

$$=5\cdot(19+181)$$

$$=\mathbf{1000}$$

(注)　数列 $\{c_n\}$ の第 n 項は数列 $\{a_n\}$ の第$2n+1$項に一致する。これを用いても

$$c_n=9(2n+1)-8=18n+1$$

を求めることができる。

〔別解〕数列 $\{a_n\}$ は

1，10，19，28，37，46，55，64，73，…

数列 $\{b_n\}$ は

7，13，19，25，31，37，43，49，55，61，…

したがって，数列 $\{c_n\}$は，初項が 19，公差が $\{a_n\}$, $\{b_n\}$の公差 9 と 6 の最小公倍数 18 の等差数列であることがわかる。このことから

$$c_n=19+(n-1)\cdot 18=18n+1$$

4　等比数列をなす 3 つの数 $1, r, r^2$ を並べかえると等差数列になった。
このとき，r の値を求めよ。ただし，$r<0$ とする。

$r<0$，$0<1$，$0<r^2$ であるから，3 つの数1，r，r^2 を等差数列になるように小さい方から順に並べると，その並びは

r，1，r^2　　または　　r，r^2，1

である。

(i)　r，1，r^2 がこの順に等差数列となるとき

$2=r+r^2$

これを解いて　　$r=-2,\ 1$

$r<0$ より　　$r=-2$

(ii)　r，r^2，1 がこの順に等差数列となるとき

$2r^2=r+1$

これを解いて　　$r=-\dfrac{1}{2},\ 1$

$r<0$ より　　$r=-\dfrac{1}{2}$

よって，(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{r=-2,\ -\dfrac{1}{2}}$

5　次の和を求めよ。

(1)　$1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1$

この数列の第 k 項は $k\{n-(k-1)\}$ と表されるから，求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\{n-(k-1)\} &= \sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}\\ &= -\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k\\ &= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+1)\}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

(2)　$1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

この数列の第 k 項は

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+k}=\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\frac{2}{k(k+1)}$$

と表されるから，求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)} &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= 2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\ &= 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\boldsymbol{\frac{2n}{n+1}}\end{aligned}$$

6 数列 $2\cdot 3,\ 4\cdot 3^2,\ 6\cdot 3^3,\ 8\cdot 3^4,\ 10\cdot 3^5,\ \cdots$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

一般項は $2n\cdot 3^n$ であり

$$S_n = 2\cdot 3 + 4\cdot 3^2 + 6\cdot 3^3 + \cdots + 2n\cdot 3^n \quad \cdots\cdots①$$

①の両辺に 3 を掛けて

$$3S_n = \qquad 2\cdot 3^2 + 4\cdot 3^3 + \cdots + (2n-2)\cdot 3^n + 2n\cdot 3^{n+1} \quad \cdots\cdots②$$

① − ②より

$$\begin{aligned}-2S_n &= 2(3+3^2+3^3+\cdots+3^n) - 2n\cdot 3^{n+1}\\ &= 2\cdot\frac{3(3^n-1)}{3-1} - 2n\cdot 3^{n+1}\\ &= 3^{n+1} - 3 - 2n\cdot 3^{n+1}\\ &= (1-2n)\cdot 3^{n+1} - 3\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{S_n = \frac{3}{2}\{(2n-1)\cdot 3^n + 1\}}$

7 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ \cdots$

数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a_n} &= 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1}\\ &= \frac{1\cdot(10^n-1)}{10-1} = \boldsymbol{\frac{1}{9}(10^n-1)}\end{aligned}$$

また，求める和 S_n は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S_n} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{9}(10^k-1)\\ &= \frac{1}{9}\left(\sum_{k=1}^{n}10^k - \sum_{k=1}^{n}1\right)\\ &= \frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1} - n\right\}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{81}(10^{n+1} - 9n - 10)}\end{aligned}$$

