２節　媒介変数表示と極座標

❶ 媒介変数表示

媒介変数表示

（教科書 p.29）

一般に，平面上の曲線がある変数 t によって

（①　　　　　　　　　）

で表されるとき，これをその曲線の（②　　　　　　　　　　）といい，t を（③　　　　　　　　）という。

例1 媒介変数表示 $\begin{cases} x = 2t & \cdots\cdots ① \\ y = 1 - t^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

で表される曲線を求めてみよう。

①より，$t = \frac{x}{2}$ であるから，②に代入して　（　　　　　　　　　）

すなわち，①，②の表す曲線は　（　　　　　　　　　　　　）

問1 次の式の媒介変数 t を消去して，x と y の関係式を求めよ。

(1)　$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \end{cases}$

(2)　$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 6t \end{cases}$

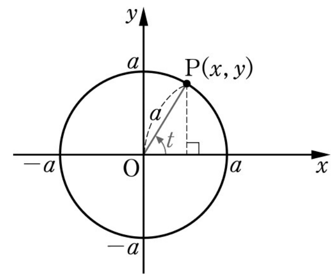
例2 右の図のような円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考えよう。

動径 OP の表す角を t とすると

（　　　　　　　　　）

と表される。

これは，（　　　　　　　　　　）の媒介変数表示である。



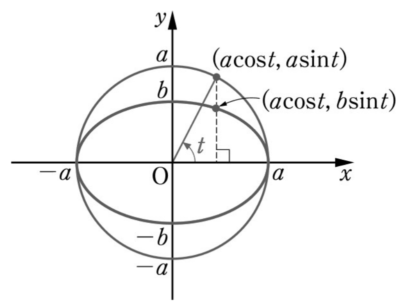
問2 円 $x^2 + y^2 = 4$ の媒介変数表示を求めよ。

例3 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の媒介変数表示を求めてみよう。

この楕円は円 $x^2 + y^2 = a^2$ を x 軸を基準にして y 軸方向に

（　　　　）倍して得られるから，媒介変数表示は

（　　　　　　　　）　……①　←— $y = \frac{b}{a} \cdot a\sin t$



問3 次の楕円の媒介変数表示を求めよ。

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

(2) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$

例題 1 媒介変数表示 $\begin{cases} x=2\cos t+4 \\ y=2\sin t+3 \end{cases}$ ……①

は，どのような曲線を表すか。

解

問4 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(1) $\begin{cases} x=3\cos t-2 \\ y=3\sin t+2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=2\cos t+1 \\ y=\sin t-1 \end{cases}$

一般に，次のことが成り立つ。

曲線の平行移動
曲線 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線は $\begin{cases} x=f(t)+p \\ y=g(t)+q \end{cases}$ である。

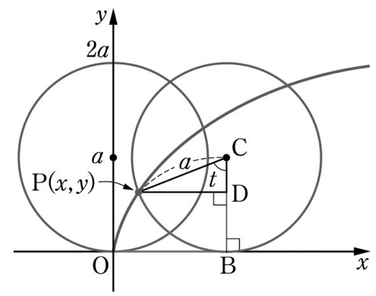
問5 中心 $(-3,\ 1)$，半径 3 の円の媒介変数表示を求めよ。

サイクロイド

（教科書 p.32）

円の半径を a，定直線を x 軸とし，円上の定点 P が原点 O の位置にあるとする。そして，その位置から，円が角 t だけ回転したときの点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

右の図において，円の中心 C から x 軸に垂線 CB を引き，点 P から直線 CB に垂線 PD を引くと



$$\mathrm{OB} = \text{弧 PB の長さ} = at$$

$$\mathrm{PD} = a\sin t$$

$$\mathrm{CD} = a\cos t$$

であるから　$x = \mathrm{OB} - \mathrm{PD} = at - a\sin t$

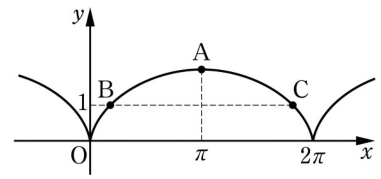
$$y = \mathrm{CB} - \mathrm{CD} = a - a\cos t$$

したがって，この円上の定点 P がえがく曲線の媒介変数表示は

（④　　　　　　　　　　　　　　）

となる。この曲線は，（⑤　　　　　　　　　　　）とよばれている。

問6 右のサイクロイドの媒介変数表示を求めよ。また，点 A，B，C の座標をそれぞれ求めよ。



❷ 極座標と極方程式

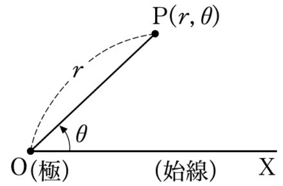
極座標と直交座標

（教科書 p.33）

平面上に点 O と半直線 OX を定めると，平面上の点 P を，O からの距離 r と OX を始線とする動径 OP の表す角 θ で定めることができる。このとき，点 O を（⑥　　　　）といい

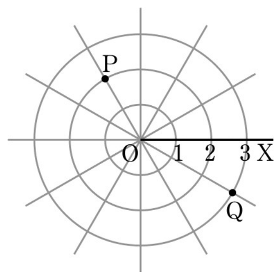
$(r,\ \theta)$

を点 P の（⑦　　　　　　），θ を（⑧　　　　　），r を OP の（⑨　　　　　）または（⑩　　　　　）という。



例4 右の図において，点 O を（　　　　），半直線 OX を（　　　　　）とすると，極座標 $\left(2,\ \frac{2}{3}\pi\right)$ で表される点は右の図の点（　　　　）である。

また，点 Q は極座標（　　　　　　　）で表すことができる。

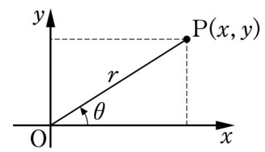


問7 次の極座標で表される点を，上の図にそれぞれ示せ。

A$\left(2,\ \frac{\pi}{6}\right)$，　B$\left(1,\ \frac{3}{2}\pi\right)$，　C$(2,\ \pi)$，　D$\left(3,\ -\frac{\pi}{3}\right)$

極座標に対して，いままで用いていた $(x,\ y)$ で表された座標を（⑪　　　　　　）という。直交座標の原点 O を極とし，x 軸の正の部分を始線 OX とする極座標をとると，次のようになる。

直交座標と極座標
点 P の直交座標が $(x,\ y)$，極座標が $(r,\ \theta)$ であるとき $\boldsymbol{x = r\cos\theta}$，　$\boldsymbol{y = r\sin\theta}$

