[Level Up]

（教科書 p.42）

1　次の 2 次曲線の方程式を求め，その概形をかけ。

(1)　頂点が $(-1,\ 2)$，準線が $x = 2$ の放物線

(2)　焦点が $(2,\ 4)$，$(2,\ -2)$，短軸の長さが 8 の楕円

(3)　焦点が $(1,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ で点 $(3,\ 4)$ を通る双曲線

２　次の 2 次曲線の焦点を求めよ。

(1)　楕円 $9x^2-54x+25y^2+100y-44=0$

(2)　放物線 $y^2-2y+8x+9=0$

３　双曲線 $x^2-y^2=16$ に，点 $(0,\ 3)$ から引いた接線の方程式を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

4　円 $x^2+(y-2)^2=1$ に外接し，x 軸に接する円の中心 P の軌跡は放物線であることを示し，その焦点と準線を求めよ。

5　原点を O とし，点 P から直線 $x=-5$ へ引いた垂線を PH とする。
OP : PH が次のときの点 P の軌跡をそれぞれ求めよ。

(1)　2 : 3

(2)　1 : 1

(3)　3 : 2

6　双曲線 $x^2-4y^2=4$ 上の点で点 $(5,\ 0)$ からの距離が最小の点の座標と，そのときの距離を求めよ。

7　次の式の媒介変数 t を消去して，x と y の関係式を求めよ。

(1) $\begin{cases} x=\frac{2}{\cos t} \\ y=3\tan t \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=t-\frac{1}{t} \\ y=t^2+\frac{1}{t^2} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=\frac{1}{1+t^2} \\ y=\frac{t}{1+t^2} \end{cases}$

８　放物線 $y = x^2 + 2tx - 2t$ の頂点 P は，t の値が変化するとき，どのような曲線上を動くか。

９　楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ と直線 $y = \frac{1}{2}x + k$ が異なる 2 つの共有点 P，Q をもつとき，線分 PQ の中点 R の軌跡を求めよ。

１０　2 点 A，B の極座標が次のように与えられたとき，線分 AB の長さを求めよ。

(1)　$\mathrm{A}\left(4,\ \frac{\pi}{6}\right)$，$\mathrm{B}\left(3,\ \frac{2}{3}\pi\right)$

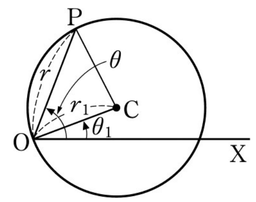
(2)　$\mathrm{A}\left(2,\ \frac{\pi}{12}\right)$，$\mathrm{B}\left(2\sqrt{2},\ \frac{\pi}{3}\right)$

１１　極を O，2 点 P_1，P_2 の極座標をそれぞれ $(r_1,\ \theta_1)$，$(r_2,\ \theta_2)$ とするとき，次のことを示せ。

(1)　$\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2 = \frac{1}{2}|r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)|$

(2)　2 点 P_1，P_2 の直交座標をそれぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とするとき
$\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2 = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$

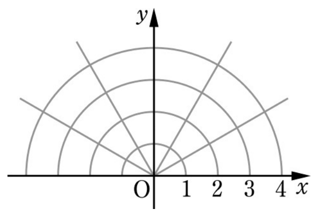
１２　中心 C の極座標が $(r_1,\ \theta_1)$ で，極を通る円の極方程式を求めよ。



１３　極方程式 $r=2(1+\cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で表される曲線について，次の問に答えよ。

(1)　下の表を完成させ，曲線の概形をかけ。

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
r							



(2)　この曲線上の点の x 座標の最大値と最小値を求めよ。

[Level Up]

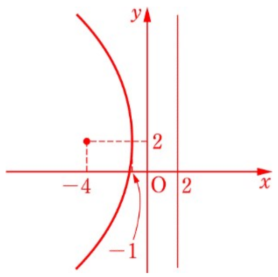
（教科書 p.42）

1　次の 2 次曲線の方程式を求め，その概形をかけ。

(1)　頂点が $(-1,\ 2)$，準線が $x=2$ の放物線

求める放物線を x 軸方向に 1，y 軸方向に-2 だけ平行移動すると，頂点が原点，準線が $x=3$ の放物線 $y^2=4\cdot(-3)x=-12x$ となる。

