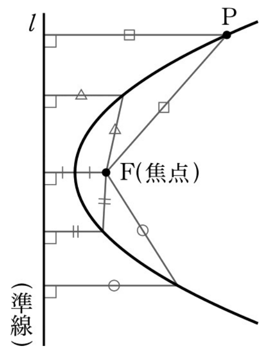
# １節　２次曲線

## ❶ 放物線

（教科書 p.8）

“定点 F と，F を通らない定直線 $l$ とから等距離にある点 P の軌跡”を（①　　　　　　　　）という。

点 F をこの放物線の（②　　　　　　　），直線 $l$ をこの放物線の（③　　　　　　　）という。




### 放物線の方程式

（教科書 p.8）

$p \neq 0$とし，焦点 F を $(p,\ 0)$，準線 $l$ を $x=-p$ とする放物線の方程式を求めてみよう。

放物線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から $l$ へ下ろした垂線を PH とすれば，

$\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$ より

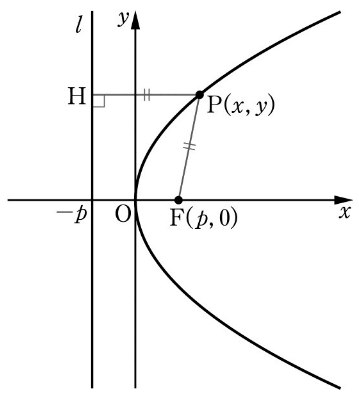
$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$$

両辺を 2 乗すると

$$(x-p)^2+y^2=(x+p)^2$$

これを整理すると

$$y^2=4px \qquad \cdots\cdots①$$




となる。①を放物線の方程式の（④　　　　　　　　）という。放物線①は $x$ 軸に関して対称である。

一般に，放物線において，焦点を通り準線に垂直な直線を放物線の（⑤　　　　　）といい，軸と放物線との交点を放物線の（⑥　　　　　　）という。

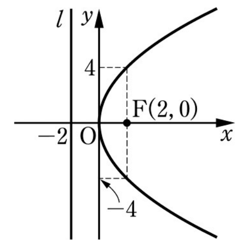
| 放物線 |
|---|
| 放物線 $\boldsymbol{y^2=4px}$ について<br>焦点は $(p,\ 0)$　　　準線は　$x=-p$<br>頂点は原点 $(0,\ 0)$　　軸は　$x$ 軸 $(y=0)$ |

**例1** 放物線 $y^2=8x$ の焦点と準線を求めてみよう。

（　　　　　　　　　　　）

と変形できるから

焦点は（　　　　　　　　），準線は（　　　　　　　　）




**問1** 次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

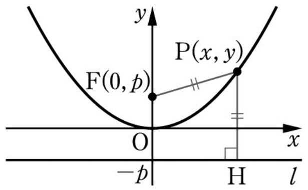
(1)　$y^2=4x$

(2)　$y^2=-8x$

(3)　$y^2=x$

**問2** 焦点が $(3,\ 0)$，準線が $x=-3$ である放物線の方程式を求めよ。

方程式 $y^2=4px$ において，$x$ と $y$ を入れかえて得られる
方程式（⑦　　　　　　　　　　）
が表す図形は，右の図のような放物線である。




**例2** 2 次関数 $y=x^2$ のグラフについて調べてみよう。

（　　　　　　　　　　）と変形できるから，このグラフは焦点が（　　　　　　　），

準線が（　　　　　　　　）の放物線である。

**問3** 次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

(1)　$x^2=8y$

(2)　$x^2=-2y$

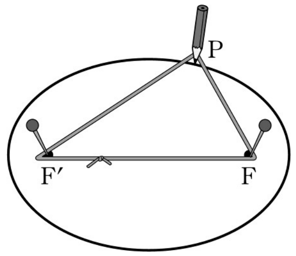
(3)　$y=-2x^2$

**問4** 焦点が $(0,\ 4)$，準線が $y=-4$ である放物線の方程式を求めよ。

## ❷ 楕円

（教科書 p.10）

“2 定点 F，F′ からの距離の和が一定である点 P の軌跡”
を（⑧　　　　　　　）といい，2 点 F，F′ をその（⑨　　　　　　　）という。

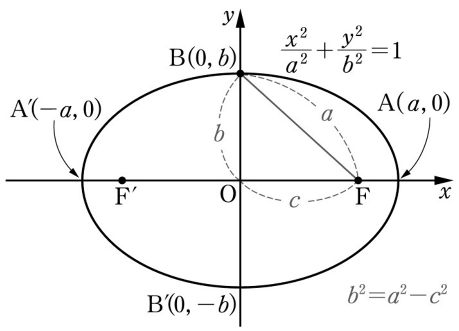



### 楕円の方程式

（教科書 p.10）

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　　……①

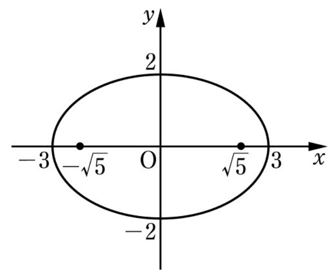
①を楕円の方程式の（⑩　　　　　　　）という。
楕円①と $x$ 軸，$y$ 軸との交点
$\mathrm{A}(a,\ 0)$，　$\mathrm{A}'(-a,\ 0)$，
$\mathrm{B}(0,\ b)$，　$\mathrm{B}'(0,\ -b)$
を楕円の（⑪　　　　　　　）といい，
線分 AA′ を（⑫　　　　　　　），
線分 BB′ を（⑬　　　　　　　）
という。また，楕円①は $x$ 軸，$y$ 軸，原点 O に関して対称である。この O を楕円の（⑭　　　　　　　）という。




| 楕円 |
| --- |
| 楕円 $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}}+\frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}}=\mathbf{1}$ $(a>b>0)$ について<br>長軸の長さは　$2a$，　　短軸の長さは　$2b$<br>焦点　$\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$，　$\mathrm{F}'\left(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$<br>楕円上の点 P について　$\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2a$ |

**例3** 楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ について調べてみよう。

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$において，$a=3$，$b=2$ の場合であるから，
$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$ より，焦点は
（　　　　　　　　　　　　　　　）
また，頂点は
（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）
であり，概形は右の図のようになる。



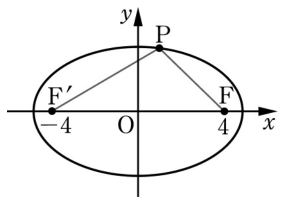

**問5** 次の楕円の焦点と頂点を求め，その概形をかけ。

(1)　$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

(2)　$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

(3)　$x^2+4y^2=4$

**例4** 2 点 (4, 0), (−4, 0) を焦点とし，2 焦点からの距離の和が 10 である楕円の方程式を求めてみよう。




求める方程式を $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ とおく。

(　　　　　　　　　　)　←― 焦点の $x$ 座標

(　　　　　　　　)　←― 2 焦点からの距離の和

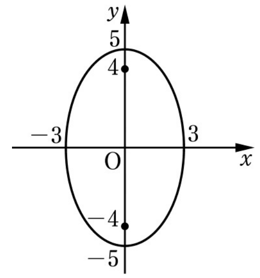
より (　　　　　　　　　　) であり，その方程式は (　　　　　　　　　)

**問6** 2 点 (2, 0), (−2, 0) を焦点とし，2 焦点からの距離の和が 6 である楕円の方程式を求めよ。

## $y$ 軸上に焦点をもつ楕円

（教科書 p.12）

**例5** 楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ について調べてみよう。




$\sqrt{25-9}=4$より，焦点は (　　　　　　　　　　) である。また，頂点は

(　　　　　　　　　　　　　　　　　)

であり，概形は右の図のようになる。

**問7** 次の楕円の焦点と頂点を求め，その概形をかけ。

(1)　$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

(2)　$x^2+\frac{y^2}{9}=1$

⑶　$9x^2+4y^2=36$

## 円と楕円

（教科書 p.13）

**例題 1**　円 $x^2+y^2=16$ を $x$ 軸を基準にして $y$ 軸方向に $\frac{3}{4}$ 倍して得られる図形は，どのような曲線か。

**解**

**問8**　円 $x^2+y^2=25$ を $x$ 軸を基準にして $y$ 軸方向に $\frac{2}{5}$ 倍して得られる楕円の方程式を求めよ。

## Challenge　例題　線分の内分点の軌跡

（教科書 p.14）

**例題** 長さ 7 の線分 PQ がある。点 P が $x$ 軸上，点 Q が $y$ 軸上を動くとき，PQ を $3:4$ に内分する点 R の軌跡を求めよ。

**解**

**問1** 長さ 5 の線分 PQ がある。点 P が $x$ 軸上，点 Q が $y$ 軸上を動くとき，PQ を $3:2$ に内分する点 R の軌跡を求めよ。

## ❸ 双曲線

（教科書 p.15）

“2 定点 F, F′ からの距離の差が一定である点 P の軌跡”を（⑮　　　　　　　　）といい，2 点 F, F′ をその（⑯　　　　　　）という。

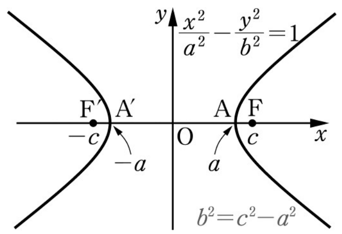
### 双曲線の方程式

（教科書 p.15）

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$　　……①

①を双曲線の方程式の（⑰　　　　　　　　）という。

教科書 15 ページの双曲線①と $x$ 軸との 2 つの交点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{A}'(-a,\ 0)$ を双曲線の（⑱　　　　　　）といい，直線 AA′ を（⑲　　　　　　）という。また，双曲線①は $x$ 軸，$y$ 軸，原点 O に関して対称である。この O を双曲線の（⑳　　　　　　）という。




| 双曲線 |
|---|
| 双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\mathbf{1}$ $(a>0,\ b>0)$ について<br>焦点　$\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$,　$\mathrm{F}'\left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$<br>双曲線上の点 P について　$\lvert\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'\rvert=2a$ |

**例6** 双曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ の焦点と頂点を求めてみよう。$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ において $a=4,\ b=3$ の場合であるから，$\sqrt{a^2+b^2}=5$ より，焦点は（　　　　　　　　　　　）である。また，頂点は（　　　　　　　　　　）である。