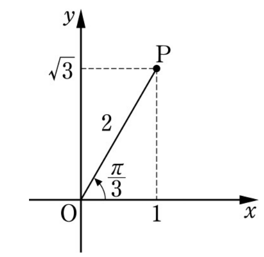


例5 極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$ である点 P の直交座標 $(x,\ y)$ を求めてみよう。

$x =$　　　　　　　　　，$y =$

であるから，点 P の直交座標は

（　　　　　　　）



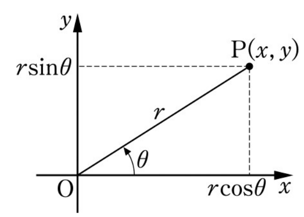
問8 次の極座標で表される点の直交座標 $(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ。

A$\left(2,\ \frac{5}{6}\pi\right)$，B$\left(3,\ \frac{\pi}{2}\right)$，C$(1,\ \pi)$，D$\left(4, -\frac{\pi}{4}\right)$

点 P の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，次のことが成り立つ。

（⑫　　　　　　　　）

（⑬　　　　　　　　　　　）



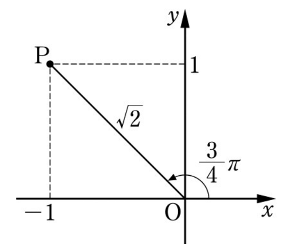
例6 直交座標が $(-1,\ 1)$ である点 P の極座標 $(r,\ \theta)$ を求めてみよう。

$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ であるから

$\cos\theta =$　　　　　　，　$\sin\theta =$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ で考えると　　$\theta =$

よって，点 P の極座標は　（　　　　　　　）



問9 次の直交座標で表される点の極座標 $(r,\ \theta)$ を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　$(1,\ 1)$

(2)　$(0,\ -2)$

(3)　$(\sqrt{3},\ -1)$

極方程式

（教科書 p.35）

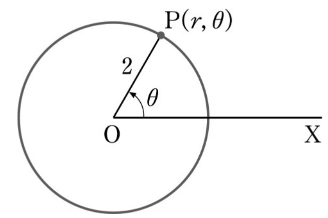
平面上の曲線が，極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて，式

（⑭　　　　　　　　）　または　（⑮　　　　　　　　）　……①

で表されるとき，①をその曲線の（⑯　　　　　　　　）という。

例7 極方程式 $r=2$ の表す図形を調べてみよう。

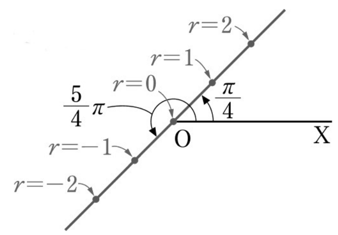
点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ が $r=2$ を満たすとき，OP の長さ r は（　　　　）で一定で，偏角 θ は任意であるから，この図形は，（　　　　　）を中心とする（　　　　　　　）である。



問10 極方程式 $r=3$ の表す図形はどのような曲線か。

例8 極方程式 $\theta=\frac{\pi}{4}$ の表す図形を調べてみよう。

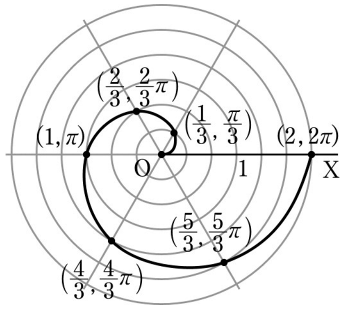
点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ が $\theta=\frac{\pi}{4}$ を満たすとき，始線と動径のなす角は（　　　　）で一定であるから，この図形は，（　　　　　）を通り，始線となす角が（　　　　　）である。



問11 極方程式 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ の表す図形はどのような曲線か。

例9 極方程式 $r=\frac{\theta}{\pi}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の表す図形を調べてみよう。

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	2π
r							



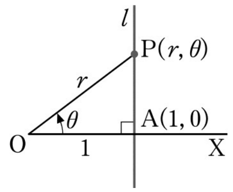
θ の値に対応する r の値を求め，$(r,\ \theta)$ を極座標とする点を結ぶと，右の図のような曲線になる。

問12 極方程式 $r=2-\frac{\theta}{\pi}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の表す曲線の概形をかけ。

例10 極座標が $(1,\ 0)$ の点 A を通り，始線と垂直な直線 l の極方程式を求めてみよう。直線 l 上の点P$(r,\ \theta)$ について，

(　　　　　　　　　　　　) より，

直線 l の極方程式は　(　　　　　　　　　　　)



問13 極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{2}\right)$ の点を通り，始線と平行な直線の極方程式を求めよ。

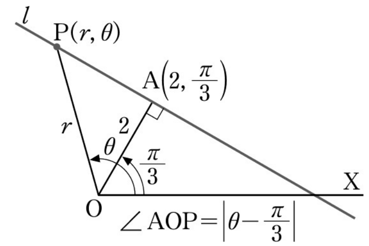
例11 極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$ の点 A を通り，線分 OA に垂直な直線 l の極方程式を求めてみよう。

直線 l 上の点 P$(r,\ \theta)$ について

(　　　　　　　　　　　　　　　)

よって，直線 l の極方程式は

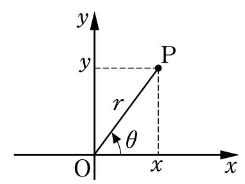
(　　　　　　　　　　　　　　　)



問14 極座標が $\left(4,\ \frac{3}{4}\pi\right)$ の点 A を通り，線分 OA に垂直な直線の極方程式を求めよ。

次の式を利用して，極方程式で表された曲線を直交座標の方程式で表したり，逆に，直交座標の方程式で表された曲線を極方程式で表してみよう。

(⑰　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)