よって，求める放物線の方程式はこれを x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した $\boldsymbol{(y-2)^2=-12(x+1)}$ であり，その概形は次の図のようになる。



(2)　焦点が $(2,\ 4)$，$(2,\ -2)$，短軸の長さが 8 の楕円

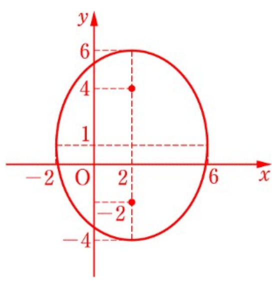
求める楕円を x 軸方向に -2，y 軸方向に-1 だけ平行移動すると，焦点が $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$ となる。

この楕円の方程式を $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ とおくと，$\sqrt{b^2-a^2}=3$，$2a=8$ よって，$a=4$，$b=5$であるから，その方程式は

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

よって，求める楕円の方程式はこの楕円を x軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した

$\boldsymbol{\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=1}$ であり，その概形は次の図のようになる。



(3)　焦点が $(1,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ で点 $(3,\ 4)$ を通る双曲線

求める双曲線を x 軸方向に 2 だけ平行移動すると，焦点が $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ となる。

この双曲線の方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ とおくと

$\sqrt{a^2+b^2}=3$　すなわち　$a^2+b^2=9$　……①

また，点 $(5,\ 4)$ を通るから　$\frac{25}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1$

分母をはらって

$a^2b^2=25b^2-16a^2$　……②

①，②より，b^2 を消去し整理すると

$a^4-50a^2+225=0$

$(a^2-5)(a^2-45)=0$

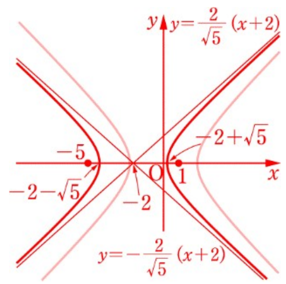
$a^2<9$ であるから　$a^2=5$

このとき，①より　$b^2=4$

双曲線の方程式は　$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$

よって，求める双曲線の方程式はこの双曲線を x 軸方向に -2 だけ平行移動した

$\boldsymbol{\frac{(x+2)^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1}$ であり，その概形は次の図のようになる。



2　次の2次曲線の焦点を求めよ。

(1)　楕円 $9x^2-54x+25y^2+100y-44=0$

$9x^2-54x+25y^2+100y-44=0$

$9(x-3)^2+25(y+2)^2=225$

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$$

これは楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動したものである。

楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ の焦点は $(-4,\ 0)$，$(4,\ 0)$ であるから，求める焦点はこれらを x 軸方向に3，y 軸方向に -2 だけ平行移動した $(\mathbf{-1},\ \mathbf{-2})$，$(\mathbf{7},\ \mathbf{-2})$ である。

(2)　放物線 $y^2-2y+8x+9=0$

$y^2-2y+8x+9=0$

$(y-1)^2=-8(x+1)$

これは，放物線 $y^2=-8x$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に1だけ平行移動したものである。

放物線 $y^2=-8x$ の焦点は，$(-2,\ 0)$ であるから，求める焦点はこれを x 軸方向に -1，y 軸方向に1だけ平行移動した $(\mathbf{-3},\ \mathbf{1})$ である。

3　双曲線 $x^2-y^2=16$ に，点 $(0,\ 3)$ から引いた接線の方程式を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

求める直線の方程式を $y=mx+3$ とおく。

$$\begin{cases} y=mx+3 & \cdots\cdots① \\ x^2-y^2=16 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①を②に代入して　$x^2-(mx+3)^2=16$