**問9** 双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ の焦点と頂点を求めよ。

**例7** 2 点 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$ を焦点とし，2 焦点からの距離の差が 6 である双曲線の方程式を求めてみよう。

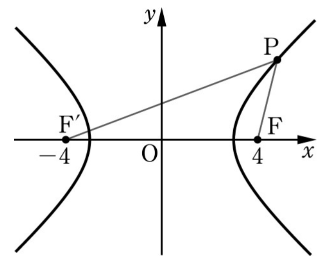
求める方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ とおく。

（　　　　　　　　　　）←― 焦点の $x$ 座標

（　　　　　　　）←― 2 焦点からの距離の差

より，（　　　　　　　　　　）であり，

その方程式は　（　　　　　　　　）



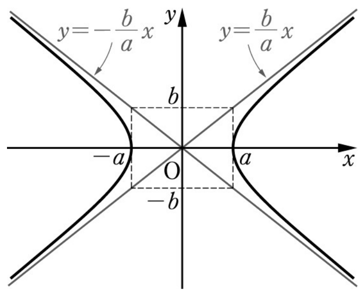

**問10** 2 点 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$ を焦点とし，2 焦点からの距離の差が 4 である双曲線の方程式を求めよ。

## 漸近線

（教科書 p.17）

一般に，双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ は，原点から遠ざかるにつれて 2 直線 $y=\frac{b}{a}x$，$y=-\frac{b}{a}x$ のどちらかに限りなく近づく。

このように，ある曲線が原点から遠ざかるにつれて限りなく近づく直線を，その曲線の（㉑　　　　　　　　）という。




| 双曲線の漸近線 |
| --- |
| 双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ の漸近線は　　$\boldsymbol{y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x}$ |

**例8** 教科書 16 ページの例 6 の双曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ の概形をかいてみよう。

漸近線は　（　　　　　　　　　　　　　　）
である。また，頂点は
（　　　　　　　　　　　　　　）
であり，概形は右の図のようになる。

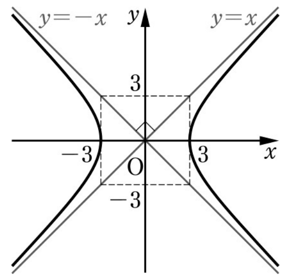
**問11** 教科書 16 ページの問 9 の双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ について，漸近線を求め，その双曲線の概形をかけ。

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ において，$a=b$ ならば 2 つの漸近線は

$y=x$，$y=-x$

となり，直交する。2 つの漸近線が直交する双曲線を（㉒　　　　　　　　　　）という。

**例9** 双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ は（　　　　　　　　　　　）であり，概形は右の図のようになる。



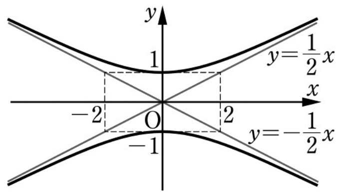

**問12** 双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ について，漸近線を求め，その双曲線の概形をかけ。

## $y$ 軸上に焦点をもつ双曲線

(教科書 p.19)

**例10** 双曲線 $\frac{x^2}{4}-y^2=-1$ について調べてみよう。

$\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ より，焦点は（　　　　　　　　　　　　　）である。
また，漸近線は
（　　　　　　　　　　　　　）
頂点は（　　　　　　　　　　　　）であり，概形は右の図のようになる。




**問13** 双曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$ の焦点，漸近線を求め，その双曲線の概形をかけ。

放物線 $y^2=4px$，楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$

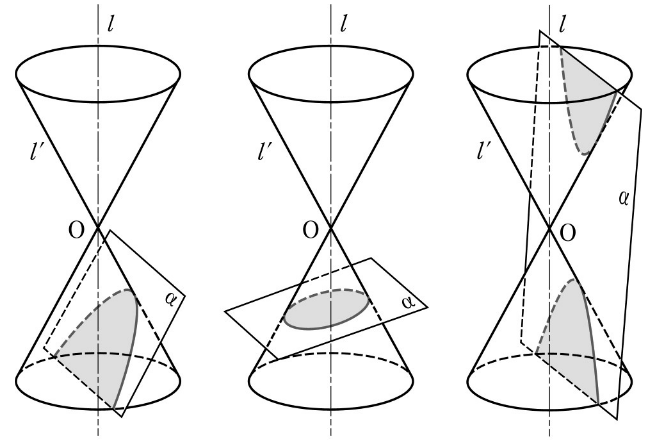
は，いずれも $x$, $y$ についての 2 次方程式で表されている。これらの曲線をまとめて
（㉓　　　　　　　　　）という。

## 参考　円錐曲線

(教科書 p.20)

1 つの直線 $l$ と 1 点 O で交わる直線 $l'$ が $l$ のまわりを空間内で回転するとき，$l'$ のえがく面を円錐面という。$l$ をその円錐面の（㉔　　　　　　），O を（㉕　　　　　　），$l'$ を（㉖　　　　　　）という。

円錐面は頂点によって 2 つの部分に分けられる。頂点を通らない平面 $\alpha$ で円錐面を切るとき，その切り口は $\alpha$ と円錐面の交わり方によって，次のような曲線となる。




放物線　　楕円　　双曲線

$\alpha$ が円錐面の一方の部分だけに交わり，かつ，ある 1 つの母線に平行ならば，切り口は放物線となる。

$\alpha$ が円錐面の一方の部分だけに交わり，かつ，どの母線にも平行でないならば，切り口は円または楕円となる。

$\alpha$ が円錐面の 2 つの部分に交わるならば，切り口は双曲線となる。

このように，2 次曲線は平面による円錐面の切り口としても現れることが知られている。そのため，2 次曲線は（㉗　　　　　　　　）ともよばれる。

## ④ 2次曲線と平行移動

（教科書 p.21）

一般に，次のことが成り立つ。

| 曲線の平行移動 |
|---|
| 方程式 $f(x,\ y)=0$ で表される曲線を $x$ 軸方向に $p$，$y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動した曲線の方程式は<br>$f(x-p,\ y-q)=0$ |

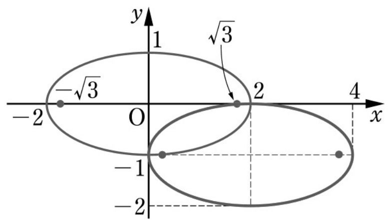
**例11** 楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ を $x$ 軸方向に $2$，$y$ 軸方向に $-1$ だけ平行移動した楕円の方程式は

（　　　　　　　　　　　　　　　）

である。また，$\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ より，この楕円の焦点は

（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

である。




**問14** 双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ を $x$ 軸方向に $-3$，$y$ 軸方向に $2$ だけ平行移動した双曲線の方程式を求めよ。また，その焦点を求めよ。

**例題 2** 方程式 $y^2+4x+4y=0$ の表す図形は放物線であることを示し，その焦点と準線を求めよ。

**解**

**問15** 方程式 $y^2-x-2y=0$ の表す図形は放物線であることを示し，その焦点と準線を求めよ。

**例題 3** 次の方程式はどのような図形を表すか。また，その概形をかけ。

(1)　$9x^2+4y^2+18x-16y-11=0$

(2)　$x^2-y^2+4y-5=0$

**解**

**問16** 次の方程式はどのような図形を表すか。また，その概形をかけ。

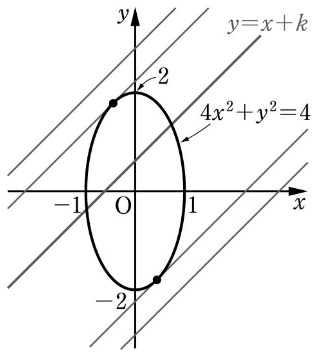
(1)　$4x^2+9y^2=24x$

(2)　$4x^2-y^2+8x+4y+4=0$

## ⑤ 2 次曲線と直線

（教科書 p.24）

**例12** 楕円 $4x^2+y^2=4$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数は，定数 $k$ の値によってどのように変わるか調べてみよう。




これらの共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases}4x^2+y^2=4 & \cdots\cdots ① \\ y=x+k & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

の実数解であるから，その個数を調べればよい。

②を①に代入して

（　　　　　　　　　　　　　）

すなわち　（　　　　　　　　　　　　　　）　……③

③の判別式を $D$ とすると

（　　　　　　　　　　　　　）

（　　　　　　　　　　　）

共有点の個数は，③の異なる実数解の個数と一致するから

$D>0$　すなわち　（　　　　　　　　　　　）のとき　　　共有点（　　　　　　　）

$D=0$　すなわち　（　　　　　　　　）のとき　　　　　　共有点（　　　　　　　）

$D<0$　すなわち　（　　　　　　　　　　　　）のとき　　共有点（　　　　　）

**問17** 放物線 $y^2=-8x$ と直線 $y=2x+k$ の共有点の個数は，定数 $k$ の値によってどのように変わるか調べよ。

教科書 24 ページの例 12 において，$D=0$ のとき，共有点は 1 個で，これは $D>0$ のときの 2 個の共有点が重なったものと考えることができる。このとき，直線は楕円に（㉘　　　　　　　）といい，その直線を楕円の（㉙　　　　　　），接線と楕円の共有点を（㉚　　　　　　）という。

**例題 4** 双曲線 $x^2-2y^2=2$ と直線 $y=x+k$ が接するような定数 $k$ の値と，接点の座標を求めよ。

**解**

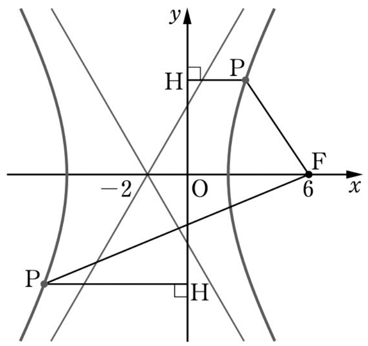
**問18** 楕円 $2x^2+y^2=2$ と直線 $y=-2x+k$ が接するような定数 $k$ の値と，接点の座標を求めよ。

## 参考　2 次曲線と離心率

（教科書 p.26）

**例1** 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，定点 $\mathrm{F}(6,\ 0)$ からの距離 PF と $y$ 軸からの距離 PH の比の値を $e=\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ とおく。