例題 2　極方程式 $r = 2\cos\theta$ の表す曲線を，直交座標の方程式で表せ。

解

問15 極方程式 $r = 4\sin\theta$ の表す曲線を，直交座標の方程式で表せ。

例題 3　円 $x^2 + y^2 - 2y = 0$ を極方程式で表せ。

解

問16 次の直交座標の方程式で表された曲線を，極方程式で表せ。

(1)　$x^2 + y^2 = 9$

(2)　$(x - 2)^2 + y^2 = 4$

Challenge 例題 2次曲線の極方程式

（教科書 p.38）

例題 次の極方程式の表す曲線を，直交座標の方程式で表せ。

$$r=\frac{2}{1-\cos\theta}$$

解

問1 極方程式 $r=\frac{2}{1+\sin}$ の表す曲線を，直交座標の方程式で表せ。

③ いろいろな曲線

リサージュ曲線

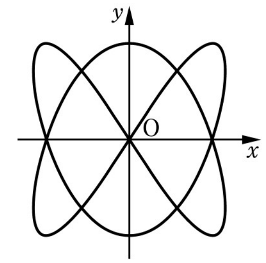
（教科書 p.39）

$m,\ n$ を自然数とするとき，媒介変数表示

（⑱　　　　　　　　　　）

で表される曲線を（⑲　　　　　　　　　　）という。

$m=2$，$n=3$



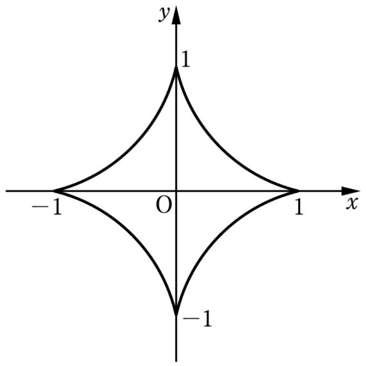
アステロイド

（教科書 p.39）

a を正の定数とするとき，媒介変数表示

（⑳　　　　　　　　　　）

で表される曲線を（㉑　　　　　　　　　　）という。



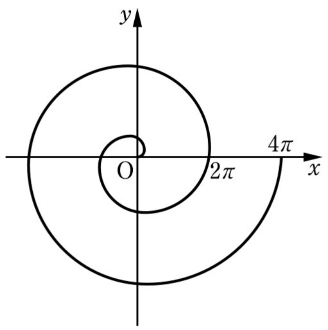
アルキメデスの渦巻線

（教科書 p.40）

a を正の定数とするとき，極方程式

（㉒　　　　　　　　）$(\theta\geqq0)$

で表される曲線を（㉓　　　　　　　　　　）という。



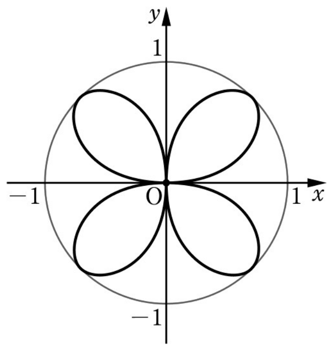
正葉曲線

（教科書 p.40）

n を自然数とするとき，極方程式

（㉔　　　　　　　　　　）

で表される曲線を（㉕　　　　　　　　　　）という。



カージオイド

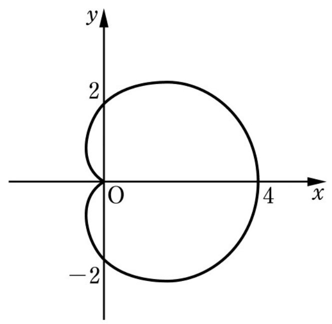
（教科書 p.40）

a を正の定数とするとき，極方程式

（㉖　　　　　　　　　　）

で表される曲線を（㉗　　　　　　　　　　），または

（㉘　　　　　　　　）という。



Training

（教科書 p.41）

１０　次の式の媒介変数 t を消去して，x と y の関係式を求め，どのような曲線を表すかを答えよ。

(1)　$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t^2 - 3 \end{cases}$

(2)　$\begin{cases} x = 2\cos t - 1 \\ y = \sin t + 2 \end{cases}$

１１　p を 0 でない定数とするとき，媒介変数表示

$$\begin{cases} x = pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$$

で表される曲線は，放物線 $y^2 = 4px$ であることを示せ。

１２　次の極座標で表される点の直交座標 $(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ。

$\mathrm{A}\left(6,\ \frac{\pi}{3}\right)$，$\mathrm{B}\left(5,\ \frac{3}{2}\pi\right)$，$\mathrm{C}\left(2,\ -\frac{3}{4}\pi\right)$，$\mathrm{D}(3,\ 3\pi)$

１３　次の直交座標で表される点の極座標 $(r,\ \theta)$ を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

⑴　$\left(-\sqrt{2},\ \sqrt{6}\right)$

⑵　$(0,\ 3)$

⑶　$\left(\sqrt{3},\ -\sqrt{3}\right)$

⑷　$(-5,\ 0)$

１４　次の極方程式は，どのような図形を表すか。

⑴　$r=5$

⑵　$\theta=\frac{\pi}{6}$

１５　次の極座標で表される点 A を通り，線分 OA に垂直な直線の極方程式を求めよ。

⑴　$(3,\ \pi)$

⑵　$\left(\sqrt{2},\ \frac{5}{4}\pi\right)$

１６　次の極方程式を直交座標の方程式で表し，どのような曲線を表すかを答えよ。

⑴　$r=\frac{-2}{\sin\theta}$

⑵　$r=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$

⑶　$r=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

⑷　$r=3\sin\theta$

１７　次の直交座標の方程式で表された曲線を，極方程式で表せ。

⑴　$x^2 - y^2 = 1$

⑵　$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$

⑶　$(x - a)^2 + y^2 = a^2\ (a > 0)$

２節　媒介変数表示と極座標

❶ 媒介変数表示

媒介変数表示

（教科書 p.29）

一般に，平面上の曲線がある変数 t によって

（① $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ ）

で表されるとき，これをその曲線の（② 媒介変数表示 ）といい，t を（③ 媒介変数 ）という。

例1 媒介変数表示 $\begin{cases} x = 2t & \cdots\cdots ① \\ y = 1 - t^2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

で表される曲線を求めてみよう。

①より，$t = \frac{x}{2}$ であるから，②に代入して　（ $y = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$ ）

すなわち，①，②の表す曲線は　（ 放物線 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ ）

問1 次の式の媒介変数 t を消去して，x と y の関係式を求めよ。

(1) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1 + 3t & \cdots\cdots ① \\ y = -2 + t & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②より $t = y + 2$ であるから，①に代入して

$x = 1 + 3(y + 2)$

すなわち　$\boldsymbol{y = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}}$

(2) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 6t \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3t^2 & \cdots\cdots ① \\ y = 6t & \cdots\cdots ② \end{cases}$

②より $t = \frac{y}{6}$ であるから，①に代入して

$x = 3 \cdot \left(\frac{y}{6}\right)^2$

すなわち　$\boldsymbol{y^2 = 12x}$

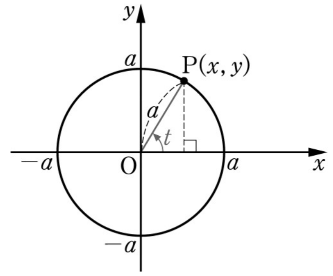
例2 右の図のような円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考えよう。