8 n を 2 以上の自然数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

この不等式を①とする。

〔1〕 $n=2$ のとき

$$左辺 = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2} = \frac{5}{4},\quad 右辺 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

ゆえに　左辺 < 右辺　　よって，①は $n=2$ のとき成り立つ。

〔2〕 $k \geqq 2$ とし，①が $n=k$ のとき成り立つ，すなわち

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k} \quad \cdots\cdots②$$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき，①の左辺を②を用いて変形すると

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \quad \cdots\cdots③$$

次に，$2-\dfrac{1}{k+1}$ と $2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}$ を比べる。ここで，$k \geqq 2$ であるから

$$\begin{aligned}\left(2-\frac{1}{k+1}\right) - \left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\} &= -\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{-k(k+1)+(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}\\ &= \frac{1}{k(k+1)^2} > 0\end{aligned}$$

すなわち　$2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2} < 2-\dfrac{1}{k+1}$　……④

③，④より

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

となり，①は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，n が 2 以上の自然数のとき①が成り立つ。

〔別解〕$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} &< 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\ &= 1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\ &= 1+1-\frac{1}{n} = 2-\frac{1}{n}\end{aligned}$$

9　数列 $1,\ 1+2+1,\ 1+2+3+2+1,\ 1+2+3+4+3+2+1,\ \cdots$ がある。

与えられた数列を $\{a_n\}$ とする。

(1)　この数列の各項を順次計算することにより，一般項を推定せよ。

与えられた条件より

$a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=9,\ a_4=16,\ \cdots$

となり，一般項は

$\boldsymbol{a_n=n^2}$　　……①

となると推定できる。

(2)　数学的帰納法を用いて，(1)で推定した式が正しいことを証明せよ。

〔1〕　$n=1$ のときは，$a_1=1$ となり①は成り立つ。

〔2〕　$n=k$ のとき①が成り立つ，すなわち

$a_k=k^2$

と仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k+1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1 \\ &= \{1+2+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+2+1\}+k+(k+1) \\ &= a_k+k+k+1 \\ &= k^2+2k+1=(k+1)^2 \end{aligned}$$

したがって，①は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

〔1〕,〔2〕より，一般項が $a_n=n^2$ であることが証明された。

練習問題B

（教科書 p.43）

10　-5 と 15 の間に n 個の数を並べて，初項 -5，末項 15 の等差数列をつくる。
この等差数列の総和が 100 となるとき，n の値を求めよ。

初項 -5，末項 15，項数 $n+2$ の等差数列の和が 100 であるから

$$\frac{1}{2}(n+2)(-5+15)=100$$

これを解いて　$\boldsymbol{n=18}$

11　$4,\ a,\ b$ および $b,\ c,\ 64$ がこの順でそれぞれ等比数列となり，$a,\ b,\ c$ がこの順で等差数列になるようにしたい。$a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

2 つの等比数列の条件より，$a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$である。

4，a，b がこの順に等比数列となるから

$a^2=4b$　……①

b，c，64 がこの順に等比数列となるから

$c^2=64b$　……②

a，b，c がこの順に等差数列となるから

$2b=a+c$　……③

①，②から b を消去すると

$16a^2=c^2$

よって　$c=\pm 4a$

(i)　$c=4a$ のとき

$c=4a$ を③に代入して　$2b=5a$……④

①，④を連立させて解くと　$a^2=10a$

$a\neq 0$ より　$a=10$，$b=25$，$c=40$

(ii)　$c=-4a$ のとき

$c=-4a$ を③に代入して

$2b=-3a$　……⑤

①，⑤を連立させて解くと　$a^2=-6a$

$a\neq 0$ より　$a=-6$，$b=9$，$c=24$

(i)，(ii) より

$\boldsymbol{a=10,\ b=25,\ c=40}$　または$\boldsymbol{a=-6,\ b=9,\ c=24}$

12　$\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ を計算せよ。
また，その結果を利用して，次の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}}=\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{k(k+1)(k+2)}}$$

