# 1 節 微分法

## 1 導関数

（教科書 p.134）

関数 $f(x)$ について，極限値 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，この値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における（①　　　　　　　　）または変化率といい，（②　　　　　　　）で表す。

すなわち　$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

また，このとき，$f(x)$ は $x=a$ で（③　　　　　　　　）であるという。

**例 1** 関数 $f(x)=\frac{1}{x}$ について，$x=2$ における微分係数を求めてみよう。

$f'(2)=$

**問 1** 関数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ について，$x=2$ における微分係数を求めよ。

$f'(a)$ の定義式において $a+h=x$ とおくと，$h\to0$ のとき $x\to a$ であるから，

（④　　　　　　　　　　　　　）と書くこともできる。

## 微分可能と連続

（教科書 p.135）

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$f'(a)$ が存在するから

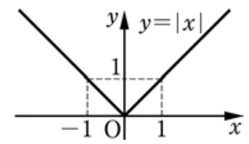
$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\left\{(x-a)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}=0\cdot f'(a)=0$$

したがって，$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ となり，次のことがいえる。

| 微分可能ならば連続 |
| --- |
| 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，<br>$f(x)$ は $x=a$ で連続である。 |

このことの逆は，一般には成り立たない。すなわち
関数 $f(x)$ が $x=a$ で（⑤　　　　　　　　　　）
$f(x)$ は $x=a$ で（⑥　　　　　　　　　　　　）

**例 2** 関数 $f(x)=|x|$ は，$x=0$ で連続である。ところが



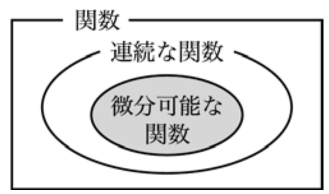

$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=$

$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=$

となり，（　　　　　　　　　　　）
すなわち，$f(x)=|x|$ は（　　　　　）で（　　　　　　　　　　）

**問 2** 関数 $f(x)=|x(x-2)|$ が $x=2$ で微分可能であるかどうかを調べよ。

関数 $f(x)$ がある区間 $I$ に属するすべての値 $a$ で微分可能であるとき，$f(x)$ は（⑦　　　　　　　　　）であるという。このとき，$f(x)$ は区間 $I$ で連続である。



## 導関数

（教科書 p.136）

関数 $f(x)$ がある区間 $I$ で微分可能であるとき，$I$ に属するそれぞれの値 $a$ に微分係数 $f'(a)$ を対応させると，$I$ で定義された $x$ の関数 $f'(x)$ が得られる。これを関数 $f(x)$ の（⑧　　　　　　　）といい，導関数 $f'(x)$ を求めることを，関数 $f(x)$ を（⑨　　　　　　　）という。

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，次の式によって定義される。

（⑩　　　　　　　　　　　　　）

関数 $y=f(x)$ において，$x$ の増分を$\Delta x$，それに対する $y$ の増分を$\Delta y$とすると，上の式は次のように表すこともできる。

（⑪　　　　　　　　　　　　　　　　　）

**例題 1**　導関数の定義にしたがって，関数 $f(x)=\sqrt{x}$ を微分せよ。

**解**

**問 3**　導関数の定義にしたがって，次の関数を微分せよ。

（1）　$f(x)=\frac{3}{x}$

⑵　$f(x)=\sqrt{x+2}$

## $x^n$ の導関数

（教科書 p.137）

一般に，関数 $x^n$ の導関数は，次のようになる。

| |
|---|
| **$x^n$ の導関数 1** |
| $n$ が正の整数のとき　　$(x^n)'=nx^{n-1}$ |

**問 4**　教科書 137 ページの $x^n$ の導関数 1 の公式を用いて，次の関数の導関数を求めよ。

（1）　$y=x^5$

⑵　$y=x^6$

⑶　$y=x^{12}$

## 導関数の性質

（教科書 p.138）

2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が微分可能なとき，次の公式が成り立つ。

| 導関数の公式 | |
|---|---|
| $\boxed{1}$ $(\boldsymbol{c})' = \boldsymbol{0}$ | ただし，$c$ は定数 |
| $\boxed{2}$ $\{\boldsymbol{kf(x)}\}' = \boldsymbol{kf'(x)}$ | ただし，$k$ は定数 |
| $\boxed{3}$ $\{\boldsymbol{f(x)+g(x)}\}' = \boldsymbol{f'(x)+g'(x)}$ | |
| $\boxed{4}$ $\{\boldsymbol{f(x)-g(x)}\}' = \boldsymbol{f'(x)-g'(x)}$ | |