すなわち

$(1-m^2)x^2-6mx-25=0$　……③

$1-m^2=0$ のとき，直線①は双曲線②の接線にはならないから　$1-m^2\neq 0$

よって　$m\neq\pm 1$

③の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=9m^2+25(1-m^2)$$

$$=-(4m+5)(4m-5)$$

直線①と双曲線②が接するとき，$D=0$ であるから　$m=\pm\frac{5}{4}$

(i)　$m=\frac{5}{4}$ のとき

③の解は　$-\frac{9}{16}x^2-\frac{15}{2}x-25=0$

$\left(\frac{3}{4}x+5\right)^2=0$ より　$x=-\frac{20}{3}$

このとき，①より

$$y=\frac{5}{4}\cdot\left(-\frac{20}{3}\right)+3=-\frac{16}{3}$$

(ii)　$m=-\frac{5}{4}$ のとき

③の解は　$x=\frac{20}{3}$，$y=-\frac{16}{3}$

したがって，接線の方程式と接点の座標は

$m=\frac{5}{4}$ のとき

接線　$\boldsymbol{y=\frac{5}{4}x+3}$

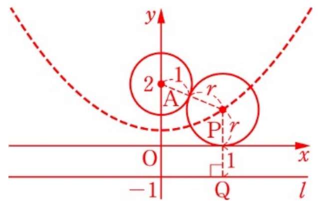
接点　$\left(\mathbf{-\frac{20}{3}},\ \mathbf{-\frac{16}{3}}\right)$

$m=-\frac{5}{4}$ のとき

接線　$\boldsymbol{y=-\frac{5}{4}x+3}$

接点　$\left(\mathbf{\frac{20}{3}},\ \mathbf{-\frac{16}{3}}\right)$

4　円 $x^2+(y-2)^2=1$ に外接し，x 軸に接する円の中心 P の軌跡は放物線であることを示し，その焦点と準線を求めよ。



円 $x^2+(y-2)^2=1$ の中心を $A(0,\ 2)$ とおく。

円の半径が 1 であることに着目して，直線 $y=-1$ を l とする。

点 P を中心とし，円と x 軸の両方に接する円の半径を r，P から l に下ろした垂線の足を Q とすると

$PA=PQ=1+r$

より，点 P は定点 A と，A を通らない直線 l とから等距離にあるから，その軌跡は点 A を焦点，l を準線とする放物線である。

焦点は $(0,\ 2)$，準線は $y=-1$

5　原点を O とし，点 P から直線 $x=-5$ へ引いた垂線を PH とする。
OP : PH が次のときの点 P の軌跡をそれぞれ求めよ。

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$OP=\sqrt{x^2+y^2}$，$PH=|x+5|$

(1)　2 : 3

OP : PH = 2 : 3 より

$3OP=2PH$

$3\sqrt{x^2+y^2}=2|x+5|$

両辺を 2 乗して整理すると

$5(x-4)^2+9y^2=180$

よって，求める点 P の軌跡は，**楕円 $\frac{(x-4)^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$** である。

(2)　1 : 1

OP : PH = 1 : 1 より

$OP=PH$

$\sqrt{x^2+y^2}=|x+5|$

両辺を 2 乗して整理すると

$y^2=10x+25$

よって，求める点 P の軌跡は，**放物線 $y^2=10\left(x+\frac{5}{2}\right)$** である。

(3)　3 : 2

OP : PH = 3 : 2 より

$2OP=3PH$

$2\sqrt{x^2+y^2}=3|x+5|$

両辺を 2 乗して整理すると

$5(x+9)^2-4y^2=180$

よって，求める点 P の軌跡は，**双曲線 $\frac{(x+9)^2}{36}-\frac{y^2}{45}=1$** である。

6　双曲線 $x^2-4y^2=4$ 上の点で点 $(5,\ 0)$ からの距離が最小の点の座標と，そのときの距離を求めよ。

双曲線 $x^2-4y^2=4$ ……①上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，点 $(5,\ 0)$ を A とする。