求める和を S_nとすると

$$2S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$$

13 数列 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \cdots$

について，次の問に答えよ。

この数列を，次のような群に分ける

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \,\Big|\, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \,\Big|\, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \,\Big|\, \frac{1}{6}, \cdots$$

第 1 群　第 2 群　第 3 群　第 4 群

すなわち，第 k 群は $k+1$ 個の項を含み

分母は　$k+2$

分子は　$1, 2, \cdots, k+1$

である。

(1)　$\frac{1}{17}$ は，この数列の第何項か。

$\frac{1}{17}$ は，第 15 群の 1 番目の項である。

第 1 群から第 14 群までの項数は

$2+3+4+\cdots+15$

$= \frac{1}{2}\cdot 15\cdot(15+1)-1 = 119$

よって，$\frac{1}{17}$ はこの数列の第 **120** 項である。

(2)　この数列の第 200 項は何か。

第 1 群から第 $n-1$ 群までの項数は

$2+3+4+\cdots+n$

$= \frac{1}{2}n(n+1)-1 = \frac{1}{2}(n^2+n-2)$

第 1 群から第 n 群までの項数は

$2+3+4+\cdots+(n+1)$

$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1 = \frac{1}{2}(n^2+3n)$

よって，第 200 項が第 n 群に含まれるとすると

$\frac{1}{2}(n^2+n-2) < 200 \leqq \frac{1}{2}(n^2+3n)$

したがって　$n = 19$

すなわち，第 200 項は第 19 群に含まれる。

ゆえに，第 200 項の分母は 21 である。

また，第 1 群から第 18 群までの項数は

$\frac{1}{2}(18^2+3\cdot 18) = 189$

$200-189 = 11$

よって，第 200 項の分子は 11 である。

ゆえに，第 200 項は $\boldsymbol{\frac{11}{21}}$ である。

14　$a_1=5,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ。

$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$ であるから，ある n について $a_{n+1}=0$ であるとすると

$a_n=0$

これをくり返すと，$a_1=0$ となり，$a_1=5$ に反する。

よって，すべての n に対して，$a_n\neq 0$ となる。

$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+3}$ より

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}=\frac{3}{a_n}+2$　……①

$b_n=\frac{1}{a_n}$ より　$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}}$

これらを①に代入して　$\boldsymbol{b_{n+1}=3b_n+2}$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\alpha=3\alpha+2$ より　$\alpha=-1$

$b_{n+1}=3b_n+2$ を変形して

$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

$c_n=b_n+1$ とおくと

$c_{n+1}=3c_n$

$c_1=b_1+1=\frac{1}{5}+1=\frac{6}{5}$

よって，数列 $\{c_n\}$ は初項 $\frac{6}{5}$，公比 3 の等比数列であるから

$c_n=\frac{6}{5}\cdot 3^{n-1}=\frac{2}{5}\cdot 3^n$

よって

$b_n=c_n-1=\frac{2}{5}\cdot 3^n-1=\frac{2\cdot 3^n-5}{5}$

したがって　$a_n=\frac{1}{b_n}=\boldsymbol{\frac{5}{2\cdot 3^n-5}}$

15　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2a_n+1$ で表されるとき，a_n を n の式で表せ。

$a_1=S_1=2a_1+1$ より　$a_1=-1$

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$

$=(2a_{n+1}+1)-(2a_n+1)$

$=2a_{n+1}-2a_n$

よって　$a_{n+1}=2a_n$

したがって，数列 $\{a_n\}$ は初項 -1，公比 2 の等比数列であるから

$a_n=(-1)\cdot 2^{n-1}=\boldsymbol{-2^{n-1}}$

16　平面上に n 個の円があって，どの 2 つの円も異なる 2 点で交わり，また，どの 3 つの円も同一の点で交わっていない。このとき，これらの円によって平面はいくつの部分に分けられているか。

