3 節 関数の極限

1 関数の極限

極限 $\lim_{x\to a} f(x)$

（教科書 p.111）

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば

（① ）または （② ）

と表し，α を $x\to a$ のときの $f(x)$ の（③ ）という。

また，この場合，“$x\to a$ のとき $f(x)$ は α に（④ ）する”という。

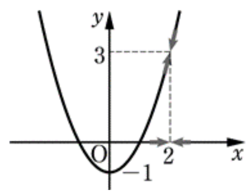
注意 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ を，$x\to a$ のとき $f(x)$ の極限が α であるともいう。

例 1 関数 $f(x)=x^2-1$ について

$x\to 2$ のとき （ ）

すなわち

$\lim_{x\to 2} f(x)=$



例 2 関数 $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ は，（ ）では定義されていない。

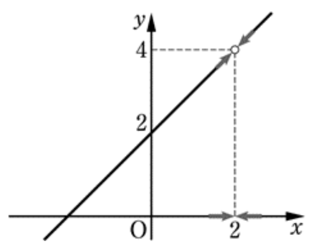
しかし，$x\neq 2$ の範囲では

$f(x)=$

と変形される。

したがって，x が限りなく 2 に近づくとき，$f(x)$ は限りなく（ ）に近づく。

すなわち $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=$



数列の場合と同様に，関数の極限値についても次の性質が成り立つ。

極限値と四則
$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha, \lim_{x\to a} g(x)=\beta$ のとき
$\boxed{1}$ $\lim_{x\to a} kf(x)=k\alpha$ ただし，k は定数
$\boxed{2}$ $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$
$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$
$\boxed{3}$ $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\alpha\beta$
$\boxed{4}$ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ ただし，$\beta\neq 0$

注意 定数関数 $f(x)=c$ については，$\lim_{x\to a} f(x)=c$ である。

例 3 $\lim_{x\to 2}(x^2-x+2)(3x-1)=$

問 1 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 2}(x^3-2x+1)$

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x^2-x+1}$

例 4 (1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=$

問 2 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x+1}$

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-5x+3}{x^2+2x-3}$

(3) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{6+x}-\frac{1}{6}\right)$

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha, \lim_{x\to a}g(x)=0$　ならば　$\lim_{x\to a}f(x)=0$

応用例題 1

等式 $\lim_{x\to 4}\frac{ax+b}{\sqrt{x}-2}=12$ が成り立つように，定数 a, b の値を定めよ。

解

問 3 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

（1） $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+ax+b}{x+2}=3$

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=\sqrt{2}$

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば

（⑤　　　　　　　　）　　または　　（⑥　　　　　　　　）

と表し，“$x\to a$ のとき $f(x)$ は（⑦　　　　　　　　）する”という。

また，$f(x)$ の値が負でその絶対値が限りなく大きくなるならば

（⑧　　　　　　　　）　　または　　（⑨　　　　　　　　）

と表し，“$x\to a$ のとき $f(x)$ は（⑩　　　　　　　　）する”という。

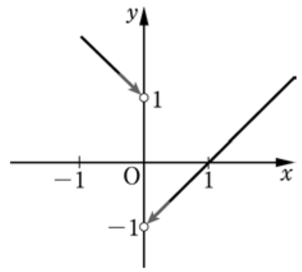
$\boxed{\text{注意}}$ $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ を，$x\to a$ のとき $f(x)$ の極限がそれぞれ正の無限大，負の無限大であるともいう。

問 4 $\lim_{x\to -2}\left\{1-\frac{1}{(x+2)^2}\right\}$ を求めよ。

右側からの極限，左側からの極限

（教科書 p.114）

例 5 関数 $f(x)=\frac{x(x-1)}{|x|}$ について考えてみよう。



$x>0$ のとき

$f(x)=$

$x<0$ のとき

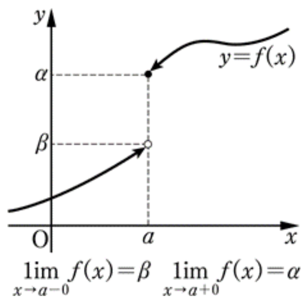
$f(x)=$

である。したがって，x が正の値をとりながら限りなく 0 に近づくとき，$f(x)$ の値は限りなく（　　　　）に近づく。また，x が負の値をとりながら限りなく 0 に近づくとき，$f(x)$ の値は限りなく（　　　　）に近づく。