$x^2-4=4y^2 \geqq 0$ より

$x \leqq -2,\ 2 \leqq x$　　……②

このとき　　$\mathrm{AP}^2=(x-5)^2+y^2$

ここで，点 P は①上にあるから

$$\mathrm{AP}^2=(x-5)^2+\frac{x^2-4}{4}=\frac{5}{4}(x-4)^2+4$$

よって，$x=4$ ($x=4$ は②を満たす)のとき，AP^2 が最小となり，AP の最小値は，$\sqrt{4}=2$ となる。

このとき　　$y^2=\frac{x^2-4}{4}=\frac{16-}{4}=3$

すなわち　　$y=\pm\sqrt{3}$

ゆえに，求める点の座標は

$(4,\ \sqrt{3})$と$(4,\ -\sqrt{3})$

そのときの距離は **2** である。

7　次の式の媒介変数 t を消去して，x と y の関係式を求めよ。

(1) $\begin{cases} x=\frac{2}{\cos t} \\ y=3\tan t \end{cases}$

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{\cos t} & \cdots\cdots① \\ y=3\tan t & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①より　　$\frac{1}{\cos t}=\frac{x}{2}$

②より　　$\tan t=\frac{y}{3}$

$\frac{1}{\cos^2 t}-\tan^2 t=1$ に代入すると

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$$

したがって　　$\boldsymbol{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1}$

(2) $\begin{cases} x=t-\frac{1}{t} \\ y=t^2+\frac{1}{t^2} \end{cases}$

$$\begin{cases} x=t-\dfrac{1}{t} \\ y=t^2+\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$$

$$x^2=\left(t-\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2=y-2$$

したがって　　$\boldsymbol{y=x^2+2}$

(3) $\begin{cases} x=\frac{1}{1+t^2} \\ y=\frac{t}{1+t^2} \end{cases}$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{1+t^2} \\ y=\frac{t}{1+t^2} \end{cases}$$

$x>0$ より

$1+t^2=\frac{1}{x}$　すなわち　$t^2=\frac{1}{x}-1$

ここで

$$y^2=\frac{t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{\frac{1}{x}-1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}=x-x^2$$

したがって　　$\boldsymbol{x^2+y^2=x}$

(ただし，$\boldsymbol{x \neq 0}$)

８　放物線 $y=x^2+2tx-2t$ の頂点 P は，t の値が変化するとき，どのような曲線上を動くか。

$$y=(x+t)^2-t^2-2t$$

頂点 P の座標を $(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{cases} x=-t \\ y=-t^2-2t \end{cases}$$

よって

$$y=-x^2+2x$$

したがって，頂点 P は，

放物線 $y=-x^2+2x$ 上を動く。

９　楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ と直線 $y=\frac{1}{2}x+k$ が異なる２つの共有点 P，Q をもつとき，線分 PQ の中点 R の軌跡を求めよ。

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ y=\dfrac{1}{2}x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①，②から，y を消去して

$$x^2+2kx+2k^2-2=0 \quad \cdots\cdots ③$$

２次方程式③の実数解が共有点 P，Q の x 座標である。

③の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=k^2-(2k^2-2)$$
$$=-k^2+2$$

よって，２次方程式③が異なる２個の実数解をもつ条件は　　$D>0$

すなわち　　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$　　……④

ここで，P，Q の x 座標をそれぞれ p，q とすると，解と係数の関係により

$$p+q=-2k$$

線分 PQ の中点 R の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=\frac{p+q}{2}=\frac{-2k}{2}=-k \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$y=\frac{x}{2}+k=\frac{-k}{2}+k=\frac{k}{2} \quad \cdots\cdots ⑥$$

⑤，⑥より k を消去して　$y=-\frac{1}{2}x$

また，④，⑤より

$$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$$

したがって，中点 R の軌跡は**直線 $y=-\frac{1}{2}x$ の $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ を満たす範囲**である。

１０　２点 A，B の極座標が次のように与えられたとき，線分 AB の長さを求めよ。

(1)　A$\left(4,\ \frac{\pi}{6}\right)$，B$\left(3,\ \frac{2}{3}\pi\right)$

$$\angle\mathrm{AOB}=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$$

三平方の定理により

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2$$
$$=4^2+3^2=25$$

ゆえに　　$\mathrm{AB}=\mathbf{5}$

(2)　A$\left(2,\ \frac{\pi}{12}\right)$，B$\left(2\sqrt{2},\ \frac{\pi}{3}\right)$

$$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$$

余弦定理により

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\angle\mathrm{AOB}$$
$$=2^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\cdot2\cdot2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=4$$

