練習問題A

（教科書 p.160）

1 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\frac{x^2+2}{x-1}$

(2) $y=\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$

(3) $y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$

(4) $y=e^{-\sin x}$

(5) $y=xe^{\frac{1}{x}}$

(6) $y=\log|\cos x|$

2 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}$ を $f'(a)$ を用いて表せ。

3 x，y が次の式を満たすとき，$\frac{dy}{dx}$ を x，y を用いて表せ。

(1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

(2) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=1$

4 方程式 $xy-2x+y=0$ で定められる x の関数 y の導関数は

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y-2}{x+1}$$

となることを示せ。

5 サイクロイド $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$ について，$\frac{dy}{dx}$ を θ の式で表せ。

6 次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1) $y=\log\frac{1}{5-x}$

(2) $y=\sin x+\cos x$

7 対数微分法により，関数 $y=x^x\ (x>0)$ を微分せよ。

練習問題B

（教科書 p.161）

8 次の極限値を求めよ。ただし，$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ を用いてよい。

(1) $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$

9 関数 $f(x)=\sqrt{x+1}$ について，次の問に答えよ。

(1) 微分係数 $f'(0)$ を求めよ。

(2) $g(x)=f\left(f(x)\right)$ とするとき，微分係数 $g'(0)$ を求めよ。

１０ 自然数 n に対して，$x\neq 1$ のとき，次の式が成り立つ。

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

このことを利用して，次の和を求めよ。

(1) $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$

(2) $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}$

１１　x, y が次の式を満たすとき，$\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

$$x = \tan y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

１２　関数 $y = ae^{-x}\sin 2x + be^{-x}\cos 2x$ の導関数が

$$y' = e^{-x}\cos 2x$$

となるように，定数 a, b の値を定めよ。

１３　次の場合について，$\frac{dy}{dx}$ を媒介変数の関数として表せ。

(1)　$x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$

(2)　$x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$

発 展 **高次導関数と整式**

（教科書 p.162）

n 次の整式 $f(x)$ は $x-\alpha$ の整式として

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{1}{2!}f''(\alpha)(x-\alpha)^2$$
$$+\frac{1}{3!}f'''(\alpha)(x-\alpha)^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\alpha)(x-\alpha)^n \quad \cdots\cdots⑤$$

と表される。

問 1 高次導関数を用いて，x^4+x^2+1 を $x-2$ の整式で表せ。

さらに，$f(x)$ が整式でないときでも，指数関数 e^x や三角関数 $\sin x$，$\cos x$ などの関数に対しては，⑤を拡張して，次のような無限級数で表されることが知られている。

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{1}{2!}f''(\alpha)(x-\alpha)^2+\frac{1}{3!}f'''(\alpha)(x-\alpha)^3+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\alpha)(x-\alpha)^n+\cdots$$

この無限級数を関数 $f(x)$ の（⑰　　　　　　　　　　）という。