まず，$n=1$ のとき，1 個の円が平面を 2 つの部分に分けるから

$a_1=2$　……①

問題の条件を満たす n 個の円に加えて，さらに $n+1$ 個目の円をかく。この $n+1$ 個目の円は，もとからある n 個の円それぞれと 2 個の点で交わり，これら合計 $2n$ 個の点によって，$n+1$ 個目の円は $2n$ 個の弧に分けられる。この $2n$ 個の弧が新しい境界線となり，分けられる平面の部分の数は $2n$ 個だけ増加する。

したがって　$a_{n+1}=a_n+2n$

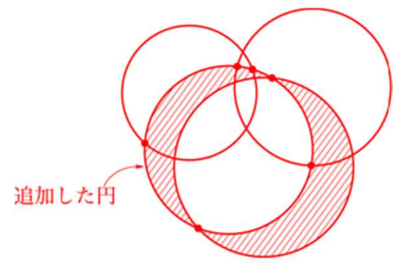
ゆえに　$a_{n+1}-a_n=2n$　……②

①，②より，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k$$

$$=2+2\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$$=2+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n=n^2-n+2$$



$n=3$ のとき

$a_1=2$ であるから，$a_n=n^2-n+2$ は $n=1$ のときも成り立つ。

よって　$\boldsymbol{(n^2-n+2)}$ **個**

発 展　**3 項間の漸化式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$**

（教科書 p.44）

例題 1　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=2,\ a_2=3,\ a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

解　漸化式 $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ は，2 次方程式 $x^2=5x-6$ を満たす解 $x=2,\ 3$ を用いて

$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$ ……①

$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$ ……②

と変形される。

①より，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は公比３の等比数列であるから

$$\begin{aligned}a_{n+1}-2a_n&=3^{n-1}(a_2-2a_1)\\&=3^{n-1}(3-2\cdot 2)\\&=-3^{n-1}\end{aligned}$$

すなわち　$a_{n+1}-2a_n=-3^{n-1}$ ……③

②より，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は公比 2 の等比数列であるから

$$\begin{aligned}a_{n+1}-3a_n&=2^{n-1}(a_2-3a_1)\\&=2^{n-1}(3-3\cdot 2)=-3\cdot 2^{n-1}\end{aligned}$$

すなわち　$a_{n+1}-3a_n=-3\cdot 2^{n-1}$ ……④

よって，③から④を引いて

$a_n=3\cdot 2^{n-1}-3^{n-1}$

問1　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

漸化式 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ は，2 次方程式$x^2=3x-2$ を満たす解 $x=1,\ 2$ を用いて

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$ ……①

$a_{n+2}-2a_{n+1}=a_{n+1}-2a_n$ ……②

と変形される。

①より，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は公比 2 の等比数列であるから

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=2^{n-1}(a_2-a_1)\\&=2^{n-1}(3-1)=2\cdot 2^{n-1}\\&=2^n\end{aligned}$$

すなわち　$a_{n+1}-a_n=2^n$ ……③

②より，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は公比 1 の等比数列であるから

$$\begin{aligned}a_{n+1}-2a_n&=1^{n-1}(a_2-2a_1)\\&=1^{n-1}(3-2\cdot 1)=1\end{aligned}$$

すなわち　$a_{n+1}-2a_n=1$ ……④

よって，③から④を引いて

$\boldsymbol{a_n=2^n-1}$

(2)　$a_1=2,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$　　　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

漸化式 $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ は，2 次方程式 $x^2=x+6$ を満たす解 $x=-2,\ 3$ を用いて

$a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n)$……①

$a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n)$……②

と変形される。

①より，数列 $\{a_{n+1}+2a_n\}$ は公比 3 の等比数列であるから

$$\begin{aligned}a_{n+1}+2a_n&=3^{n-1}(a_2+2a_1)\\&=3^{n-1}(1+2\cdot2)\\&=5\cdot3^{n-1}\end{aligned}$$