ゆえに　　$\mathrm{AB}=\mathbf{2}$

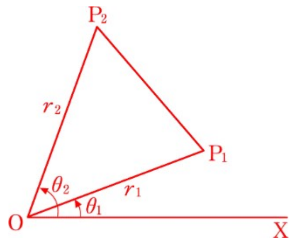
１１　極を O，2 点 P_1，P_2 の極座標をそれぞれ $(r_1,\ \theta_1)$，$(r_2,\ \theta_2)$ とするとき，次のことを示せ。

(1)　$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}|r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)|$

三角形の面積の公式より

$$\triangle OP_1P_2 = \left|\frac{1}{2}OP_1\cdot OP_2\sin(\theta_2-\theta_1)\right|$$

$$= \frac{1}{2}|r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)|$$



(2)　2 点 P_1，P_2 の直交座標をそれぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とするとき

$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

$r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)$

$= r_1r_2(\sin\theta_2\cos\theta_1-\cos\theta_2\sin\theta_1)$

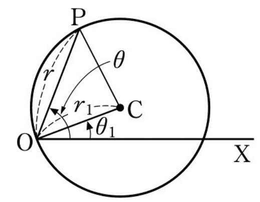
$= r_1\cos\theta_1\cdot r_2\sin\theta_2 - r_2\cos\theta_2\cdot r_1\sin\theta_1$

$= x_1y_2-x_2y_1$

ゆえに，(1)より

$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

１２　中心 C の極座標が $(r_1,\ \theta_1)$ で，極を通る円の極方程式を求めよ。



円上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とする。

$\triangle COP$ において，余弦定理により

$CP^2 = OP^2 + OC^2 - 2OP\cdot OC\cos\angle COP$

ここで，$CP = OC = r_1$，$OP = r$，$\angle COP = \theta-\theta_1$

であるから

$r_1{}^2 = r^2 + r_1{}^2 - 2rr_1\cos(\theta-\theta_1)$

よって

$r\{r-2r_1\cos(\theta-\theta_1)\} = 0$

したがって

$r = 0$　または　$r = 2r_1\cos(\theta-\theta_1)$

$r = 0$ は $r = 2r_1\cos(\theta-\theta_1)$ に含まれるから，求める極方程式は

$\boldsymbol{r = 2r_1\cos(\theta-\theta_1)}$

〔別解〕直線 OC の延長と円 C の交点を Q とすると，$\angle OPQ = \frac{\pi}{2}$ であるから

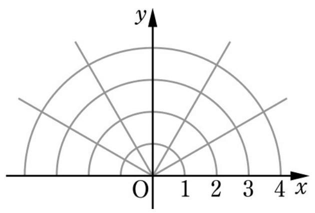
$$\cos(\theta-\theta_1) = \frac{r}{2r_1}$$

ゆえに　　$r = 2r_1\cos(\theta-\theta_1)$

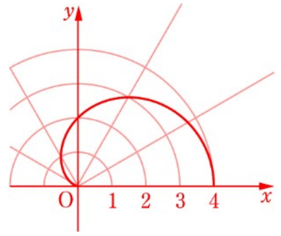
１３　極方程式 $r=2(1+\cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で表される曲線について，次の問に答えよ。

(1)　下の表を完成させ，曲線の概形をかけ。

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
r							



θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
r	$\mathbf{4}$	$\mathbf{2+\sqrt{3}}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2-\sqrt{3}}$	$\mathbf{0}$



(2)　この曲線上の点の x 座標の最大値と最小値を求めよ。

$x=r\cos\theta$

$\quad=2(1+\cos\theta)\cos\theta$

$\quad=2\cos^2\theta+2\cos\theta$

$\cos\theta=t$ とおくと　　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$-1 \leqq t \leqq 1$

$x=2t^2+2t=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

よって，$\boldsymbol{x}$ 座標の

最大値は，$t=1$，すなわち

$\theta=0$ のとき　$x=4$

最小値は，$t=-\frac{1}{2}$，すなわち

$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき　$x=-\frac{1}{2}$

以上から

最大値 4

最小値 $-\frac{1}{2}$