一般に，関数 $f(x)$ において，x が a より大きい値をとりながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ の値が限りなく α に近づくならば，α を "x が右側から a に近づくときの $f(x)$ の極限値" といい，次のように表す。

（⑪　　　　　　　　　　　　　　）

"x が左側から a に近づくときの $f(x)$ の極限値" も同様に定義され，その極限値 β が存在するならば，次のように表す。



（⑫　　　　　　　　　　　　　　）

とくに，$a=0$ の場合は

$x\to 0+0$ を（⑬　　　　　　　　），　$x\to 0-0$ を（⑭　　　　　　　　）

と表す。

問 5 $\lim_{x\to 3+0}\frac{x^2-3x}{|x-3|}, \lim_{x\to 3-0}\frac{x^2-3x}{|x-3|}$ をそれぞれ求めよ。

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ というのは

（⑮　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

となることである。

例 6 $\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=$　　　　　　，$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=$

$x\to\infty$，$x\to -\infty$ のときの極限

（教科書 p.116）

$x\to\infty$ のとき $f(x)$ の値が限りなく α に近づくならば

（⑯　　　　　　　　　　　　　　）

と表す。

例題 2 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+5}{6x^2+3x+4}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right)$

解

問 6 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+2}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2+5x-3}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+1}-2x\right)$

例題 3 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}+x\right)$$

解

問 7 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}+x\right)$$

例 7 $\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-3x+1)=$

問 8 次の極限を調べよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}(x^4-3x-1)$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x(x+5)}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+4}{x^3-3}$

指数関数・対数関数と極限

（教科書 p.118）

例 8 (1) $\lim_{x\to+0}\log_{\frac{1}{2}}x=$

(2) $\lim_{x\to\infty}(5^x-2^x)=$

問 9 次の極限を調べよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}2^{-x}$

(2) $\lim_{x\to\infty}(2^x-3^x)$

(3) $\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}$

2 三角関数と極限

関数の極限値と大小関係

（教科書 p.119）

関数の極限値と大小関係については，次の性質が成り立つ。

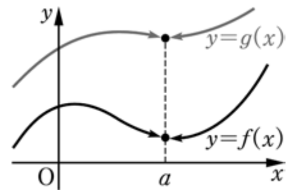
関数の極限値と大小関係

$\boxed{1}$ a の近くで不等式

$f(x)\leqq g(x)$ が成り立ち，かつ

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=\beta$

ならば　$\alpha\leqq\beta$



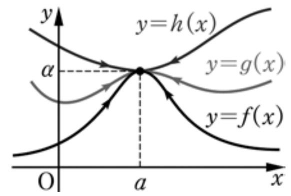
$\boxed{2}$ [*] a の近くで不等式

$f(x)\leqq g(x)\leqq h(x)$ が成り立ち，

かつ

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=\alpha$

ならば　$\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$



注意　これらのことは，$x\to\infty$ や $x\to-\infty$ のときにも成り立つ。

---

[*] 性質 $\boxed{2}$ は（⑰　　　　　　　　　　）とよばれている。

例 9 教科書 119 ページの性質 $\boxed{2}$ を用いて，$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$ を求めてみよう。

$0\leqq\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq1$ であるから

　$0\leqq\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=$

よって

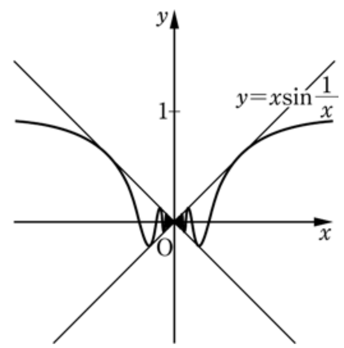
　（　　　　　　　　　　）

$x\to0$ のとき $|x|\to0$ であるから

　（　　　　　　　　　　）

ゆえに

　（　　　　　　　　　　）



注意　数列の場合と同様に，次のことが成り立つ。

$$\lim_{x\to a}f(x)=0 \iff \lim_{x\to a}|f(x)|=0$$

問 10 次の極限値を求めよ。

（1） $\lim_{x \to 0} x \cos\frac{1}{x}$

（2） $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$

$\frac{\sin\theta}{\theta}$ の極限

（教科書 p.121）

次の式が得られる。

$\frac{\sin\theta}{\theta}$ の極限
$\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