$e=2$ のときの点 P の軌跡を求めてみよう。




PF =

PH =

PF = 2PH より

（　　　　　　　　　　　　　）

両辺を 2 乗して

$(x-6)^2+y^2=4x^2$

$3x^2-y^2+12x-36=0$

$3(x+2)^2-y^2=48$

すなわち

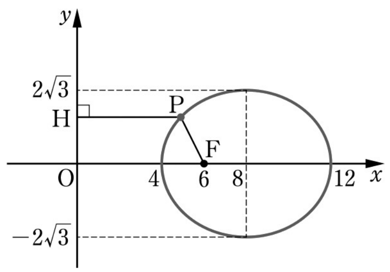
（　　　　　　　　　　　）　……①

これは，双曲線

（　　　　　　　　）　……②

を $x$ 軸方向に（　　　　　）だけ平行移動した双曲線を表している。

**例2** 教科書 26 ページの例 1 において，$e=\frac{1}{2}$ のときの点 P の軌跡を求めてみよう。




2PF = PH より

（　　　　　　　　　　　　　）

両辺を 2 乗して

$4(x-6)^2+4y^2=x^2$

$3x^2+4y^2-48x+144=0$

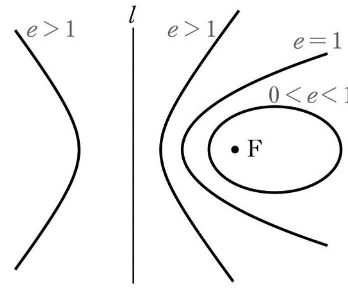
$3(x-8)^2+4y^2=48$

すなわち　　　　（　　　　　　　　　　　）　……③

これは，楕円　　（　　　　　　　　）　……④

を $x$ 軸方向に（　　　　）だけ平行移動した楕円を表している。

一般に，定点 F からの距離 PF と定直線 $l$ からの距離 PH の比の値 $e=\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ が一定である点 P の軌跡は，F を焦点の 1 つとする 2 次曲線であり




$0<e<1$ のとき　楕円

$e=1$ のとき　放物線

$e>1$ のとき　双曲線

であることが知られている。この $e$ の値を，2 次曲線の

（㉛　　　　　　　）といい，直線 $l$ を（㉜　　　　　　）という。

**問1** 教科書 26 ページの例 1 において，次の場合の点 P の軌跡を求めよ。

(1)　$e=\sqrt{2}$

(2)　$e=1$

(3)　$e=\frac{1}{\sqrt{2}}$

## Training

（教科書 p.28）

**1**　次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

(1)　$y^2 = 6x$

(2)　$4x^2 = -y$

**2**　原点を頂点とする放物線のうち，次の条件を満たすものの方程式を求めよ。

(1)　焦点が $(2,\ 0)$

(2)　準線が $y = 3$

(3)　軸が $x$ 軸で点 $(4,\ 6)$ を通る。

**3**　次の楕円の焦点と，楕円上の点の 2 焦点からの距離の和を求めよ。

(1)　$3x^2 + 4y^2 = 12$

(2)　$16x^2 + 12y^2 = 192$

**4**　次の条件を満たす楕円の方程式を求めよ。

(1)　2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ を焦点とし，2 焦点からの距離の和が $6\sqrt{2}$ である。

(2)　2 点 $(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$ を焦点とし，短軸の長さが $8$ である。

**5**　円 $x^2+y^2=9$ を $x$ 軸を基準にして $y$ 軸方向に $\frac{5}{3}$ 倍して得られる図形は，どのような曲線か。

**6**　次の双曲線の焦点と漸近線を求め，その双曲線の概形をかけ。

(1)　$4x^2-5y^2=20$

(2)　$9x^2-4y^2=-36$

**7**　次の条件を満たす双曲線の方程式を求めよ。

（1）　2 点 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ を焦点とし，頂点間の距離が 2 である。

⑵　点 $(0,\ -2)$ を頂点の 1 つとし，$y = x$ と $y = -x$ を漸近線とする。

**8**　次の方程式はどのような図形を表すか。また，その概形をかけ。

（1）　$y^2 + y = x$

⑵　$2x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

⑶　$x^2 - y^2 + 4y + 5 = 0$

**9**　次の 2 次曲線と直線 $y=\frac{1}{2}x+k$ の共有点の個数は，定数 $k$ の値によってどのように変わるか調べよ。また，接するときの接点の座標を求めよ。

(1)　$y^2=4x$

(2)　$x^2+12y^2=12$

⑶　$x^2-3y^2=-12$

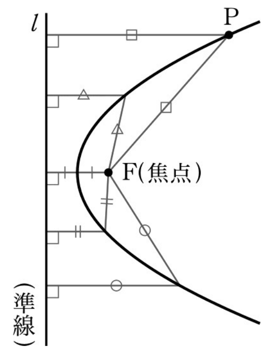
# １節　２次曲線

## ❶ 放物線

（教科書 p.8）

“定点 F と，F を通らない定直線 $l$ とから等距離にある点 P の軌跡”を（① 放物線 ）という。

点 F をこの放物線の（② 焦点 ），直線 $l$ をこの放物線の（③ 準線 ）という。




### 放物線の方程式

（教科書 p.8）

$p \neq 0$とし，焦点 F を $(p,\ 0)$，準線 $l$ を $x=-p$ とする放物線の方程式を求めてみよう。

放物線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ から $l$ へ下ろした垂線を PH とすれば，

PF = PH より

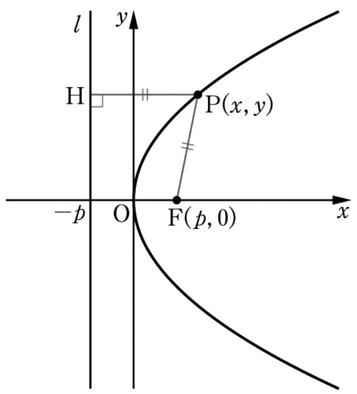
$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$$

両辺を 2 乗すると

$$(x-p)^2+y^2=(x+p)^2$$

これを整理すると

$$y^2=4px \qquad \cdots\cdots①$$




となる。①を放物線の方程式の（④ 標準形 ）という。放物線①は $x$ 軸に関して対称である。

一般に，放物線において，焦点を通り準線に垂直な直線を放物線の（⑤ 軸 ）といい，軸と放物線との交点を放物線の（⑥ 頂点 ）という。

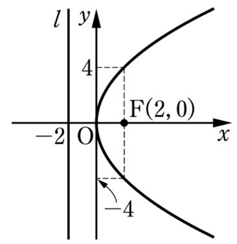
| 放物線 | |
|---|---|
| 放物線 $\boldsymbol{y^2=4px}$ について | |
| 焦点は $(p,\ 0)$ | 準線は　$x=-p$ |
| 頂点は原点 $(0,\ 0)$ | 軸は　$x$ 軸 $(y=0)$ |

**例1** 放物線 $y^2=8x$ の焦点と準線を求めてみよう。

（　$y^2=4\cdot 2x$　）

と変形できるから

焦点は（ $(2,\ 0)$ ），準線は（ $x=-2$ ）

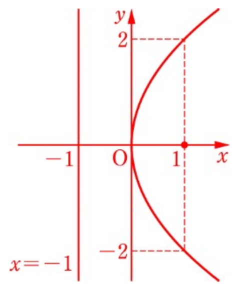



**問1** 次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

(1)　$y^2=4x$

$y^2=4x=4\cdot 1x$ と変形できるから

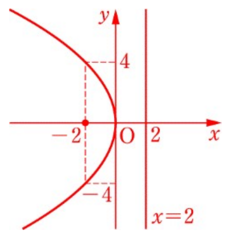
**焦点は $(1,\ 0)$，準線は $x=-1$**




(2)　$y^2=-8x$

$y^2=-8x=4\cdot(-2)x$ と変形できるから

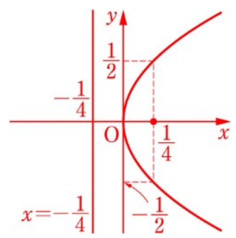
**焦点は $(-2,\ 0)$，準線は $x=2$**




(3)　$y^2=x$

$y^2=x=4\cdot\frac{1}{4}x$ と変形できるから

**焦点は $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$，準線は $x=-\frac{1}{4}$**

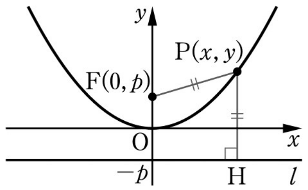


**問2** 焦点が $(3,\ 0)$，準線が $x=-3$ である放物線の方程式を求めよ。

$y^2=4\cdot 3x=12x$

ゆえに　$\boldsymbol{y^2=12x}$

方程式 $y^2=4px$ において，$x$ と $y$ を入れかえて得られる方程式（⑦　$x^2=4py$　）が表す図形は，右の図のような放物線である。




**例2** 2 次関数 $y=x^2$ のグラフについて調べてみよう。

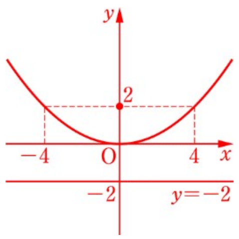
（　$x^2=4\cdot\frac{1}{4}y$　）と変形できるから，このグラフは焦点が（　$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$　），

準線が（　$y=-\frac{1}{4}$　）の放物線である。

**問3** 次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

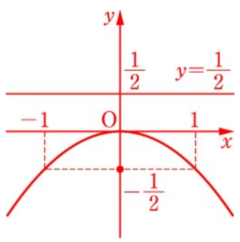
(1)　$x^2=8y$

$x^2=8y=4\cdot 2y$ と変形できるから，このグラフは焦点が $\boldsymbol{(0,\ 2)}$，準線が $\boldsymbol{y=-2}$ の放物線である。




(2)　$x^2=-2y$

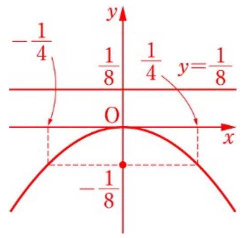
$x^2=-2y=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)y$ と変形できるから，このグラフは焦点が $\left(\boldsymbol{0,\ -\frac{1}{2}}\right)$，準線が $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}}$ の放物線である。