動径 OP の表す角を t とすると

（ $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ ）

と表される。

これは，（ 円 $x^2 + y^2 = a^2$ ）の媒介変数表示である。



問2 円 $x^2 + y^2 = 4$ の媒介変数表示を求めよ。

円 $x^2 + y^2 = 4$ 上を動く点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ として，動径 OP の表す角を t とすると

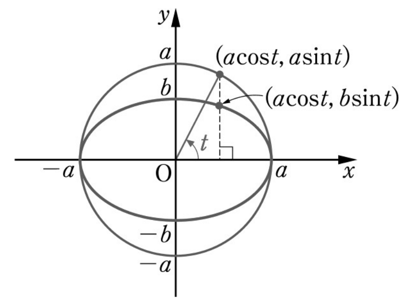
$\boldsymbol{\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}}$ と表される。

例3 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の媒介変数表示を求めてみよう。

この楕円は円 $x^2 + y^2 = a^2$ を x 軸を基準にして y 軸方向に

（ $\frac{b}{a}$ ）倍して得られるから，媒介変数表示は

（ $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ ）　$\cdots\cdots ①$　$y = \frac{b}{a} \cdot a\sin t$



問3 次の楕円の媒介変数表示を求めよ。

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

楕円 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ は円 $x^2+y^2=4$ を x 軸を基準にして y 軸方向に $\frac{3}{2}$ 倍して得られるから，媒介変数表示は

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=2\cos t} \\ \boldsymbol{y=3\sin t} \end{cases}$$

(2) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$

楕円 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$ は円 $x^2+y^2=2$ を x 軸を基準にして y 軸方向に $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 倍して得られるから，媒介変数表示は

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=\sqrt{2}\cos t} \\ \boldsymbol{y=\sqrt{3}\sin t} \end{cases}$$

例題 1 媒介変数表示 $\begin{cases} x=2\cos t+4 \\ y=2\sin t+3 \end{cases}$ ……①

は，どのような曲線を表すか。

解 ①より　$\cos t=\frac{x-4}{2}$，$\sin t=\frac{y-3}{2}$

$\cos^2 t+\sin^2 t=1$ に代入すると　$\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$

よって　$(x-4)^2+(y-3)^2=4$

したがって，①は，中心 $(4,\ 3)$，半径 2 の円を表す。

問4 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(1) $\begin{cases} x=3\cos t-2 \\ y=3\sin t+2 \end{cases}$

$\begin{cases} x=3\cos t-2 \\ y=3\sin t+2 \end{cases}$ ……①

①より　$\cos t=\frac{x+2}{3}$，$\sin t=\frac{y-2}{3}$

$\cos^2 t+\sin^2 t=1$ に代入すると

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

よって　$(x+2)^2+(y-2)^2=9$

したがって，①は，**中心 $(-2,\ 2)$，半径 3 の円**を表す。

(2) $\begin{cases} x=2\cos t+1 \\ y=\sin t-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2\cos t+1 \\ y=\sin t-1 \end{cases}$ ……①

①より　$\cos t=\frac{x-1}{2}$，$\sin t=y+1$

$\cos^2 t+\sin^2 t=1$ に代入すると

$$\frac{(x-1)^2}{4}+(y+1)^2=1$$

したがって，①は，**楕円 $\frac{(x-1)^2}{4}+(y+1)^2=1$** を表す。

一般に，次のことが成り立つ。

曲線の平行移動
曲線 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線は $\begin{cases} x=f(t)+p \\ y=g(t)+q \end{cases}$ である。

問5 中心 $(-3,\ 1)$，半径 3 の円の媒介変数表示を求めよ。

求める曲線は，媒介変数表示

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$$

で表される円 $x^2+y^2=9$ を x 軸方向に-3，y軸方向に 1 だけ平行移動したものであるから，その媒介変数表示は

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 3\cos t - 3} \\ \boldsymbol{y = 3\sin t + 1} \end{cases}$$

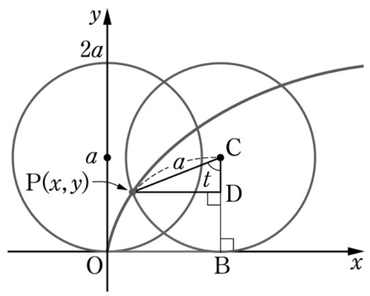
である。

サイクロイド

（教科書 p.32）

円の半径を a，定直線を x 軸とし，円上の定点 P が原点 O の位置にあるとする。そして，その位置から，円が角 t だけ回転したときの点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

右の図において，円の中心 C から x 軸に垂線 CB を引き，点 P から直線 CB に垂線 PD を引くと



$\mathrm{OB} =$ 弧 PB の長さ $= at$

$\mathrm{PD} = a\sin t$

$\mathrm{CD} = a\cos t$

であるから　　$x = \mathrm{OB} - \mathrm{PD} = at - a\sin t$

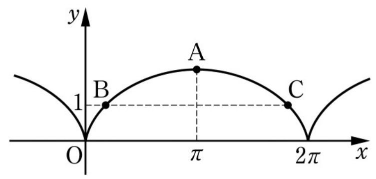
$y = \mathrm{CB} - \mathrm{CD} = a - a\cos t$

したがって，この円上の定点 P がえがく曲線の媒介変数表示は

（④　$\begin{cases} \boldsymbol{x = a(t - \sin t)} \\ \boldsymbol{y = a(1 - \cos t)} \end{cases}$　）

となる。この曲線は，（⑤　サイクロイド　）とよばれている。

問6 右のサイクロイドの媒介変数表示を求めよ。また，点 A，B，C の座標をそれぞれ求めよ。



求めるサイクロイドの媒介変数表示を

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

とする。

y は円が半回転したとき，すなわち $t=\pi$ のときに最大値をとる。また，このとき図より $x=\pi$ であるから

$\pi = a(\pi - \sin\pi)$

$\pi = \pi a$

すなわち　　$a = 1$

したがって，求めるサイクロイドの媒介変数表示は

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = t - \sin t} \\ \boldsymbol{y = 1 - \cos t} \end{cases}$$

点 A は $t=\pi$ に対応する点であるから

$\boldsymbol{\mathrm{A}(\pi,\ 2)}$

点 B，C は $y=1$ より

$1 = 1 - \cos t$　すなわち　$t = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

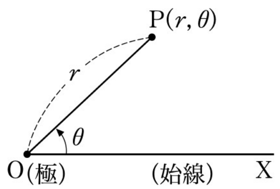
したがって

$$\boldsymbol{\mathrm{B}\left(\frac{\pi}{2} - 1,\ 1\right),\ \mathrm{C}\left(\frac{3}{2}\pi + 1,\ 1\right)}$$