例題 4 次の極限値を求めよ。

（1） $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

（2） $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 2x}$

解

問 11 次の極限値を求めよ。

（1） $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x}$

（2） $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x}$

（3） $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 5x}{2x}$

例題 5　$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$ を求めよ。

解

問 12　次の極限値を求めよ。

(1)　$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

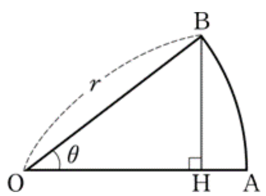
(2)　$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

三角関数の極限の図形への応用

（教科書 p.123）

応用例題 6　右の図の扇形 OAB において，点 B から OA に下ろした垂線を BH とする。

$\angle\mathrm{AOB}=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



$\mathrm{OB}=r$

とするとき，$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{AH}}{\theta^2}$ を求めよ。

解

問 13　教科書 123 ページの応用例題 6 において，$\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}^2}$ を求めよ。

3 関数の連続性

（教科書 p.124）

一般に，関数 $f(x)$ の定義域に属する x の値 a に対し，$\lim_{x\to a} f(x)$ が存在してその値が$f(a)$ に等しいとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で（⑱　　　　　　　）であるという。

$\boldsymbol{x=a}$ における連続
関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$ のとき，$x=a$ で**連続**である。

関数 $f(x)$ が，定義域に属する x の値 a において連続でないとき，$f(x)$ は $x=a$ で（⑲　　　　　　　）であるという。

区間における連続

（教科書 p.125）

不等式

$a<x<b,\ a\leqq x<b,\ a<x\leqq b,\ a\leqq x\leqq b$

を満たす実数 x の値の範囲を（⑳　　　　　　）といい，それぞれ記号

$(a,\ b),\ [a,\ b),\ (a,\ b],\ [a,\ b]$

で表す。$(a,\ b)$ を（㉑　　　　　　　），$[a,\ b]$ を（㉒　　　　　　　）という。

問 14 次の不等式を満たす実数 x の値の範囲を，区間を示す記号で表せ。

(1)　$2<x<5$

(2)　$-3\leqq x\leqq 4$

(3)　$x\leqq 7$

関数 $f(x)$ がある区間 I に属するすべての値 x で連続であるとき，$f(x)$ は（㉓　　　　　　　　　　）である，または区間 I で（㉔　　　　　　　　）であるという。

注意　区間 I が左端の点 a を含むとき，$f(x)$ が $x=a$ で連続であるというのは$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$ が

成り立つことである。同様に，区間 I が右端の点 b を含むとき，$f(x)$ が $x=b$ で連続であるというのは

$\lim_{x\to b-0} f(x)=f(b)$ が成り立つことである。

例 10 (1)　$2x^2-5,\ x^3-6x+9$ のように，x の整式で表される関数は区間（　　　　　　　　）で（　　　　　　）である。

(2)　三角関数 $\sin x$，$\cos x$ と指数関数 a^x はそれぞれ区間（　　　　　　　　）で（　　　　　　）である。対数関数 $\log_a x$ は，その定義域である区間（　　　　　　　）で（　　　　　　）である。

(3)　分数関数の定義域は，分母を 0 にする値があれば，それらの値によっていくつかの区間に分けられる。分数関数はこのそれぞれの区間で（　　　　　　）である。たとえば，関数 $\frac{2x-3}{x-2}$は，その定義域である 2 つの区間（　　　　　　　　　　　）で（　　　　　　）である。

(4)　無理関数 $f(x)=\sqrt{x}$ は，区間（　　　　　　　）で（　　　　　　）で，さらに $\lim_{x\to +0} f(x)=$　　　　　　　　である。