(3)　$y=-2x^2$

$y=-2x^2$ より

$x^2=-\frac{1}{2}y=4\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)y$ と変形できるから，このグラフは焦点が $\left(\boldsymbol{0,\ -\frac{1}{8}}\right)$，準線が $\boldsymbol{y=\frac{1}{8}}$ の放物線である。




**問4** 焦点が $(0,\ 4)$，準線が $y=-4$ である放物線の方程式を求めよ。

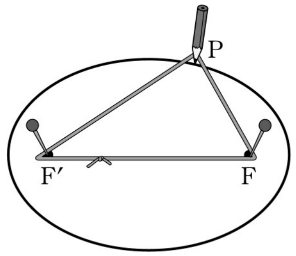
$x^2=4\cdot 4y=16y$

ゆえに　$\boldsymbol{x^2=16y}$

## ②楕円

（教科書 p.10）

“2 定点 F, F′ からの距離の和が一定である点 P の軌跡”
を（⑧　　楕円　　）といい，2 点 F, F′ をその（⑨　　焦点　　）という。




### 楕円の方程式

（教科書 p.10）

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots①$$

①を楕円の方程式の（⑩　　標準形　　）という。
楕円①と $x$ 軸，$y$ 軸との交点

$A(a,\ 0)$，　$A'(-a,\ 0)$，

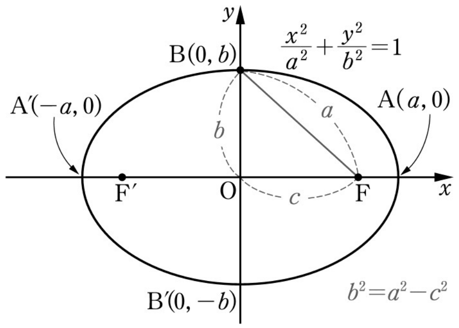
$B(0,\ b)$，　$B'(0,\ -b)$

を楕円の（⑪　　頂点　　）といい，

線分 AA′ を（⑫　　長軸　　），

線分 BB′ を（⑬　　短軸　　）

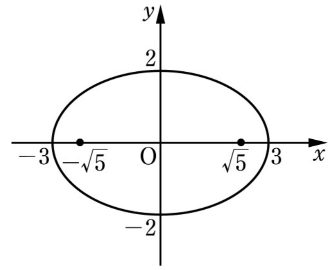
という。また，楕円①は $x$ 軸，$y$ 軸，原点 O に関して対称である。この O を楕円の（⑭　　中心　　）という。




| 楕円 | |
|---|---|
| 楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ について | |
| 長軸の長さは　$2a$， | 短軸の長さは　$2b$ |
| 焦点　$F\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$， | $F'\left(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$ |
| 楕円上の点 P について | $PF+PF'=2a$ |

**例3** 楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ について調べてみよう。

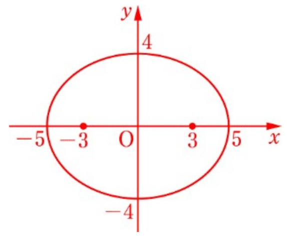
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$において，$a=3$，$b=2$ の場合であるから，
$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$ より，焦点は
（　　$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$　　）
また，頂点は
（　　$(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$　　）
であり，概形は右の図のようになる。




**問5** 次の楕円の焦点と頂点を求め，その概形をかけ。

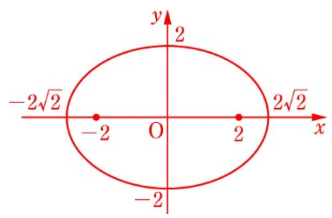
(1)　$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

$\sqrt{25-16}=3$ より，焦点は
　$(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$
また，頂点は
　$(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$，$(0,\ 4)$，$(0,\ -4)$
であり，概形は次の図のようになる。




(2)　$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

$\sqrt{8-4}=2$ より，焦点は
　$(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$
また，頂点は
　$(2\sqrt{2},\ 0)$，$(-2\sqrt{2},\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$
であり，概形は次の図のようになる。



(3)　$x^2 + 4y^2 = 4$

$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ と変形できる。

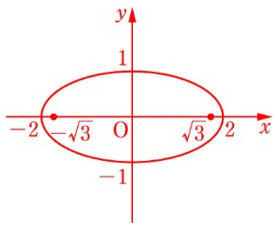
$\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ より，焦点は

$(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$

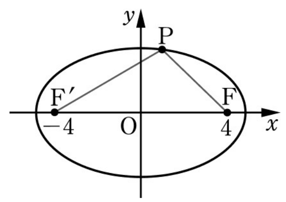
また，頂点は

$(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$

であり，概形は次の図のようになる。




**例4** 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とし，2 焦点からの距離の和が 10 である楕円の方程式を求めてみよう。




求める方程式を $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ とおく。

（　$\sqrt{a^2 - b^2} = 4$　）　←焦点の $x$ 座標

（　$2a = 10$　）　← 2 焦点からの距離の和

より（　$a = 5,\ b = 3$　）であり，その方程式は（　$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$　）

**問6** 2 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を焦点とし，2 焦点からの距離の和が 6 である楕円の方程式を求めよ。

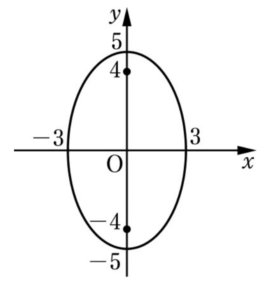
求める楕円の方程式を $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ とおく。

$\sqrt{a^2 - b^2} = 2$，$2a = 6$ より $a = 3$，$b = \sqrt{5}$ であり，その方程式は　$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

## $y$ 軸上に焦点をもつ楕円

（教科書 p.12）

**例5** 楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ について調べてみよう。




$\sqrt{25-9} = 4$より，焦点は（　$(0,\ 4)$，$(0,\ -4)$　）である。また，頂点は

（　$(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$，$(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$　）

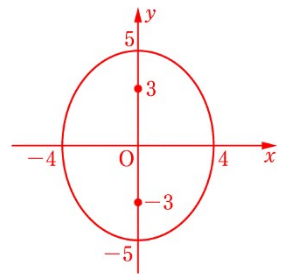
であり，概形は右の図のようになる。

**問7** 次の楕円の焦点と頂点を求め，その概形をかけ。

(1)　$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

$\sqrt{25-16} = 3$ より，焦点は $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$ である。

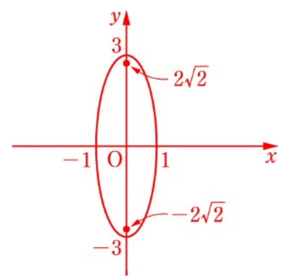
また，頂点は $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$，$(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$ であり，概形は次の図のようになる。




(2)　$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$

$\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$ より，焦点は $(0,\ 2\sqrt{2})$，$(0,\ -2\sqrt{2})$ である。

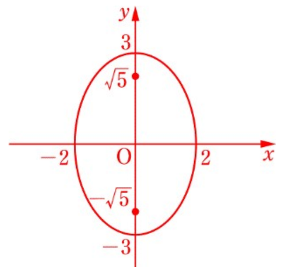
また，頂点は$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$ であり，概形は次の図のようになる。



(3)　$9x^2+4y^2=36$

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ であるから，$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ より，焦点は $(\mathbf{0},\ \sqrt{\mathbf{5}})$，$(\mathbf{0},\ -\sqrt{\mathbf{5}})$ である。

また，頂点は $(\mathbf{2},\ \mathbf{0})$，$(-\mathbf{2},\ \mathbf{0})$，$(\mathbf{0},\ \mathbf{3})$，$(\mathbf{0},\ -\mathbf{3})$ であり，概形は次の図のようになる。




## 円と楕円

（教科書 p.13）

**例題 1**　円 $x^2+y^2=16$ を $x$ 軸を基準にして $y$ 軸方向に $\frac{3}{4}$ 倍して得られる図形は，どのような曲線か。

**解**　点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ を円 $x^2+y^2=16$ 上の点とすると

$s^2+t^2=16$　……①

が成り立つ。また，点 P を $x$ 軸を基準にして $y$ 軸方向に $\frac{3}{4}$ 倍した点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると

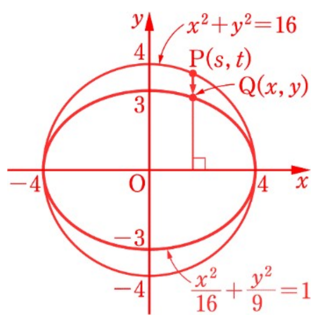
$x=s,\quad y=\frac{3}{4}t$ より

$s=x,\quad t=\frac{4}{3}y$　……②

②を①に代入すると

$$x^2+\frac{16}{9}y^2=16$$

よって，求める曲線は　楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$




**問8**　円 $x^2+y^2=25$ を $x$ 軸を基準にして $y$ 軸方向に $\frac{2}{5}$ 倍して得られる楕円の方程式を求めよ。

点 $\mathrm{P}(u,\ v)$ を円 $x^2+y^2=25$ 上の点とすると

$u^2+v^2=25$　……①

が成り立つ。また，点 P を $x$ 軸を基準にして $y$ 軸方向に $\frac{2}{5}$ 倍した点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると

$x=u,\ y=\frac{2}{5}v$ より

$u=x,\ v=\frac{5}{2}y$　……②

②を①に代入すると

$$x^2+\frac{25}{4}y^2=25$$

よって，求める楕円の方程式は

$$\frac{\boldsymbol{x}^2}{\mathbf{25}}+\frac{\boldsymbol{y}^2}{\mathbf{4}}=\mathbf{1}$$