② 極座標と極方程式

極座標と直交座標

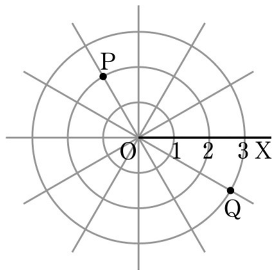
（教科書 p.33）



平面上に点 O と半直線 OX を定めると，平面上の点 P を，O からの距離 r と OX を始線とする動径 OP の表す角 θ で定めることができる。このとき，点 O を（⑥　極　）といい

$(r,\ \theta)$

を点 P の（⑦　極座標　），θ を（⑧　偏角　），r を OP の（⑨　長さ　）または（⑩　大きさ　）という。

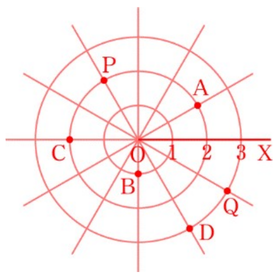


例4 右の図において，点 O を（　極　），半直線 OX を（　始線　）とすると，極座標 $\left(2,\ \frac{2}{3}\pi\right)$ で表される点は右の図の点（　P　）である。

また，点 Q は極座標（　$\left(3,\ -\frac{\pi}{6}\right)$　）で表すことができる。

問7 次の極座標で表される点を，上の図にそれぞれ示せ。

$A\left(2,\ \frac{\pi}{6}\right)$，　$B\left(1,\ \frac{3}{2}\pi\right)$，　$C(2,\ \pi)$，　$D\left(3,\ -\frac{\pi}{3}\right)$

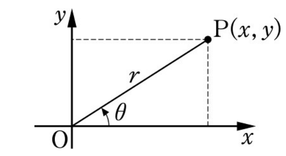


極座標に対して，いままで用いていた $(x,\ y)$ で表された座標を（⑪　直交座標　）という。直交座標の原点 O を極とし，x 軸の正の部分を始線 OX とする極座標をとると，次のようになる。

直交座標と極座標

点 P の直交座標が $(x,\ y)$，極座標が $(r,\ \theta)$ であるとき

$$\boldsymbol{x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta}$$

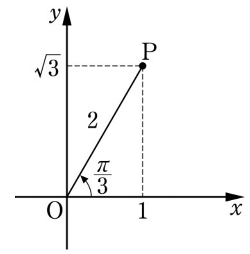


例5 極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$ である点 P の直交座標 $(x,\ y)$ を求めてみよう。

$x =$　$2\cos\frac{\pi}{3} = 1$　，$y =$　$2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

であるから，点 P の直交座標は

（　$(1,\ \sqrt{3})$　）



問8 次の極座標で表される点の直交座標 $(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ。

$A\left(2,\ \frac{5}{6}\pi\right)$，$B\left(3,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$C(1,\ \pi)$，$D\left(4,-\frac{\pi}{4}\right)$

$x = 2\cos\frac{5}{6}\pi = -\sqrt{3}$，$y = 2\sin\frac{5}{6}\pi = 1$ であるから，点 A の直交座標は　$\boldsymbol{(-\sqrt{3},\ 1)}$

$x = 3\cos\frac{\pi}{2} = 0$，$y = 3\sin\frac{\pi}{2} = 3$ であるから，点 B の直交座標は　$\boldsymbol{(0,\ 3)}$

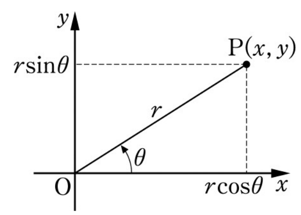
$x = \cos\pi = -1$，$y = \sin\pi = 0$ であるから，点 C の直交座標は　$\boldsymbol{(-1,\ 0)}$

$x = 4\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$，$y = 4\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}$ であるから，点 D の直交座標は $\boldsymbol{(2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})}$

点 P の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，次のことが成り立つ。

（⑫　$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$　）

（⑬　$\boldsymbol{\cos\theta = \frac{x}{r},\ \sin\theta = \frac{y}{r}}$　）



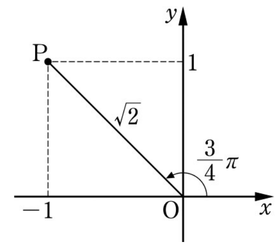
例6 直交座標が $(-1,\ 1)$ である点 P の極座標 $(r,\ \theta)$ を求めてみよう。

$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ であるから

$\cos\theta =$　$\frac{-1}{\sqrt{2}}$　，　$\sin\theta =$　$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ で考えると　$\theta =$　$\frac{3}{4}\pi$

よって，点 P の極座標は　（　$\left(\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)$　）



問9 次の直交座標で表される点の極座標 $(r,\ \theta)$ を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　$(1,\ 1)$

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ であるから

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\theta = \frac{\pi}{4}$

よって，極座標は　$\left(\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$

(2)　$(0,\ -2)$

$r = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$ であるから

$\cos\theta = 0,\ \sin\theta = \frac{-2}{2} = -1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\theta = \frac{3}{2}\pi$

よって，極座標は　$\left(2,\ \frac{3}{2}\pi\right)$

(3)　$(\sqrt{3},\ -1)$

$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$ であるから

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta = \frac{-1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\theta = \frac{11}{6}\pi$

よって，極座標は　$\left(2,\ \frac{11}{6}\pi\right)$

極方程式

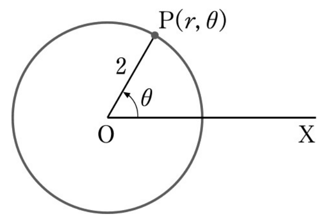
（教科書 p.35）

平面上の曲線が，極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて，式

（⑭　$r = f(\theta)$　）　または　（⑮　$F(r,\ \theta) = 0$　）　……①

で表されるとき，①をその曲線の（⑯　極方程式　）という。

例7 極方程式 $r = 2$ の表す図形を調べてみよう。

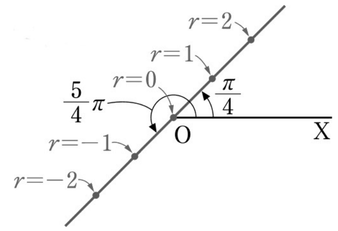


点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ が $r = 2$ を満たすとき，OP の長さ r は（　2　）で一定で，偏角 θ は任意であるから，この図形は，（　極 O　）を中心とする（　半径 2 の円　）である。