よって，$f(x)=\sqrt{x}$ はその定義域（　　　　　　　）で（　　　　　　）である。

問 15 次の関数が連続である区間を求めよ。

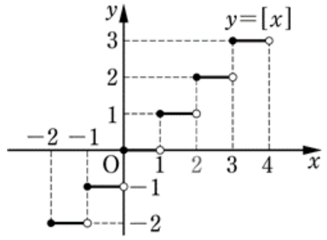
(1)　$\frac{x^2+4}{x+2}$

(2)　$\frac{6}{x(x^2-9)}$

(3)　$\sqrt{-3x+2}$

実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。この記号 [　] を（㉕　　　　　　　　　）という。

例 11 関数 $f(x)=[x]$ は，x の整数値で不連続である。
たとえば，$x=2$ においては
$\lim_{x\to 2+0}[x]=$　　　　　，$\lim_{x\to 2-0}[x]=$
であるから，$\lim_{x\to 2}[x]$ は存在しない。
よって，関数 $f(x)=[x]$ は（　　　　　）で（　　　　　）
である。



問 16 関数 $f(x)=x[x]$ の $x=0,\ x=1$ における連続性を調べよ。

連続関数の最大値･最小値

（教科書 p.127）

一般に，次のことが成り立つ。
（㉖　　　　　　　　　　　），その区間で（㉗　　　　　　　　　　　）。

問 17 次の関数の最大値，最小値があれば，それらを求めよ。

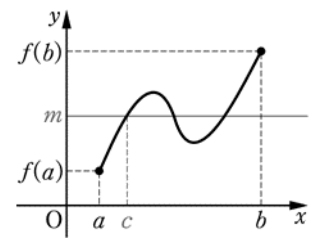
(1)　$f(x)=\tan x\ \left(-\frac{\pi}{4}\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$

(2)　$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x\ \ (2\leqq x\leqq 8)$

中間値の定理

（教科書 p.127）

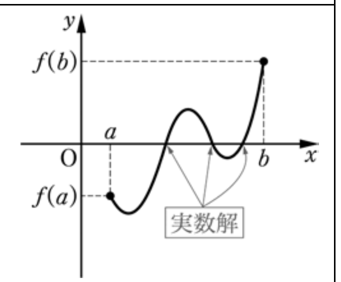
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続ならば，この関数のグラフは点 $(a,\ f(a))$ と点 $(b,\ f(b))$ の間で切れ目なく続いている。
したがって，次の（㉘　　　　　　　　）が成り立つ。



中間値の定理 1
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，$f(a)\neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 m に対して $f(c)=m$ となるような実数 c が a と b の間に少なくとも 1 つ存在する。

とくに次のことがいえる。

中間値の定理 2
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続であり，$f(a)$ と $f(b)$ が異符号であるとき，方程式 $f(x)=0$ は，a と b の間に少なくとも 1 つの実数解をもつ。



例題 7 証明
方程式 $3^x-6x+2=0$ は，$2<x<3$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを証明せよ。

問18 方程式 $x - 2\sin x - 3 = 0$ は，$0 < x < \pi$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを証明せよ。

問 題

（教科書 p.129）

１３ 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}\right)$

(2) $\lim_{x\to +0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

(3) $\lim_{x\to -\infty}\frac{4^x}{1-4^x}$

(4) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(x+2)-\log_2 x\}$

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan x}$

(6) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$

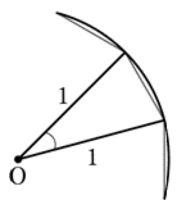
１４　$x \to \infty$ のとき，$f(x) = \sqrt{x^2+1} - ax$ が収束するような正の定数 a の値を求めよ。また，そのときの $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ。

１５　次の極限値を求めよ。

(1)　$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$

(2)　$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x}$

１６　半径 1 の円に内接する正 n 角形の面積を S_n とするとき



$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

１７ 次の関数が連続である区間を求めよ。

(1) $f(x) = \frac{3}{4^x - 2}$

(2) $f(x) = \log_2|x|$

１８ 次の問に答えよ。

(1) 方程式 $\log_{10} x - \frac{x}{20} = 0$ は，$10 < x < 10\sqrt{10}$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを証明せよ。

(2) 方程式 $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$ は，2 より小さい正の解をもつことを証明せよ。