## Challenge 例題 線分の内分点の軌跡

（教科書 p.14）

**例題** 長さ 7 の線分 PQ がある。点 P が $x$ 軸上，点 Q が $y$ 軸上を動くとき，PQ を 3 : 4 に内分する点 R の軌跡を求めよ。

**解** 2 点 P，Q の座標をそれぞれ

$\mathrm{P}(s,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ t)$

とする。

PQ = 7 より

$s^2+t^2=7^2$　　……①

点 R の座標を

$\mathrm{R}(x,\ y)$

とすると，R は線分 PQ を 3 : 4 に内分するから

$x=\frac{4}{7}s,\ y=\frac{3}{7}t$

よって

$s=\frac{7}{4}x,\ t=\frac{7}{3}y$　　……②

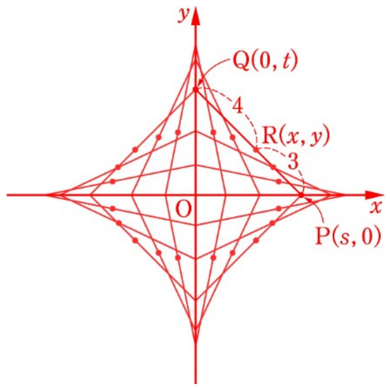
②を①に代入して整理すると

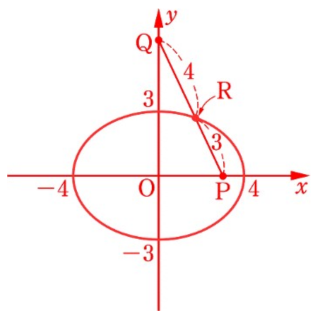
$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

したがって，点 R の軌跡は

楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

である。




**問1** 長さ 5 の線分 PQ がある。点 P が $x$ 軸上，点 Q が $y$ 軸上を動くとき，PQ を 3 : 2 に内分する点 R の軌跡を求めよ。

2 点 P，Q の座標をそれぞれ

$\mathrm{P}(s,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ t)$

とする。

PQ = 5 より

$s^2+t^2=5^2$　　……①

点 R の座標を

$\mathrm{R}(x,\ y)$

とすると，R は線分 PQ を 3 : 2 に内分するから

$x=\frac{2}{5}s,\ y=\frac{3}{5}t$

よって

$s=\frac{5}{2}x,\ t=\frac{5}{3}y$　　……②

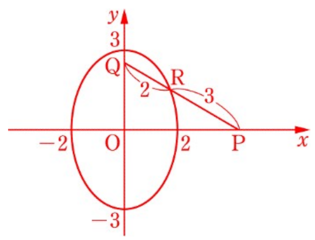
②を①に代入して整理すると

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

したがって，点 R の軌跡は

**楕円 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$**

である。



## ③ 双曲線

（教科書 p.15）

“2 定点 F, F′ からの距離の差が一定である点 P の軌跡”を（⑮　双曲線　）といい，2 点 F, F′ をその（⑯　焦点　）という。

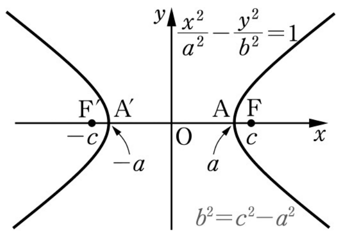
### 双曲線の方程式

（教科書 p.15）

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$　……①

①を双曲線の方程式の（⑰　標準形　）という。

教科書 15 ページの双曲線①と $x$ 軸との 2 つの交点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{A}'(-a,\ 0)$ を双曲線の（⑱　頂点　）といい，直線 AA′ を（⑲　主軸　）という。また，双曲線①は $x$ 軸，$y$ 軸，原点 O に関して対称である。この O を双曲線の（⑳　中心　）という。




| 双曲線 |
|---|
| 双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ について<br>焦点　$\mathrm{F}(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$,　$\mathrm{F}'(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$<br>双曲線上の点 P について　$\lvert\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'\rvert=2a$ |

**例6** 双曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ の焦点と頂点を求めてみよう。$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ において $a=4$, $b=3$ の場合であるから，$\sqrt{a^2+b^2}=5$ より，焦点は（　$(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$　）である。また，頂点は（　$(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$　）である。

**問9** 双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ の焦点と頂点を求めよ。

$\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ より，焦点は $(\sqrt{13},\ 0)$, $(-\sqrt{13},\ 0)$ である。
また，頂点は $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ である。

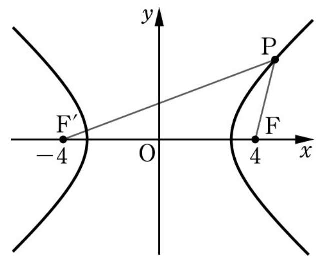
**例7** 2 点 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$ を焦点とし，2 焦点からの距離の差が 6 である双曲線の方程式を求めてみよう。

求める方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ とおく。

（　$\sqrt{a^2+b^2}=4$　）　← 焦点の $x$ 座標
（　$2a=6$　）　← 2 焦点からの距離の差

より，（　$a=3$, $b=\sqrt{7}$　）であり，

その方程式は　（　$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$　）




**問10** 2 点 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$ を焦点とし，2 焦点からの距離の差が 4 である双曲線の方程式を求めよ。

求める方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ とおく。

$\sqrt{a^2+b^2}=3$, $2a=4$ より

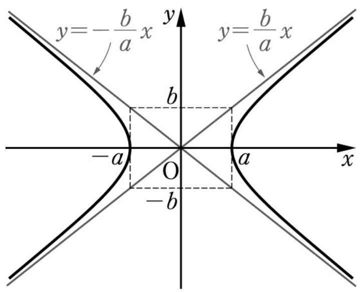
$a=2$, $b=\sqrt{5}$ であり，

その方程式は　$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

## 漸近線

（教科書 p.17）

一般に，双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ は，原点から遠ざかるにつれて 2 直線 $y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$ のどちらかに限りなく近づく。




このように，ある曲線が原点から遠ざかるにつれて限りなく近づく直線を，その曲線の（㉑　漸近線　）という。

| 双曲線の漸近線 |
|---|
| 双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ の漸近線は　$\boldsymbol{y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x}$ |

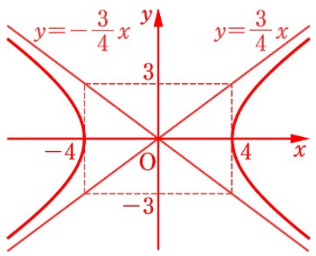
**例8** 教科書 16 ページの例 6 の双曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ の概形をかいてみよう。

漸近線は　（　$y=\frac{3}{4}x,\ y=-\frac{3}{4}x$　）

である。また，頂点は

（　$(4,\ 0),\ (-4,\ 0)$　）

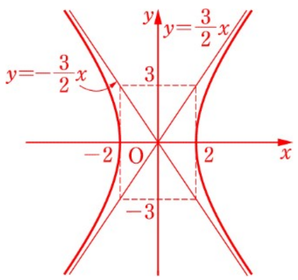
であり，概形は右の図のようになる。




**問11** 教科書 16 ページの問 9 の双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ について，漸近線を求め，その双曲線の概形をかけ。

漸近線は $\boldsymbol{y=\frac{3}{2}x,\ y=-\frac{3}{2}x}$ である。

また，頂点は $(2,\ 0),\ (-2,\ 0)$ であり，概形は次の図のようになる。

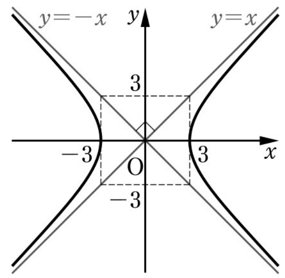



双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ において，$a=b$ ならば 2 つの漸近線は

$y=x,\ y=-x$

となり，直交する。2 つの漸近線が直交する双曲線を（㉒　直角双曲線　）という。

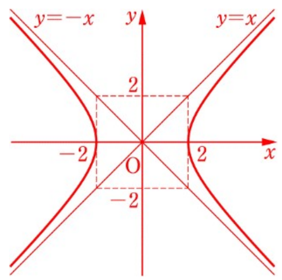
**例9** 双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ は（　直角双曲線　）であり，概形は右の図のようになる。




**問12** 双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ について，漸近線を求め，その双曲線の概形をかけ。

双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ は直角双曲線であり，その漸近線は $\boldsymbol{y=x,\ y=-x}$ である。

また，頂点は $(2,\ 0),\ (-2,\ 0)$ であり，概形は次の図のようになる。

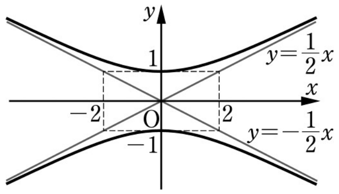


## $y$ 軸上に焦点をもつ双曲線

（教科書 p.19）

**例10** 双曲線 $\frac{x^2}{4}-y^2=-1$ について調べてみよう。

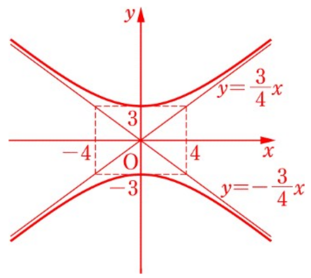
$\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ より，焦点は（　$(0,\ \sqrt{5}),\ (0,\ -\sqrt{5})$　）である。
また，漸近線は
（　$y=\frac{1}{2}x,\ y=-\frac{1}{2}x$　）
頂点は（　$(0,\ 1),\ (0,\ -1)$　）であり，概形は右の図のようになる。




**問13** 双曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$ の焦点，漸近線を求め，その双曲線の概形をかけ。

$\sqrt{16+9}=5$ より，焦点は $(\mathbf{0},\ \mathbf{5}),\ (\mathbf{0},\ -\mathbf{5})$ である。また，漸近線は $\boldsymbol{y=\frac{3}{4}x,\ y=-\frac{3}{4}x}$

頂点は $(0,\ 3),\ (0,\ -3)$ であり，概形は次の図のようになる。




放物線 $y^2=4px$，楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$

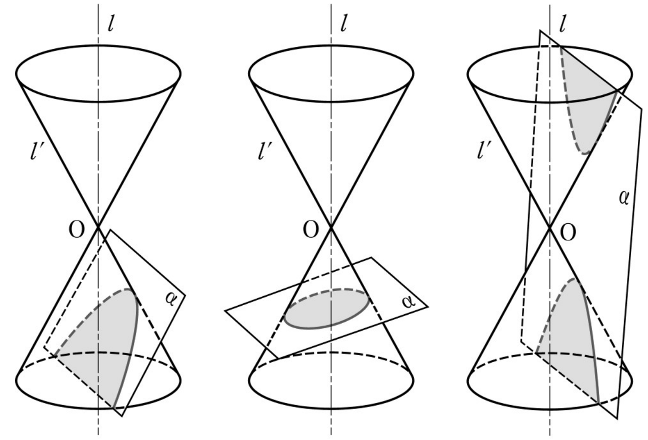
は，いずれも $x,\ y$ についての 2 次方程式で表されている。これらの曲線をまとめて（㉓　**2** 次曲線　）という。