問10 極方程式 $r = 3$ の表す図形はどのような曲線か。

動径の長さ r は 3 で一定で，偏角 θ は任意であるから，この図形は，**極 O を中心とする半径 3 の円**である。

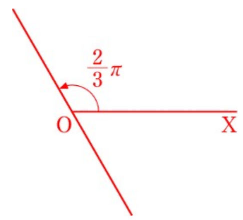
例8 極方程式 $\theta = \frac{\pi}{4}$ の表す図形を調べてみよう。



点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ が $\theta = \frac{\pi}{4}$ を満たすとき，始線と動径のなす角は（　$\frac{\pi}{4}$　）で一定であるから，この図形は，（　極 O　）を通り，始線となす角が（　$\frac{\pi}{4}$ の直線　）である。

問11 極方程式 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ の表す図形はどのような曲線か。

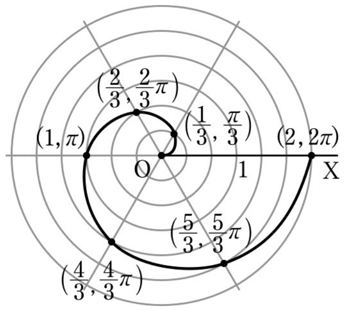
点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ が $\theta = \frac{2}{3}\pi$ を満たすとき，始線と動径のなす角は $\frac{2}{3}\pi$ で一定であるから，この図形は，**極 O を通り，始線となす角が $\frac{2}{3}\pi$ の直線**である。



例9 極方程式 $r=\frac{\theta}{\pi}\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ の表す図形を調べてみよう。

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	2π
r	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2

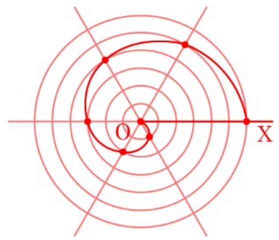
θ の値に対応する r の値を求め，$(r,\ \theta)$ を極座標とする点を結ぶと，右の図のような曲線になる。



問12 極方程式 $r=2-\frac{\theta}{\pi}\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ の表す曲線の概形をかけ。

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	2π
r	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

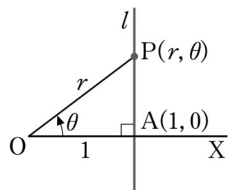
θ に対応する r の値を求め，$(r,\ \theta)$ を極座標とする点を結ぶと，右の図のような曲線になる。



例10 極座標が $(1,\ 0)$ の点 A を通り，始線と垂直な直線 l の極方程式を求めてみよう。直線 l 上の点P$(r,\ \theta)$ について，

（　$\mathrm{OP}\cos\theta=\mathrm{OA}$　）より，

直線 l の極方程式は　（　$r\cos\theta=1$　）

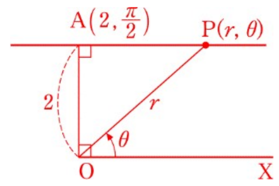


問13 極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{2}\right)$ の点を通り，始線と平行な直線の極方程式を求めよ。

極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{2}\right)$ の点を A とする。この点を通り，始線と平行な直線上の点 P$(r,\ \theta)$ について

$\mathrm{OP}\sin\theta=\mathrm{OA}$

より，直線の極方程式は　$\boldsymbol{r\sin\theta=2}$



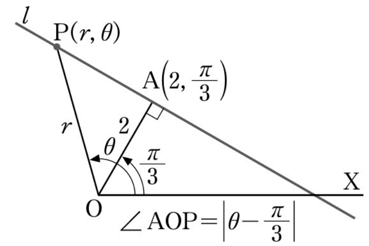
例11 極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$ の点 A を通り，線分 OA に垂直な直線 l の極方程式を求めてみよう。

直線 l 上の点 P$(r,\ \theta)$ について

（　$\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOP}=\mathrm{OA}$　）

よって，直線 l の極方程式は

（　$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=2$　）



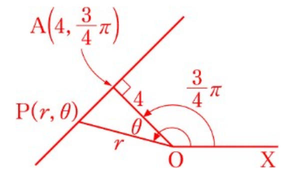
問14 極座標が $\left(4,\ \frac{3}{4}\pi\right)$ の点 A を通り，線分 OA に垂直な直線の極方程式を求めよ。

直線上の点 P$(r,\ \theta)$ について

$\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOP}=\mathrm{OA}$

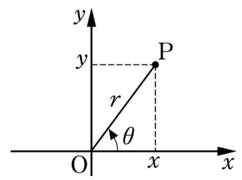
よって，直線の極方程式は

$$\boldsymbol{r\cos\left(\theta-\frac{3}{4}\pi\right)=4}$$



次の式を利用して，極方程式で表された曲線を直交座標の方程式で表したり，逆に，直交座標の方程式で表された曲線を極方程式で表してみよう。

（[17]　$\boldsymbol{x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ x^2+y^2=r^2}$　）



例題 2　極方程式 $r=2\cos\theta$ の表す曲線を，直交座標の方程式で表せ。

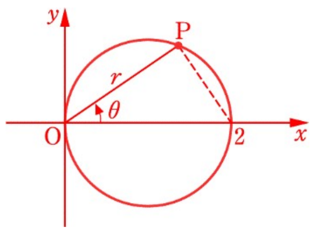
解　両辺に r を掛けて

$r^2=2r\cos\theta$

$r^2=x^2+y^2$, $r\cos\theta=x$ であるから

$x^2+y^2=2x$

これを整理すると　$(x-1)^2+y^2=1$



問15 極方程式 $r=4\sin\theta$ の表す曲線を，直交座標の方程式で表せ。

$r=4\sin\theta$ の両辺に r を掛けて

$r^2=4r\sin\theta$

$r^2=x^2+y^2$, $r\sin\theta=y$ であるから

$x^2+y^2=4y$

これを整理すると　$\boldsymbol{x^2+(y-2)^2=4}$

例題 3　円 $x^2+y^2-2y=0$ を極方程式で表せ。

解　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ であるから

$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2-2r\sin\theta=0$

$r^2-2r\sin\theta=0$　　⟵ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$r(r-2\sin\theta)=0$