すなわち

$a_{n+1}+2a_n=5\cdot3^{n-1}$　　……③

②より，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は公比 -2 の等比数列であるから

$$\begin{aligned}a_{n+1}-3a_n&=(-2)^{n-1}(a_2-3a_1)\\&=(-2)^{n-1}(1-3\cdot2)\\&=-5\cdot(-2)^{n-1}\end{aligned}$$

すなわち

$a_{n+1}-3a_n=-5\cdot(-2)^{n-1}$　　……④

よって，③から④を引いて

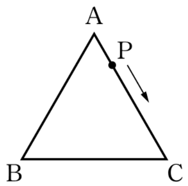
$5a_n=5\{3^{n-1}+(-2)^{n-1}\}$

ゆえに　　$\boldsymbol{a_n=3^{n-1}+(-2)^{n-1}}$

参考　確率と漸化式

（教科書 p.46）

例 1 点 P は△ ABC の 1 つの頂点に達してから 1 秒を経過するごとに，確率 $\frac{1}{4}$ でその点に留まり，確率 $\frac{3}{8}$ で時計回りに，確率 $\frac{3}{8}$ で時計回りとは逆向きに隣の点に移動する。頂点 A を出発した点 P が，n 秒後に頂点 A にある確率 p_n を求めてみよう。



頂点 A を出発した点 P が，$(n+1)$ 秒後に頂点 A にあるという事象は

① n 秒後に頂点 A にあり，$(n+1)$ 秒後も頂点 A にある

② n 秒後に頂点 A になく，$(n+1)$ 秒後に頂点 A に移動する

の和事象であり，これらの事象は互いに排反である。

事象①，②の起こる確率は，それぞれ $\frac{1}{4}p_n$，$\frac{3}{8}(1-p_n)$ であるから

$p_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{3}{8}(1-p_n)$　すなわち　$p_{n+1}=-\frac{1}{8}p_n+\frac{3}{8}$

$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{8}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$ と変形できるから，

$q_n=p_n-\frac{1}{3}$ とおくと　$q_{n+1}=-\frac{1}{8}q_n$

$p_1=\frac{1}{4}$ より　$q_1=p_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$

よって，数列 $\{q_n\}$ は初項 $-\frac{1}{12}$，公比 $-\frac{1}{8}$ の等比数列であるから

$q_n=-\frac{1}{12}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$　ゆえに　$p_n=q_n+\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$

問1 1 個のさいころを n 回投げるとき，2 以下の目が奇数回出る確率 p_n を求めよ。

1 個のさいころを $(n+1)$ 回投げるとき，2 以下の目が奇数回出るという事象は

① n 回投げたとき，2 以下の目が奇数回出て，$(n+1)$ 回目は 3 以上の目が出る

② n 回投げたとき，2 以下の目が偶数回出て，$(n+1)$ 回目は 2 以下の目が出る

の和事象であり，これらの事象は互いに排反である。

事象①，②の起こる確率は，それぞれ $\frac{2}{3}p_n$，$\frac{1}{3}(1-p_n)$ であるから

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}(1-p_n)$$

すなわち　$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}$

$p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$ と変形できるから，

$q_n=p_n-\frac{1}{2}$ とおくと　$q_{n+1}=\frac{1}{3}q_n$

$p_1=\frac{1}{3}$ より　$q_1=p_1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$

よって，数列$\{q_n\}$は初項 $-\frac{1}{6}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$q_n=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

ゆえに

$$p_n=q_n+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$$

発展　連立漸化式

（教科書 p.47）

例題 1　次のように定められた数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=3,\ b_1=1,\ a_{n+1}=4a_n+b_n,\ b_{n+1}=a_n+4b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