## 参考　円錐曲線

（教科書 p.20）

1 つの直線 $l$ と 1 点 O で交わる直線 $l'$ が $l$ のまわりを空間内で回転するとき，$l'$ のえがく面を円錐面という。$l$ をその円錐面の（㉔　軸　），O を（㉕　頂点　），$l'$ を（㉖　母線　）という。

円錐面は頂点によって 2 つの部分に分けられる。頂点を通らない平面 $\alpha$ で円錐面を切るとき，その切り口は $\alpha$ と円錐面の交わり方によって，次のような曲線となる。




放物線　　楕円　　双曲線

$\alpha$ が円錐面の一方の部分だけに交わり，かつ，ある 1 つの母線に平行ならば，切り口は放物線となる。

$\alpha$ が円錐面の一方の部分だけに交わり，かつ，どの母線にも平行でないならば，切り口は円または楕円となる。

$\alpha$ が円錐面の 2 つの部分に交わるならば，切り口は双曲線となる。

このように，2 次曲線は平面による円錐面の切り口としても現れることが知られている。そのため，2 次曲線は（㉗　円錐曲線　）ともよばれる。

## ④ 2次曲線と平行移動

（教科書 p.21）

一般に，次のことが成り立つ。

| 曲線の平行移動 |
|---|
| 方程式 $f(x,\ y)=0$ で表される曲線を $x$ 軸方向に $p$，$y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動した曲線の方程式は $$f(x-p,\ y-q)=0$$ |

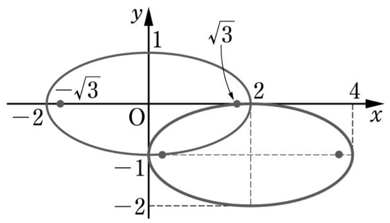
**例11** 楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ を $x$ 軸方向に 2，$y$ 軸方向に $-1$ だけ平行移動した楕円の方程式は

（　$\frac{(x-2)^2}{4}+(y+1)^2=1$　）

である。また，$\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ より，この楕円の焦点は

（　$(2+\sqrt{3},\ -1)$，$(2-\sqrt{3},\ -1)$　）

である。




**問14** 双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ を $x$ 軸方向に $-3$，$y$ 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線の方程式を求めよ。また，その焦点を求めよ。

双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ を $x$ 軸方向に $-3$，$y$ 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線の方程式は

$$\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

である。また，$\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ より，この双曲線の焦点は

$(-3+2\sqrt{2},\ 2)$，$(-3-2\sqrt{2},\ 2)$

**例題 2** 方程式 $y^2+4x+4y=0$ の表す図形は放物線であることを示し，その焦点と準線を求めよ。

**解** この方程式を変形すると

$(y+2)^2=-4x+4$

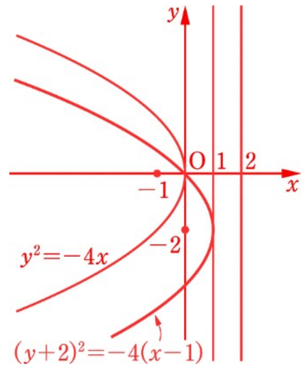
$(y+2)^2=-4(x-1)$　……①

①は，放物線

$y^2=-4x$　……②

を $x$ 軸方向に 1，$y$ 軸方向に $-2$ だけ平行移動した放物線を表す。

放物線②の焦点は $(-1,\ 0)$，準線は $x=1$ であるから，放物線①の焦点は $(0,-2)$，準線は $x=2$




**問15** 方程式 $y^2-x-2y=0$ の表す図形は放物線であることを示し，その焦点と準線を求めよ。

この方程式を変形すると

$(y-1)^2=x+1$　……①

より，放物線 $y^2=x$ を $x$ 軸方向に $-1$，$y$ 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線である。

また，放物線 $y^2=x$ の焦点は $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$，準線は $x=-\frac{1}{4}$ であるから，放物線①の焦点は $\left(-\frac{3}{4},\ 1\right)$，

準線は $x=-\frac{5}{4}$

**例題 3**　次の方程式はどのような図形を表すか。また，その概形をかけ。

(1)　$9x^2+4y^2+18x-16y-11=0$

(2)　$x^2-y^2+4y-5=0$

**解**　(1)　この方程式を変形すると

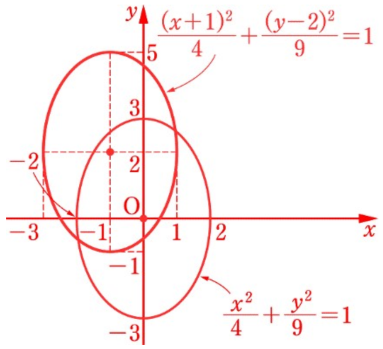
$$9(x+1)^2+4(y-2)^2=36$$

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

この方程式は，楕円

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

を $x$ 軸方向に $-1$，$y$ 軸方向に 2 だけ平行移動した楕円を表し，概形は上の図のようになる。




(2)　この方程式を変形すると

$$x^2-(y-2)^2=1$$

この方程式は，双曲線

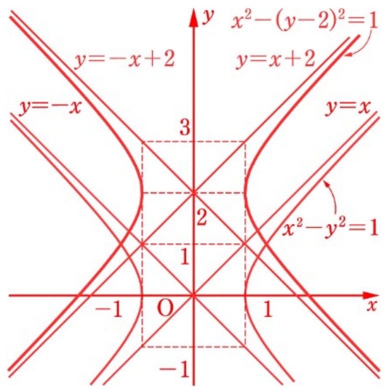
$$x^2-y^2=1$$

を $y$ 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線を表す。

この双曲線の漸近線は

$$y=x+2,\ y=-x+2$$

で，概形は右の図のようになる。




**問16** 次の方程式はどのような図形を表すか。また，その概形をかけ。

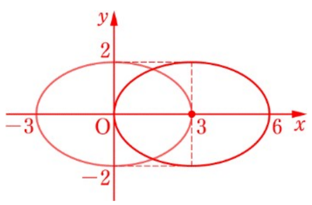
(1)　$4x^2+9y^2=24x$

この方程式を変形すると

$$4(x-3)^2+9y^2=36$$

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

この方程式は，楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ を $x$ 軸方向に 3 だけ平行移動した楕円を表し，概形は次の図のようになる。



(2)　$4x^2-y^2+8x+4y+4=0$

この方程式を変形すると

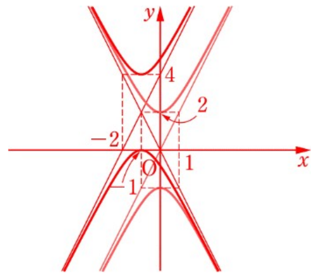
$$4(x+1)^2-(y-2)^2=-4$$

$$(x+1)^2-\frac{(y-2)^2}{4}=-1$$

この方程式は，双曲線 $x^2-\frac{y^2}{4}=-1$ を $x$軸方向に $-1$，$y$ 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線を表す。この双曲線の漸近線は

$$y=2x+4,\ y=-2x$$

で，概形は次の図のようになる。



## ⑤ 2次曲線と直線

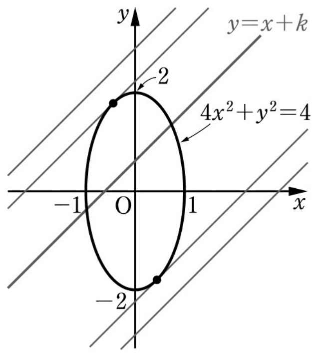
（教科書 p.24）

**例12** 楕円 $4x^2+y^2=4$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数は，定数 $k$ の値によってどのように変わるか調べてみよう。

これらの共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} 4x^2+y^2=4 & \cdots\cdots ① \\ y=x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

の実数解であるから，その個数を調べればよい。




②を①に代入して

（　$4x^2+(x+k)^2=4$　）

すなわち　（　$5x^2+2kx+k^2-4=0$　）　……③

③の判別式を $D$ とすると

（　$\dfrac{D}{4}=k^2-5(k^2-4)$　）

（　$=-4(k^2-5)$　）

共有点の個数は，③の異なる実数解の個数と一致するから

$D>0$　すなわち　（　$-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$　）のとき　　共有点（　は2個　）

$D=0$　すなわち　（　$k=\pm\sqrt{5}$　）のとき　　共有点（　は1個　）

$D<0$　すなわち　（　$k<-\sqrt{5},\ \sqrt{5}<k$　）のとき　　共有点（　なし　）

**問17** 放物線 $y^2=-8x$ と直線 $y=2x+k$ の共有点の個数は，定数 $k$ の値によってどのように変わるか調べよ。

放物線 $y^2=-8x$ と直線 $y=2x+k$ の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y^2=-8x & \cdots\cdots ① \\ y=2x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

の実数解である。

②を①に代入して

$(2x+k)^2=-8x$

すなわち

$4x^2+4(k+2)x+k^2=0$　……③

③の判別式を $D$ とすると

$\dfrac{D}{4}=\{2(k+2)\}^2-4k^2=16(k+1)$

共有点の個数は，③の異なる実数解の個数と一致するから

$D>0$　すなわち　$\boldsymbol{k>-1}$ **のとき　共有点は2個**

$D=0$　すなわち　$\boldsymbol{k=-1}$ **のとき　共有点は1個**

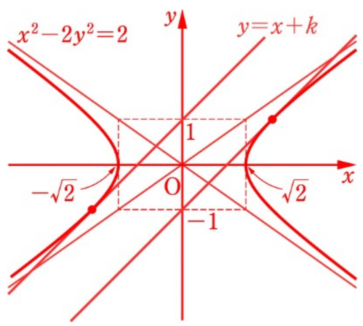
$D<0$　すなわち　$\boldsymbol{k<-1}$ **のとき　共有点なし**

教科書24ページの例12において，$D=0$ のとき，共有点は1個で，これは $D>0$ のときの2個の共有点が重なったものと考えることができる。このとき，直線は楕円に（㉘　接する　）といい，その直線を楕円の（㉙　接線　），接線と楕円の共有点を（㉚　接点　）という。

