2 節 いろいろな関数の導関数

1 三角関数の導関数

三角関数の導関数

（教科書 p.149）

次の公式が成り立つ。

三角関数の導関数	
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$	$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

例題 1 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$

(2) $y = \cos^3 x$

(3) $y = x\sin x$

解

問 1 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \cos 5x$

(2) $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

(3) $y = \sin^2 x$

(4) $y = x\cos x$

(5) $y = \sin 2x\cos x$

(6) $y = \dfrac{x}{\sin x}$

問 2 $\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ であることを示せ。

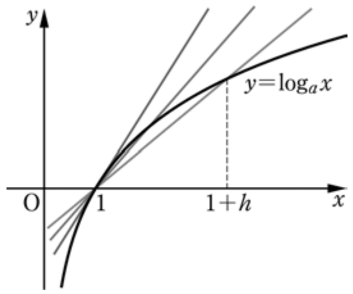
2 対数関数・指数関数の導関数

対数関数の導関数

（教科書 p.151）

対数関数 $\log_a x$ の $x=1$ における微分係数を考えてみよう。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+h)-\log_a 1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+h)$$
$$=\lim_{h\to 0}\log_a(1+h)^{\frac{1}{h}}$$



この値を求めるには，$h\to 0$ としたときの $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の極限値がわかればよい。

この極限値は存在し，その値は無理数で $2.718281828459045\cdots$ であることが知られている。この値を文字 e で表す。

すなわち　（①　　　　　　　　　　）

対数関数 $\log_a x$ の $x=1$ における微分係数を e を用いて表すと

$$\lim_{h\to 0}\log_a(1+h)^{\frac{1}{h}}=\log_a e \quad \cdots\cdots ①$$

①において $a=e$ とすれば，$x=1$ における微分係数は 1 となる。

底が e である対数を（②　　　　　　　）という。今後，単に $\log x$ と書けば，自然対数を表すものとする。　$\boxed{\log x=\log_e x}$

次の公式が成り立つ。

対数関数の導関数
$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ 　　　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\log a}$

例題 2　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\log(3x+2)$

(2)　$y=x^2\log x$

(3)　$y=\log_2(3x-1)$

解

問 3　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\log 5x$

(2)　$y=(\log x)^3$

(3)　$y=x\log 4x$

(4)　$y=\log_3 x$

（③　　　　　　　　　　　　）

例 1　(1)　関数 $y=\log|4x+5|$ を微分すると

$y'=$

⑵　関数 $y=\log_2|5x+3|$ を微分すると

$y'=$

問 4　次の関数を微分せよ。

（1）　$y=\log|x^2-3|$

⑵　$y=\log_4|x-1|$

対数微分法

（教科書 p.153）

関数 $y=f(x)$ が微分可能であるとする。$f(x)\neq 0$ であるような x の範囲においては $\log|y|$ も微分可能であり，合成関数の微分法によって

$$(\log|y|)'=\frac{d}{dy}\log|y|\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\cdot y'$$

すなわち　（④　　　　　　）

このことを用いた導関数の求め方を，（⑤　　　　　　）という。

例 2　関数 $y=\frac{(x-2)^2}{x+1}$ の導関数を求めてみよう。

$$|y|=\frac{|x-2|^2}{|x+1|}$$

であるから，この式の両辺の対数をとって

$$\log|y|=2\log|x-2|-\log|x+1|$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)-(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\frac{x+4}{(x-2)(x+1)}$$

ゆえに　$y'=\frac{(x-2)^2}{x+1}\cdot\frac{x+4}{(x-2)(x+1)}=\frac{(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$

問 5　対数微分法により，次の関数を微分せよ。

（1）　$y=\frac{x^2(x-1)}{x-2}$

⑵　$y=\sqrt[3]{x^2(x+5)}$

x^α の導関数

（教科書 p.154）

x^α の導関数は次のようになる。

$\boldsymbol{x^\alpha}$ の導関数
$\boldsymbol{\alpha}$ が実数のとき　　$(\boldsymbol{x^\alpha})'=\boldsymbol{\alpha x^{\alpha-1}}$