問 5 教科書 138 ページの導関数の公式 $\boxed{2}$ を証明せよ。

問 6 教科書 138 ページの導関数の公式を用いて，次の式が成り立つことを示せ。
関数 $f(x)$，$g(x)$ について，$k$，$l$ を定数とするとき

$$\{kf(x)+lg(x)\}' = kf'(x)+lg'(x)$$

例 3 関数 $y = 2x^7 + 5x^3 - 18x + 15$ を微分してみよう。

$y' =$

問 7 次の関数を微分せよ。

（1） $y = x^5 + 5x^4 - 7x^3 + 4$

（2） $y = (x^3 - 1)^2$

# 2 積・商の微分法

## 積の微分法

（教科書 p.139）

微分可能な 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ の積として表される関数 $f(x)g(x)$ は微分可能であり，その導関数は次のようになる。

| 積の導関数 |
|---|
| $\{\boldsymbol{f(x)g(x)}\}' = \boldsymbol{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$ |

**証明** $y = f(x)g(x)$ とおく。
$x$ の増分を $\Delta x = h$ とすると，これに対する $y$ の増分 $\Delta y$ は

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)\\ &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)\\ &= \{f(x+h)-f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h)-g(x)\}\end{aligned}$$

したがって，両辺を $\Delta x = h$ で割ると

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h) + f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

ここで，$g(x)$ は連続関数であるから，$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$となり

$$\begin{aligned}y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

**例 4** 関数 $y=(x^2-3x+5)(2x+1)$ を微分してみよう。

$y'=$

**問 8** 次の関数を微分せよ。

(1) $y=(3x+1)(x^2-4)$

(2) $y=(5x^2-3x-4)(2x+1)$

(3) $y=(x^2+3)(x^2-2x+2)$

(4) $y=(x^3+1)(1-x^4)$

## 商の微分法

（教科書 p.140）

微分可能な 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ の商として表される関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ は微分可能であり，その導関数は次のようになる。

| 商の導関数 |
| --- |
| $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$<br>とくに　$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ |

**証明** はじめに，関数 $y=\frac{1}{g(x)}$ の導関数を求める。

$x$ の増分を $\Delta x=h$ とすると，これに対する $y$ の増分 $\Delta y$ は

$$\Delta y=\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}$$
$$=\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$$

したがって，両辺を $\Delta x=h$ で割ると

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

ここで，$g(x)$ は連続関数であるから，$\lim_{h\to0}g(x+h)=g(x)$ となり

$$y'=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to0}\left\{-\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$
$$=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

次に，関数 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ について，積の導関数の公式を用いると

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\}'=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'$$
$$=\frac{f'(x)}{g(x)}+f(x)\cdot\frac{-g'(x)}{\{g(x)\}^2}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

**例 5** (1) $\left(\frac{1}{2x+3}\right)' =$

(2) $\left(\frac{3x+2}{x^2-1}\right)' =$

**問 9** 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \frac{1}{4x-1}$

(2) $y = \frac{x}{1+x^2}$

(3) $y = \frac{2x-5}{3x^2+1}$

$n$ が負の整数のとき，$n = -m$ とおくと，$m$ は正の整数であるから

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

ゆえに，$n$ が負の整数のときにも，公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ が成り立つ。

さらに，$n = 0$ のときも含めて，次の公式が成り立つ。

| $\boldsymbol{x^n}$ の導関数 2 |
| --- |
| $n$ が整数のとき　　$\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$ |

**例 6** 関数 $y = \frac{x^3-5x^2+4}{x^2}$ を微分してみよう。

（　　　　　　　　　　　　）となるから

$y' =$

**問 10** 次の関数を微分せよ。

(1) $y = \frac{1}{6x^3}$

(2) $y = x + \frac{1}{x}$

(3) $y = \frac{x^4+3x-2}{x^2}$

## 3 合成関数の微分法

### 合成関数の微分法

（教科書 p.142）

関数 $y=f(u)$ と関数 $u=g(x)$ がともに微分可能ならば，合成関数 $y=f\big(g(x)\big)$ も微分可能であり，次の公式が成り立つ。

| 合成関数の微分法 |
|---|
| $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ |

**証明**　$x$ の増分 $\Delta x$ に対する $u=g(x)$ の増分を $\Delta u$ とし，$u$ の増分 $\Delta u$ に対する $y=f(u)$ の増分を $\Delta y$ とする。このとき

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ここで，$g(x)$ の連続性より

$\Delta x\to 0$ のとき　　$\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)\to 0$

であるから

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

ゆえに　　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

**例 7** 関数 $y=(x^2+3)^5$ を微分してみよう。

$u=x^2+3$ とおくと，(　　　　　　　) であるから

$\dfrac{dy}{du}=$　　　　　　　，$\dfrac{du}{dx}=$

ゆえに　$\dfrac{dy}{dx}=$

**問 11** 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(x^2-2)^3$

(2)　$y=(2x^3+5)^7$

合成関数の微分法の公式は次のように表すこともできる。

(⑫　　　　　　　　　　　　　　　　　)

**例題 2**　関数 $y=(x^2-5x+2)^4$ を微分せよ。

**考え方**　$g(x)=x^2-5x+2$ とおくと，$y=\{g(x)\}^4$ である。

**解**

**問 12** 次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(1-4x)^5$

(2)　$y=(5x^3+3x-1)^6$

(3)　$y=\frac{1}{(x^2-3)^2}$

問 13 関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，次の等式を証明せよ。
ただし，$a$, $b$ は定数，$n$ は整数とする。