**例題 4**　双曲線 $x^2-2y^2=2$ と直線 $y=x+k$ が接するような定数 $k$ の値と，接点の座標を求めよ。

**解**

$$\begin{cases} x^2-2y^2=2 & \cdots\cdots ① \\ y=x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$




②を①に代入して

$$x^2-2(x+k)^2=2$$

すなわち

$$x^2+4kx+2k^2+2=0 \quad \cdots\cdots ③$$

③の判別式を $D$ とすると

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-(2k^2+2)=2(k^2-1)$$

双曲線①と直線②が接するとき，$D=0$ であるから

$k^2=1$ より　　$k=\pm1$

$k=1$ のとき，③の解は $x=-2$　これと②より $y=-1$

$k=-1$ のとき，③の解は $x=2$　これと②より $y=1$

以上から　$\begin{cases} k=1 \text{ のとき，接点の座標は } (-2,\ -1) \\ k=-1 \text{ のとき，接点の座標は } (2,\ 1) \end{cases}$

**問18** 楕円 $2x^2+y^2=2$ と直線 $y=-2x+k$ が接するような定数 $k$ の値と，接点の座標を求めよ。

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=2 & \cdots\cdots ① \\ y=-2x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②を①に代入して

$$2x^2+(-2x+k)^2=2$$

すなわち

$$6x^2-4kx+k^2-2=0 \quad \cdots\cdots ③$$

③の判別式を $D$ とすると

$$\frac{D}{4}=(-2k)^2-6(k^2-2)=-2(k^2-6)$$

楕円①と直線②が接するとき，$D=0$ であるから

$k^2=6$ より　　$k=\pm\sqrt{6}$

$k=\sqrt{6}$ のとき，③の解は　$x=\frac{\sqrt{6}}{3}$

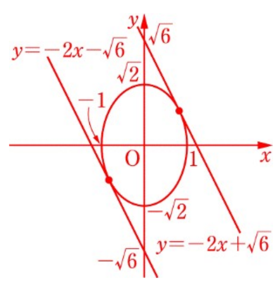
これと②より　$y=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$k=-\sqrt{6}$ のとき，③の解は　$x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

これと②より　$y=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

以上から

$$\begin{cases} \boldsymbol{k=\sqrt{6}} \text{ のとき，} \\ \quad \text{接点の座標は } \left(\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}}\right) \\ \boldsymbol{k=-\sqrt{6}} \text{ のとき，} \\ \quad \text{接点の座標は } \left(\boldsymbol{-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}}\right) \end{cases}$$



## 参考　2 次曲線と離心率

（教科書 p.26）

**例1** 点 P$(x,\ y)$ について，定点 F$(6,\ 0)$ からの距離 PF と $y$ 軸からの距離 PH の比の値を$e=\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ とおく。

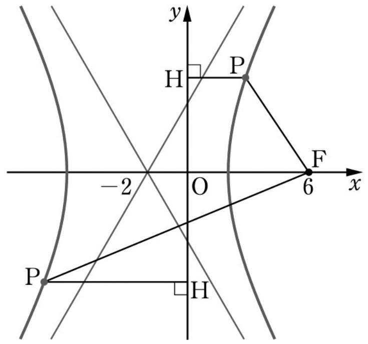
$e=2$ のときの点 P の軌跡を求めてみよう。

PF $=\sqrt{(x-6)^2+y^2}$

PH $=|x|$

PF $=2$PH より

（　$\sqrt{(x-6)^2+y^2}=2|x|$　）




両辺を 2 乗して

$(x-6)^2+y^2=4x^2$

$3x^2-y^2+12x-36=0$

$3(x+2)^2-y^2=48$

すなわち

（　$\frac{(x+2)^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$　）　……①

これは，双曲線

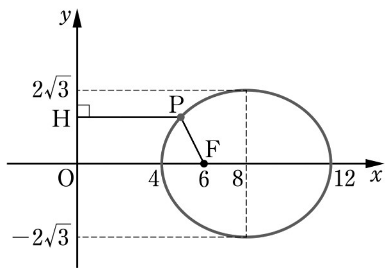
（　$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$　）　……②

を $x$ 軸方向に（　$-2$　）だけ平行移動した双曲線を表している。

**例2** 教科書 26 ページの例 1 において，$e=\frac{1}{2}$ のときの点 P の軌跡を求めてみよう。

2PF $=$ PH より

（　$2\sqrt{(x-6)^2+y^2}=|x|$　）




両辺を 2 乗して

$4(x-6)^2+4y^2=x^2$

$3x^2+4y^2-48x+144=0$

$3(x-8)^2+4y^2=48$

すなわち　（　$\frac{(x-8)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　）　……③

これは，楕円　（　$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　）　……④

を $x$ 軸方向に（　8　）だけ平行移動した楕円を表している。

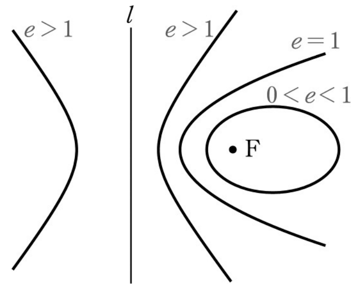
一般に，定点 F からの距離 PF と定直線 $l$ からの距離 PH の比の値 $e=\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ が一定である点 P の軌跡は，F を焦点の 1 つとする 2 次曲線であり

$0<e<1$ のとき　楕円

$e=1$ のとき　放物線

$e>1$ のとき　双曲線

であることが知られている。この $e$ の値を，2 次曲線の（㉛　離心率　）といい，直線 $l$ を（㉜　準線　）という。




**問1** 教科書 26 ページの例 1 において，次の場合の点 P の軌跡を求めよ。

(1)　$e=\sqrt{2}$

$e=\sqrt{2}$ のとき

PF $=\sqrt{(x-6)^2+y^2}$

PH $=|x|$

PF $=\sqrt{2}$PH より

$\sqrt{(x-6)^2+y^2}=\sqrt{2}|x|$

両辺を 2 乗して

$(x-6)^2+y^2=2x^2$

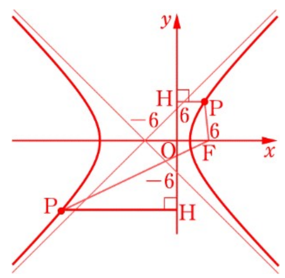
$x^2-y^2+12x-36=0$

$(x+6)^2-y^2=72$

すなわち

$\frac{(x+6)^2}{72}-\frac{y^2}{72}=1$

これは，双曲線 $\frac{x^2}{72}-\frac{y^2}{72}=1$ を $x$ 軸方向に $-6$ だけ平行移動した双曲線を表している。



(2)　$e=1$

$e=1$ のとき

$\mathrm{PF}=\sqrt{(x-6)^2+y^2}$

$\mathrm{PH}=|x|$

$\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$ より

$\sqrt{(x-6)^2+y^2}=|x|$

両辺を 2 乗して

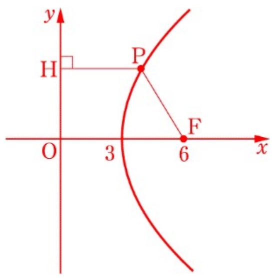
$(x-6)^2+y^2=x^2$

$y^2-12x+36=0$

すなわち

$y^2=12(x-3)$

**これは，放物線 $y^2=12x$ を $x$ 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線を表している。**




(3)　$e=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$e=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$\mathrm{PF}=\sqrt{(x-6)^2+y^2}$

$\mathrm{PH}=|x|$

$\sqrt{2}\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$ より

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x-6)^2+y^2}=|x|$

両辺を 2 乗して

$2\{(x-6)^2+y^2\}=x^2$

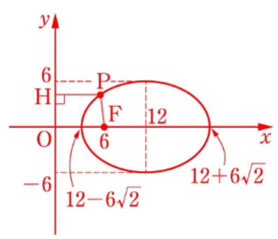
$x^2+2y^2-24x+72=0$

$(x-12)^2+2y^2=72$

すなわち

$$\frac{(x-12)^2}{72}+\frac{y^2}{36}=1$$

**これは，楕円 $\frac{x^2}{72}+\frac{y^2}{36}=1$ を $x$ 軸方向に 12 だけ平行移動した楕円を表している。**



## Training

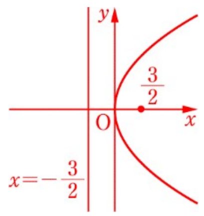
（教科書 p.28）

**1**　次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

（1）　$y^2 = 6x$

$y^2 = 6x = 4 \cdot \frac{3}{2}x$ と変形できるから

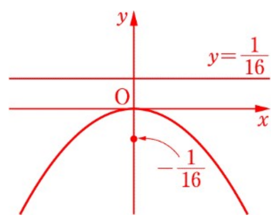
**焦点は $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$，準線は $x = -\frac{3}{2}$**




（2）　$4x^2 = -y$

$x^2 = -\frac{1}{4}y = 4 \cdot \left(-\frac{1}{16}\right)y$ と変形できるから

**焦点は $\left(0,\ -\frac{1}{16}\right)$，準線は $y = \frac{1}{16}$**




**2**　原点を頂点とする放物線のうち，次の条件を満たすものの方程式を求めよ。

（1）　焦点が $(2,\ 0)$

求める方程式を $y^2 = 4px$ とおく。

焦点が $(2,\ 0)$ より　　$p = 2$

よって　　$\boldsymbol{y^2 = 8x}$

（2）　準線が $y = 3$

求める方程式を $x^2 = 4py$ とおく。

準線が $y = 3$ より　　$p = -3$

よって　　$\boldsymbol{x^2 = -12y}$

（3）　軸が $x$ 軸で点 $(4,\ 6)$ を通る。

求める方程式を $y^2 = 4px$ とおく。

点 $(4,\ 6)$ を通るから

$36 = 16p$　すなわち　$p = \frac{9}{4}$

よって　　$\boldsymbol{y^2 = 9x}$

**3**　次の楕円の焦点と，楕円上の点の 2 焦点からの距離の和を求めよ。

（1）　$3x^2 + 4y^2 = 12$

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ と変形できる。

$\sqrt{4-3} = 1$ より，**焦点は**

　**$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$**

**2 焦点からの距離の和は**

　$2 \cdot 2 = \boldsymbol{4}$

（2）　$16x^2 + 12y^2 = 192$

$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ と変形できる。

$\sqrt{16-12} = 2$ より，**焦点は**

　**$(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$**

**2 焦点からの距離の和は**

　$2 \cdot 4 = \boldsymbol{8}$

**4**　次の条件を満たす楕円の方程式を求めよ。

(1)　2 点 $(3,\ 0)$, $(-3,\ 0)$ を焦点とし，2 焦点からの距離の和が $6\sqrt{2}$ である。

求める方程式を $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ とおく。

$\sqrt{a^2-b^2}=3$

$2a=6\sqrt{2}$

より $a=3\sqrt{2}$, $b=3$ であり，

その方程式は　$\boldsymbol{\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1}$

(2)　2 点 $(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$ を焦点とし，短軸の長さが 8 である。