解　与えられた漸化式より

$a_{n+1}+b_{n+1}=(4a_n+b_n)+(a_n+4b_n)=5(a_n+b_n)$　……①

$a_{n+1}-b_{n+1}=(4a_n+b_n)-(a_n+4b_n)=3(a_n-b_n)$　……②

①より，数列 $\{a_n+b_n\}$ は公比 5 の等比数列であるから

$a_n+b_n=5^{n-1}(a_1+b_1)=5^{n-1}(3+1)=4\cdot 5^{n-1}$

すなわち　$a_n+b_n=4\cdot 5^{n-1}$　……③

②より，数列 $\{a_n-b_n\}$ は公比 3 の等比数列であるから

$a_n-b_n=3^{n-1}(a_1-b_1)=3^{n-1}(3-1)=2\cdot 3^{n-1}$

すなわち　$a_n-b_n=2\cdot 3^{n-1}$　……④

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項は，③，④により

$a_n=2\cdot 5^{n-1}+3^{n-1}$

$b_n=2\cdot 5^{n-1}-3^{n-1}$

注意　$a_{n+1}=4a_n+b_n$ より $b_n=a_{n+1}-4a_n$　……⑤

⑤より　$b_{n+1}=a_{n+2}-4a_{n+1}$　……⑥

⑤，⑥を $b_{n+1}=a_n+4b_n$ に代入すると，次の 3 項間の漸化式が得られる。

$a_{n+2}-8a_{n+1}+15a_n=0$

問1　次のように定められた数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。

$a_1=4,\ b_1=-1,\ a_{n+1}=4a_n-2b_n,\ b_{n+1}=-a_n+3b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1)　$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ がすべての n について成り立つような定数 α, β の値を求めよ。

与えられた漸化式を $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}$ に代入すると

$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}$

$=(4a_n-2b_n)+\alpha(-a_n+3b_n)$

$=(-\alpha+4)a_n+(3\alpha-2)b_n$

よって，$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ がすべての n について成り立つためには

$\begin{cases}\beta=-\alpha+4 & \cdots\cdots① \\ \alpha\beta=3\alpha-2 & \cdots\cdots②\end{cases}$

であればよい。

①を②に代入して

$\alpha(-\alpha+4)=3\alpha-2$

$\alpha^2-\alpha-2=0$

$(\alpha-2)(\alpha+1)=0$

$\alpha=2,\ -1$

①より　$\alpha=2$ のとき　$\beta=2$

$\alpha=-1$ のとき　$\beta=5$

よって，$a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ がすべての n で成り立つ α，β の値の組は

$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta)=(2,\ 2),\ (-1,\ 5)}$

(2)　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) より

$$a_{n+1}+2b_{n+1}=2(a_n+2b_n) \quad \cdots\cdots ③$$

$$a_{n+1}-b_{n+1}=5(a_n-b_n) \quad \cdots\cdots ④$$

③より，数列 $\{a_n+2b_n\}$ は公比 2 の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_n+2b_n &= 2^{n-1}(a_1+2b_1) \\ &= 2^{n-1}\{4+2\cdot(-1)\} \\ &= 2^{n-1}\cdot 2 = 2^n \end{aligned}$$

すなわち　$a_n+2b_n=2^n$　$\cdots\cdots$⑤

④より，数列 $\{a_n-b_n\}$ は公比 5 の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_n-b_n &= 5^{n-1}(a_1-b_1) \\ &= 5^{n-1}\{4-(-1)\} \\ &= 5^{n-1}\cdot 5 = 5^n \end{aligned}$$

すなわち　$a_n-b_n=5^n$　$\cdots\cdots$⑥

⑤ +2× ⑥より

$$3a_n=2^n+2\cdot 5^n$$

$$\boldsymbol{a_n=\frac{2^n+2\cdot 5^n}{3}}$$

⑤ − ⑥より

$$3b_n=2^n-5^n$$

$$\boldsymbol{b_n=\frac{2^n-5^n}{3}}$$