(1)　$\frac{d}{dx}f(ax+b)=af'(ax+b)$

(2)　$\frac{d}{dx}\{f(x)\}^n=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

## 逆関数の微分法

（教科書 p.144）

次の公式が得られる。

| 逆関数の微分法 |
| --- |
| $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$ |

例 8 関数 $y=\sqrt{x}$ の導関数は，教科書 136 ページにおいて導関数の定義にしたがって求めているが，逆関数の微分法の公式を利用して，次のように求めることもできる。

$y=\sqrt{x}$ より（　　　　　　　　）であるから

$\frac{dx}{dy}=$

よって　$\frac{dy}{dx}=$

問 14 教科書 144 ページの例 8 にならって次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\sqrt[3]{x}$

(2)　$y=x^{\frac{1}{4}}$

問 15 教科書 144 ページの例 8 にならって関数 $y=x^{\frac{1}{n}}$ を微分せよ。ただし，$n$ は正の整数とする。

## $x^{\frac{m}{n}}$ の導関数

（教科書 p.145）

$\frac{m}{n}=r$ とおくことにより，次のことがわかる。

| $\boldsymbol{x^r}$ の導関数 |
| --- |
| $\boldsymbol{r}$ が有理数のとき　　$\boldsymbol{(x^r)'=rx^{r-1}}$ |

例 9 $y=x\sqrt[4]{x}$ は $y=x^{\frac{5}{4}}$ と表されるから

$$y'=\frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1}=\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}=\frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$$

問 16 次の関数を微分せよ。

(1)　$y = x^{\frac{1}{2}}$

(2)　$y = x^{\frac{2}{3}}$

(3)　$y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

例 10 $y = \sqrt[4]{2x+1}$ は（　　　　　　　　　　）と表されるから

$y' =$

$=$

問 17 次の関数を微分せよ。

(1)　$y = \sqrt{(2x-3)^3}$

(2)　$y = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 5}$

## 曲線の方程式と微分

（教科書 p.146）

問 18 $y = \sqrt{1-x^2}$ の右辺を直接微分することによって，$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ となることを確かめよ。また，

$y = -\sqrt{1-x^2}$ の場合についても確かめよ。

**例 11** 楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ について，$\frac{dy}{dx}$ を求めてみよう。

楕円の方程式の両辺を $x$ で微分すると　（　　　　　　　　　　　）

よって，$y \neq 0$ のとき　（　　　　　　　　　）

**問 19** 放物線 $y^2=4x$ について，$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$ となることを示せ。

**問 20** 楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ について，$\frac{dy}{dx}$ を $x$, $y$ を用いて表せ。

## 媒介変数で表された関数の微分法

（教科書 p.147）

次のことが成り立つ。

| 媒介変数で表された関数の微分法 |
| --- |
| $x=f(t)$, $y=g(t)$ のとき　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$ |

**例 12** 放物線 $y^2=8x$ は媒介変数 $t$ を用いて，$x=2t^2$, $y=4t$ と表される。ここで，$y$ を $x$ の関数とみなし $\frac{dy}{dx}$ を $t$ を用いて表してみよう。

$\frac{dx}{dt}=$　　　　　，$\frac{dy}{dt}=$

であるから　$\frac{dy}{dx}=$

**問 21** 次の場合について，$\frac{dy}{dx}$ を $t$ の式で表せ。

(1) $\begin{cases} x=t-1 \\ y=t^2+5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=t+2 \end{cases}$

## 問 題

（教科書 p.148）

**1** 関数 $f(x)=|x-1|(x-1)$ が $x=1$ で微分可能かどうかを調べよ。

**2** 導関数の定義にしたがって，次の関数を微分せよ。

(1) $f(x)=\frac{1}{x-2}$

(2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

**3** 次の関数を微分せよ。

（1） $y=(x^2+3)(x^3-7)$

⑵ $y=(x^2-3x+4)(5-2x^4)$

⑶ $y=x^2-\frac{6}{x-4}$

⑷ $y=\frac{x-1}{x^2+x+1}$

**4** 次の関数を微分せよ。

（1） $y=(2x^2+5x-6)^3$

⑵ $y=x\sqrt{x-1}$

⑶ $y=\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x}}$

⑷ $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$

⑸ $y=\frac{x^2+5x}{x-4}$

⑹ $y=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

**5** 関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，次の等式を証明せよ。

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)}=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

**6** ⑴ $x$ の関数 $u,\ v,\ w$ が微分可能であるとき，次の式が成り立つことを証明せよ。

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$$

⑵ 次の関数を微分せよ。

$y=x(x+1)^2(x-2)^2$

**7** 双曲線 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ について，$\frac{dy}{dx}$ を $x,\ y$ を用いて表せ。

**8** 円 $x=\frac{1}{1+t^2},\ y=\frac{t}{1+t^2}$ について，$\frac{dy}{dx}$ を $t$ の式で表せ。