求める方程式を $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ とおく。

$\sqrt{b^2-a^2}=2$

$2a=8$

より $a=4$, $b=2\sqrt{5}$ であり，

その方程式は　$\boldsymbol{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1}$

**5**　円 $x^2+y^2=9$ を $x$ 軸を基準にして $y$ 軸方向に $\frac{5}{3}$ 倍して得られる図形は，どのような曲線か。

点 $P(s,\ t)$ を円 $x^2+y^2=9$ 上の点とすると

$s^2+t^2=9$　……①

が成り立つ。また，点 P を $x$ 軸を基準にして $y$軸方向に $\frac{5}{3}$ 倍した点を $Q(x,\ y)$ とすると

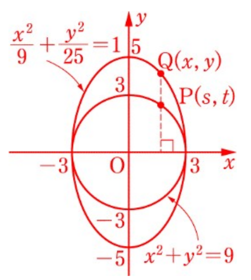
$x=s$, $y=\frac{5}{3}t$ より

$s=x$, $t=\frac{3}{5}y$　……②

②を①に代入すると

$x^2+\frac{9}{25}y^2=9$

よって，求める曲線は　**楕円** $\boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1}$




**6**　次の双曲線の焦点と漸近線を求め，その双曲線の概形をかけ。

(1)　$4x^2-5y^2=20$

$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$

$\sqrt{5+4}=3$

より，焦点は

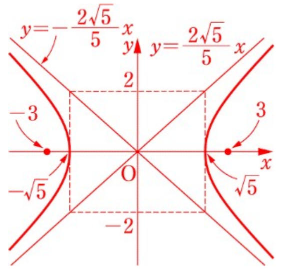
$\boldsymbol{(3,\ 0),\ (-3,\ 0)}$

また，漸近線は

$y=\frac{2}{\sqrt{5}}x$, $y=-\frac{2}{\sqrt{5}}x$

つまり　$\boldsymbol{y=\frac{2\sqrt{5}}{5}x,\ y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}x}$

頂点は $(\sqrt{5},\ 0)$, $(-\sqrt{5},\ 0)$ であり，概形は上の図のようになる。




(2)　$9x^2-4y^2=-36$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1$

$\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

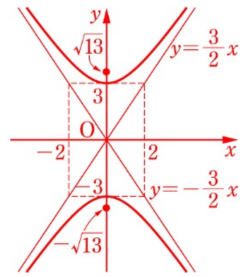
より，焦点は

$\boldsymbol{(0,\ \sqrt{13}),\ (0,\ -\sqrt{13})}$

また，漸近線は

$\boldsymbol{y=\frac{3}{2}x,\ y=-\frac{3}{2}x}$

頂点は $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$ であり，概形は上の図のようになる。



**7**　次の条件を満たす双曲線の方程式を求めよ。

(1)　2 点 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ を焦点とし，頂点間の距離が 2 である。

求める方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ とおく。

$\sqrt{a^2+b^2}=2$

$2a=2$

より，$a=1$, $b=\sqrt{3}$ であり，

その方程式は　$\boldsymbol{x^2-\frac{y^2}{3}=1}$

(2)　点 $(0,\ -2)$ を頂点の 1 つとし，$y=x$ と $y=-x$ を漸近線とする。

求める方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ とおく。

$b=2$

$\frac{b}{a}=1$

より，$a=2$, $b=2$ であり，

その方程式は　$\boldsymbol{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=-1}$

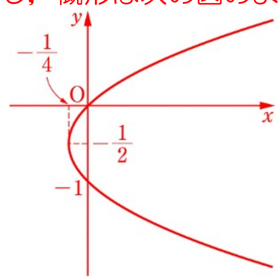
**8**　次の方程式はどのような図形を表すか。また，その概形をかけ。

(1)　$y^2+y=x$

この方程式を変形すると

$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=x+\frac{1}{4}$

この方程式は，**放物線 $\boldsymbol{y^2=x}$ を $\boldsymbol{x}$ 軸方向に $\boldsymbol{-\frac{1}{4}}$, $\boldsymbol{y}$ 軸方向に $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$ だけ平行移動した放物線**を表し，概形は次の図のようになる。



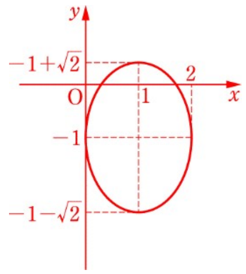

(2)　$2x^2+y^2-4x+2y+1=0$

この方程式を変形すると

$2(x-1)^2+(y+1)^2=2$

$(x-1)^2+\frac{(y+1)^2}{2}=1$

この方程式は，**楕円 $\boldsymbol{x^2+\frac{y^2}{2}=1}$ を $\boldsymbol{x}$ 軸方向に 1, $\boldsymbol{y}$ 軸方向に −1 だけ平行移動した楕円**を表し，概形は次の図のようになる。




(3)　$x^2-y^2+4y+5=0$

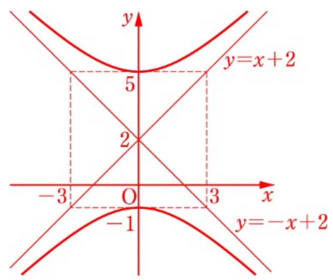
この方程式を変形すると

$x^2-(y-2)^2=-9$

$\frac{x^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{9}=-1$

この方程式は，**双曲線 $\boldsymbol{\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=-1}$ を $\boldsymbol{y}$ 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線**を表す。

この双曲線の漸近線は $y=x+2$, $y=-x+2$ で，概形は次の図のようになる。



**9**　次の２次曲線と直線 $y=\frac{1}{2}x+k$ の共有点の個数は，定数 $k$ の値によってどのように変わるか調べよ。また，接するときの接点の座標を求めよ。

（1）　$y^2=4x$

$$\begin{cases} y^2=4x & \cdots\cdots① \\ y=\dfrac{1}{2}x+k & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②を①に代入して

$$\left(\frac{1}{2}x+k\right)^2=4x$$

すなわち

$x^2+4(k-4)x+4k^2=0$　　……③

③の判別式を $D$ とすると

$$\frac{D}{4}=\{2(k-4)\}^2-4k^2=-32(k-2)$$

共有点の個数は，③の異なる実数解の個数と一致するから

$D>0$　すなわち　$\boldsymbol{k<2}$ **のとき，共有点は 2 個**

$D=0$　すなわち　$\boldsymbol{k=2}$ **のとき，共有点は 1 個**

$D<0$　すなわち　$\boldsymbol{k>2}$ **のとき，共有点なし**

放物線①と直線②が接するとき，$D=0$

であるから　　$k=2$

このとき，③の解は　　$x=4$

これと②より　　$y=4$

以上から，**接するときの接点の座標は　$\boldsymbol{(4,\ 4)}$**

（2）　$x^2+12y^2=12$

$$\begin{cases} x^2+12y^2=12 & \cdots\cdots① \\ y=\dfrac{1}{2}x+k & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②を①に代入して

$$x^2+12\left(\frac{1}{2}x+k\right)^2=12$$

すなわち

$x^2+3kx+3(k^2-1)=0$　　……③

③の判別式を $D$ とすると

$D=(3k)^2-4\cdot3(k^2-1)$

$\quad=-3(k^2-4)$

共有点の個数は，③の異なる実数解の個数と一致するから

$D>0$　すなわち　$\boldsymbol{-2<k<2}$ **のとき，共有点は 2 個**

$D=0$　すなわち　$\boldsymbol{k=\pm2}$ **のとき，共有点は 1 個**

$D<0$　すなわち　$\boldsymbol{k<-2,\ 2<k}$ **のとき，共有点なし**

楕円①と直線②が接するとき，$D=0$ であるから　　$k=\pm2$

$k=2$ のとき，③の解は　　$x=-3$

これと②より　　$y=\frac{1}{2}$

$k=-2$ のとき，③の解は　　$x=3$

これと②より　　$y=-\frac{1}{2}$

以上から，**接するときの接点の座標は**

$$\begin{cases} \boldsymbol{k=2} \textbf{ のとき，} \boldsymbol{\left(-3,\ \frac{1}{2}\right)} \\ \boldsymbol{k=-2} \textbf{ のとき，} \boldsymbol{\left(3,\ -\frac{1}{2}\right)} \end{cases}$$

(3)　$x^2-3y^2=-12$

$$\begin{cases} x^2-3y^2=-12 & \cdots\cdots ① \\ y=\dfrac{1}{2}x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②を①に代入して

$$x^2-3\left(\frac{1}{2}x+k\right)^2=-12$$

すなわち

$x^2-12kx-12(k^2-4)=0$　　……③

③の判別式を $D$ とすると

$$\frac{D}{4}=(-6k)^2+12(k^2-4)$$

$$=48(k^2-1)$$

共有点の個数は，③の異なる実数解の個数と一致するから

$D>0$　すなわち　**$k<-1$，$1<k$ のとき，共有点は 2 個**

$D=0$　すなわち　**$k=\pm1$ のとき，共有点は 1 個**

$D<0$　すなわち　**$-1<k<1$ のとき，共有点なし**

双曲線①と直線②が接するとき，$D=0$

であるから　　$k=\pm1$

$k=1$ のとき，③の解は　　$x=6$

これと②より　　$y=4$

$k=-1$ のとき，③の解は　　$x=-6$

これと②より　　$y=-4$

以上から，**接するときの接点の座標は**

$$\begin{cases} \boldsymbol{k=1} \text{ のとき，} \boldsymbol{(6,\ 4)} \\ \boldsymbol{k=-1} \text{ のとき，} \boldsymbol{(-6,\ -4)} \end{cases}$$