よって　$r=0$　または　$r=2\sin\theta$

$r=0$ は，$r=2\sin\theta$ に含まれるから　⟵ $\theta=0$ のとき $2\sin\theta=0$

求める極方程式は　$r=2\sin\theta$

問16 次の直交座標の方程式で表された曲線を，極方程式で表せ。

(1)　$x^2+y^2=9$

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ であるから

$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=9$

$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=9$

よって　$r^2=9$

$r\geqq 0$ であるから，求める極方程式は

$\boldsymbol{r=3}$

(2)　$(x-2)^2+y^2=4$

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$であるから

$(r\cos\theta-2)^2+(r\sin\theta)^2=4$

$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-4r\cos\theta+4=4$

$r^2-4r\cos\theta=0$

$r(r-4\cos\theta)=0$

よって　$r=0$ または $r=4\cos\theta$

$r=0$ は，$r=4\cos\theta$ に含まれるから

求める極方程式は　$\boldsymbol{r=4\cos\theta}$

Challenge 例題 2 次曲線の極方程式

（教科書 p.38）

例題 次の極方程式の表す曲線を，直交座標の方程式で表せ。

$$r=\frac{2}{1-\cos\theta}$$

解 分母をはらって整理すると

$r=r\cos\theta+2$

両辺を 2 乗して　$r^2=(r\cos\theta+2)^2$

ゆえに　$x^2+y^2=(x+2)^2$　　$\longleftarrow \begin{array}{l} r^2=x^2+y^2, \\ x=r\cos\theta \end{array}$

整理すると　$y^2=4(x+1)$

問1 極方程式 $r=\frac{2}{1+\sin\theta}$ の表す曲線を，直交座標の方程式で表せ。

分母をはらって整理すると

$r=-r\sin\theta+2$

両辺を 2 乗して　$r^2=(-r\sin\theta+2)^2$

ゆえに　$x^2+y^2=(-y+2)^2$

整理すると　$\boldsymbol{x^2=-4(y-1)}$

3 いろいろな曲線

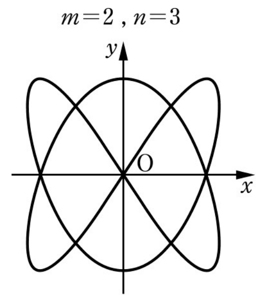
リサージュ曲線

（教科書 p.39）

m, n を自然数とするとき，媒介変数表示

（⑱ $\begin{cases} x=\sin mt \\ y=\sin nt \end{cases}$ ）

で表される曲線を（⑲ リサージュ曲線 ）という。



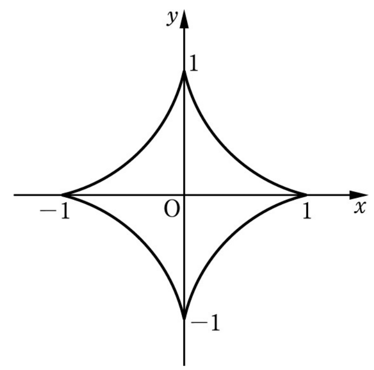
アステロイド

（教科書 p.39）

a を正の定数とするとき，媒介変数表示

（⑳ $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ ）

で表される曲線を（㉑ アステロイド ）という。



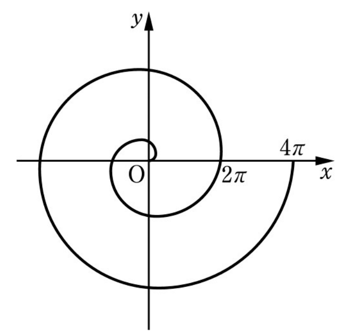
アルキメデスの渦巻線

（教科書 p.40）

a を正の定数とするとき，極方程式

（㉒ $r=a\theta$ ）$(\theta \geqq 0)$

で表される曲線を（㉓ アルキメデスの渦巻線 ）という。



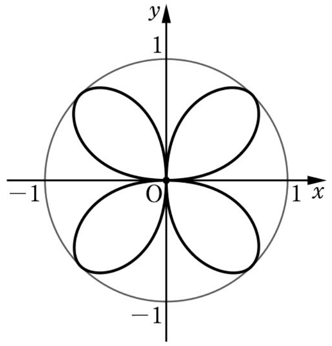
正葉曲線

（教科書 p.40）

n を自然数とするとき，極方程式

（㉔　$\boldsymbol{r = \sin n\theta}$　）

で表される曲線を（㉕　正葉曲線　）という。



カージオイド

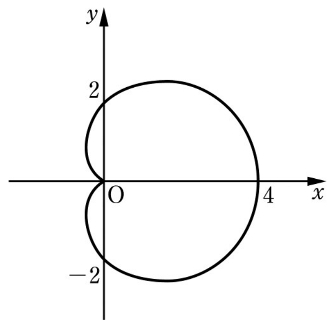
（教科書 p.40）

a を正の定数とするとき，極方程式

（㉖　$\boldsymbol{r = a(1 + \cos\theta)}$　）

で表される曲線を（㉗　カージオイド　），または

（㉘　心臓形　）という。



Training

（教科書 p.41）

１０　次の式の媒介変数 t を消去して，x と y の関係式を求め，どのような曲線を表すかを答えよ。

(1) $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t^2 - 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = t + 2 & \cdots\cdots ① \\ y = 2t^2 - 3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①より $t = x - 2$ であるから，②に代入して

$y = 2(x - 2)^2 - 3$

すなわち，①，②の表す曲線は

放物線 $\boldsymbol{y = 2x^2 - 8x + 5}$

(2) $\begin{cases} x = 2\cos t - 1 \\ y = \sin t + 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2\cos t - 1 & \cdots\cdots ① \\ y = \sin t + 2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①，②より

$\cos t = \frac{x+1}{2}$，$\sin t = y - 2$

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ に代入すると

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

したがって，①，②は，楕円 $\boldsymbol{\left(\frac{x+1}{4}\right)^2 + (y - 2)^2 = 1}$ を表す。

１１　p を 0 でない定数とするとき，媒介変数表示

$$\begin{cases} x = pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$$

で表される曲線は，放物線 $y^2 = 4px$ であることを示せ。

$$\begin{cases} x = pt^2 & \cdots\cdots ① \\ y = 2pt & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②より，$t = \frac{y}{2p}$ であるから，①に代入して

$$x = p \cdot \left(\frac{y}{2p}\right)^2$$

$$x = \frac{y^2}{4p}$$

すなわち，①，②の表す曲線は

放物線 $y^2 = 4px$

１２　次の極座標で表される点の直交座標 $(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ。

$\mathrm{A}\left(6,\ \frac{\pi}{3}\right)$，$\mathrm{B}\left(5,\ \frac{3}{2}\pi\right)$，$\mathrm{C}\left(2,\ -\frac{3}{4}\pi\right)$，$\mathrm{D}(3,\ 3\pi)$