問 6　次の関数を微分せよ。

（1）　$y=(5x)^{\sqrt{2}}$

⑵　$y=x^\alpha\log x$　ただし，α は実数の定数

指数関数の導関数

（教科書 p.155）

次の公式が成り立つ。

指数関数の導関数
$(e^x)' = e^x$　　　　$(a^x)' = a^x \log a$

例 3 (1)　$(2^x)' =$

(2)　$(e^{5x})' =$

問 7　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = 3^x$

(2)　$y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

(3)　$y = e^{-2x}$

例題 3　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = e^{2x-1} + 3^x$

(2)　$y = xe^{-x}$

解

問 8　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = e^{x-2} + 5^x$

(2)　$y = \frac{x^2}{e^x}$

(3)　$y = (e^x + e^{-x})^2$

(4)　$y = e^{x^2}$

3　高次導関数

（教科書 p.156）

関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，$f'(x)$ の導関数を $f(x)$ の（⑥　　　　　　　　）といい

$$y'',\quad f''(x),\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

などの記号で表す。

これに対して，$f'(x)$ を $f(x)$ の（⑦　　　　　　　　）という。

また，第 2 次導関数 $f''(x)$ の導関数を $f(x)$ の（⑧　　　　　　　　）といい

$$y''',\quad f'''(x),\quad \frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{d^3}{dx^3}f(x)$$

などの記号で表す。

例 4　$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とすれば

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c,\quad y'' = 6ax + 2b,\quad y''' = 6a$$

問 9 次の関数の第 3 次までの導関数を求めよ。

(1) $y = x^4$

(2) $y = e^{3x}$

(3) $y = \log x$

(4) $y = \sin ax$

一般に，自然数 n に対して，関数 $y = f(x)$ を n 回微分することによって得られる関数を，$y = f(x)$ の（⑨　　　　　　　）といい

$$y^{(n)},\quad f^{(n)}(x),\quad \frac{d^n y}{dx^n},\quad \frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

などの記号で表す。

第 2 次以上の導関数を（⑩　　　　　　　）という。

例 5 $y = e^x$ とすれば

$y' =$　　　　，　$y'' =$　　　　，　$y''' =$　　　　，　$\cdots$，　$y^{(n)} =$　　　　，　$\cdots$

例 6 関数 $y = e^{-2x+3}$ の第 n 次導関数を求めてみよう。

$y' =$

$=$

$y'' =$

$y''' =$

以下同様に計算すれば

$y^{(n)} =$

となる。

問 10 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1) $y = 5e^x + e^{-x}$

(2) $y = 2^x$

例 7 $y = \sin x$ とすれば

$y' =$　　　　，　$y'' =$　　　　，　$y''' =$　　　　，　$y^{(4)} =$

となり，以後は同じ計算がくり返される。

問 11 教科書 157 ページの例 7 にならって，関数 $y = \cos x$ の第 5 次までの導関数を求めよ。

例題 4 **証明**

関数 $y=e^{x}\cos x$ は，$y''-2y'+2y=0$ を満たすことを示せ。

問 12 関数 $y=e^{-x}\sin x$ は，$y''+2y'+2y=0$ を満たすことを示せ。

問題

（教科書 p.158）

9 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\cos^{2}x$

(2) $y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$

(3) $y=\frac{1}{\tan(3x-\pi)}$

(4) $y=\sqrt{1+\cos x}$

(5) $y=\frac{1}{\sin x\cos x}$

(6) $y=\cos\frac{1}{x}$

１０　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = \cos^3 2x$

(2)　$y = \frac{1}{1+\sin 4x}$

１１　次の関数を微分せよ。

(1)　$y = x^3 3^{-x}$

(2)　$y = e^{\sqrt{x}}$

(3)　$y = \log\left(x + \sqrt{x^2+3}\right)$

(4)　$y = e^x \log x$

１２　対数微分法により，次の関数を微分せよ。

$$y = \sqrt{\frac{x^2-9}{x+8}}$$

１３　次の関数の第 4 次導関数を求めよ。

（1）　$y = xe^{x}$

⑵　$y = 3^{2x}$

１４　x の関数 $u,\ v$ の第 2 次導関数が存在するとき，次の式が成り立つことを証明せよ。

$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$

１５　次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

（1）　$y = \frac{1}{x+1}$

⑵　$y = e^{ax+b}$

１６ 関数 $y = x\sqrt{1 + x^2}$ は，次の等式を満たすことを示せ。

$(1 + x^2)y'' + xy' = 4y$

参 考　因数定理の拡張

（教科書 p.159）

整式 $f(x)$ と実数 α に対して，次のことが成り立つ。

〔1〕（⑪　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

〔2〕（⑫　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

〔1〕は数学 II で学んだ（⑬　　　　　　　　　　）である。

一般に，n を正の整数とするとき，次のことが成り立つ。

（⑭　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

（⑮　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

整式 $f(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れるとき，α を方程式 $f(x)=0$ の（⑯　　　　　　）という。上に示したように，α が方程式 $f(x)=0$ の重解であるための必要十分条件は $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ である。