$x = 6\cos\frac{\pi}{3} = 3,\ y = 6\sin\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$

であるから，点 **A** の直交座標は　$\mathbf{(3,\ 3\sqrt{3})}$

$x = 5\cos\frac{3}{2}\pi = 0,\quad y = 5\sin\frac{3}{2}\pi = -5$

であるから，点 **B** の直交座標は　$\mathbf{(0,\ -5)}$

$x = 2\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\sqrt{2},\quad y = 2\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -\sqrt{2}$

であるから，点 **C** の直交座標は　$\mathbf{(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})}$

$x = 3\cos 3\pi = -3,\quad y = 3\sin 3\pi = 0$

であるから，点 **D** の直交座標は　$\mathbf{(-3,\ 0)}$

１３　次の直交座標で表される点の極座標 $(r,\ \theta)$ を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　$(-\sqrt{2},\ \sqrt{6})$

$r = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{2}$ であるから

$\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$，

$\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\theta = \frac{2}{3}\pi$

よって，極座標は　$\left(\mathbf{2\sqrt{2},\ \frac{2}{3}\pi}\right)$

(2)　$(0,\ 3)$

$r = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$ であるから

$\cos\theta = 0,\ \sin\theta = \frac{3}{3} = 1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\theta = \frac{\pi}{2}$

よって，極座標は　$\left(\mathbf{3,\ \frac{\pi}{2}}\right)$

(3)　$(\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$ であるから

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，

$\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\theta = \frac{7}{4}\pi$

よって，極座標は　$\left(\mathbf{\sqrt{6},\ \frac{7}{4}\pi}\right)$

(4)　$(-5,\ 0)$

$r = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$ であるから

$\cos\theta = \frac{-5}{5} = -1,\ \sin\theta = 0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\theta = \pi$

よって，極座標は　$\mathbf{(5,\ \pi)}$

１４　次の極方程式は，どのような図形を表すか。

(1)　$r=5$

動径の長さ r は 5 で一定で，偏角 θ は任意であるから，この図形は，**中心が極 O，半径 5 の円である。**

(2)　$\theta=\frac{\pi}{6}$

点 P$(r,\ \theta)$ が $\theta=\frac{\pi}{6}$ を満たすとき，始線と動径のなす角は $\frac{\pi}{6}$ で一定であるから，この図形は，**極 O を通り，始線となす角が $\frac{\pi}{6}$ の直線である。**

１５　次の極座標で表される点 A を通り，線分 OA に垂直な直線の極方程式を求めよ。

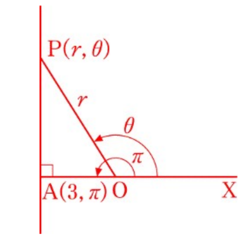
(1)　$(3,\ \pi)$

直線上の点 P$(r,\ \theta)$ について

$\mathrm{OP}\cos\theta=-\mathrm{OA}$

よって，直線の極方程式は

$\boldsymbol{r\cos\theta=-3}$



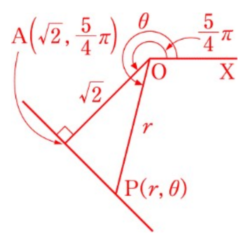
(2)　$\left(\sqrt{2},\ \frac{5}{4}\pi\right)$

直線上の点 P$(r,\ \theta)$ について

$\mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOP}=\mathrm{OA}$

よって，直線の極方程式は

$\boldsymbol{r\cos\left(\theta-\frac{5}{4}\pi\right)=\sqrt{2}}$



１６　次の極方程式を直交座標の方程式で表し，どのような曲線を表すかを答えよ。

(1)　$r=\frac{-2}{\sin\theta}$

$r=\frac{-2}{\sin\theta}$ より　$r\sin\theta=-2$

$r\sin\theta=y$ であるから　$y=-2$

ゆえに，**直線 $y=-2$ を表す。**

(2)　$r=\frac{1}{\sin\theta+\cos}$

$r=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$ より

$r\cos\theta+r\sin\theta=1$

$r\cos\theta=x,\ r\sin\theta=y$ であるから

$x+y=1$

ゆえに，**直線 $x+y=1$ を表す。**

(3)　$r=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$r=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ の両辺に $\cos^2\theta$ を掛けて

$r\cos^2\theta=\sin\theta$

両辺に r を掛けて

$(r\cos\theta)^2=r\sin\theta$

$r\cos\theta=x,\ r\sin\theta=y$ であるから

$x^2=y$

ゆえに，**放物線 $x^2=y$ を表す。**

(4)　$r=3\sin\theta$

$r=3\sin\theta$ の両辺に r を掛けて

$r^2=3r\sin\theta$

$r^2=x^2+y^2,\ r\sin\theta=y$ であるから

$x^2+y^2=3y$

ゆえに，**円 $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ を表す。**

１７　次の直交座標の方程式で表された曲線を，極方程式で表せ。

(1)　$x^2 - y^2 = 1$

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ であるから

$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$

$r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$

2 倍角の公式から

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ より

$r^2\cos 2\theta = 1$

よって，求める極方程式は

$\boldsymbol{r^2\cos 2\theta = 1}$

(2)　$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$

$x^2 + y^2 = r^2$，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$

であるから

$r^2 - 2r\cos\theta + 2r\sin\theta = 0$

$r\{r - 2(\cos\theta - \sin\theta)\} = 0$

よって

$r = 0$ または $r = 2(\cos\theta - \sin\theta)$

$r = 0$ は，$r = 2(\cos\theta - \sin\theta)$ に含まれるから

求める極方程式は　$\boldsymbol{r = 2(\cos\theta - \sin\theta)}$

(3)　$(x-a)^2 + y^2 = a^2\ (a > 0)$

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ であるから

$(r\cos\theta - a)^2 + (r\sin\theta)^2 = a^2$

$r^2 - 2ar\cos\theta = 0$

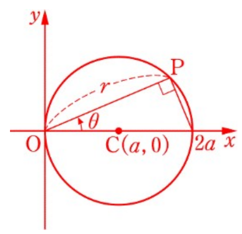
$r(r - 2a\cos\theta) = 0$

よって　　$r = 0$ または $r = 2a\cos\theta$

$r = 0$ は $r = 2a\cos\theta$ に含まれるから

求める極方程式は　$\boldsymbol{r = 2a\cos\theta}$

〔別解〕円 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ の中心 C の極座標は　　C$(a,\ 0)$



よって

$r = 2a\cos\theta$