# 2 節 数列の極限

## 1 数列の極限

（教科書 p.92）

項が限りなく続く数列 $a_1$, $a_2$, $a_3$, …, $a_n$, … を（①　　　　　　　　）という。
$a_n$ をその第 $n$ 項といい，この無限数列を $\{a_n\}$ で表す。また，$a_n$ を $n$ の式で表したものを数列 $\{a_n\}$ の一般項という。

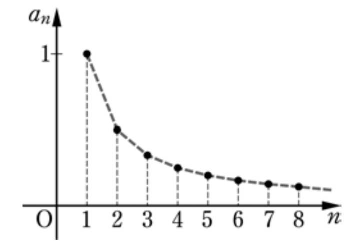
### 数列の収束

（教科書 p.92）

**例 1** (1)　数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，すなわち，数列

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{1}{6},\quad \cdots$$

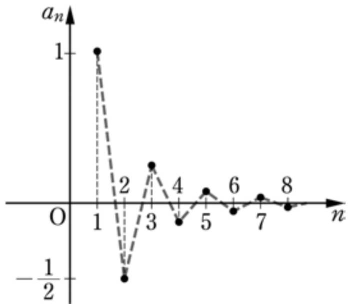
では，$n$ が限りなく大きくなるとき，第 $n$ 項は限りなく（　　　　）に近づく。




(2)　数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$，すなわち，数列

$$1,\quad -\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad -\frac{1}{8},\quad \frac{1}{16},\quad -\frac{1}{32},\quad \cdots$$

では，$n$ が限りなく大きくなるとき，第 $n$ 項は限りなく（　　　　）に近づく。




一般に，数列 $\{a_n\}$ において，$n$ が限りなく大きくなるにつれて，$a_n$ が一定の値 $\alpha$ に限りなく近づくとき，数列 $\{a_n\}$ は $\alpha$ に（②　　　　　）する，または，数列 $\{a_n\}$ の極限は $\alpha$ であるという。その値 $\alpha$ を数列 $\{a_n\}$ の（③　　　　　）という。

数列 $\{a_n\}$ の極限値が $\alpha$ であるとき，次のように書く。

（④　　　　　　　　　）　または　（⑤　　　　　　　　　　　）

**例 2** (1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$

### 数列の発散

（教科書 p.93）

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，数列 $\{a_n\}$ は（⑥　　　　　　）するという。

**例 3** 次の数列はいずれも発散する。

(1)　$1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ \cdots,\ \frac{n+1}{2},\ \cdots$

(2)　$-1,\ -2,\ -4,\ -8,\ \cdots,\ -2^{n-1},\ \cdots$

一般に，数列 $\{a_n\}$ において，$n$ を限りなく大きくすると，$a_n$ が限りなく大きくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は（⑦　　　　　　　　　）するといい

（⑧　　　　　　　　　）　または　（⑨　　　　　　　　　　）

と書く。また，数列 $\{a_n\}$ において，$n$ を限りなく大きくすると，$a_n$ が負でその絶対値 $|a_n|$ が限りなく大きくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は（⑩　　　　　　　　　）するといい，次のように書く。

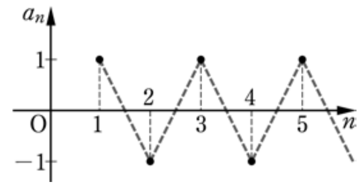
（⑪　　　　　　　　　）　または　（⑫　　　　　　　　　　）

**注意**　$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の極限はそれぞれ正の無限大，負の無限大であるということがある。

**例 4** (1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=$

(2)　$\lim_{n\to\infty}(-2^{n-1})=$

数列 $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots$
は収束しないから発散する。しかし，正の無限大にも負の無限大にも発散しない。
このような数列は（⑬　　　　　）するという。




**数列の収束・発散**

$$\begin{cases} 収束 \cdots\cdots \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha & (一定の値\ \alpha\ に収束) \\ 発散 \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty & (正の無限大に発散) \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty & (負の無限大に発散) \\ 振動 & (極限はない) \end{cases} \end{cases}$$

**問 1**　次の数列の収束，発散を調べよ。

(1)　$-5,\ -2,\ 1,\ \cdots,\ 3n-8,\ \cdots$

(2)　$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \cdots,\ 2-\frac{1}{n},\ \cdots$

(3)　$-1,\ -4,\ -9,\ \cdots,\ -n^2,\ \cdots$

(4)　$-3,\ 9,\ -27,\ \cdots,\ (-3)^n,\ \cdots$

## 極限値と四則

（教科書 p.95）

数列の極限値については，次の性質が成り立つ。

**極限値と四則**

数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ が収束して，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき

1. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$　　ただし，$k$ は定数
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta, \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha - \beta$
3. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$　　ただし，$\beta \neq 0$

**例 5** $\lim_{n\to\infty} a_n = -3, \lim_{n\to\infty} b_n = 4$ のとき

(1)　$\lim_{n\to\infty}(2a_n + 5b_n) =$

(2)　$\lim_{n\to\infty} a_n b_n =$

**例 6** (1)　$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{n+1} =$

◀ $\lim_{n\to\infty}\frac{(\text{定数})}{n} = 0$

(2)　$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n^2-n-3} =$

**問 2** 次の極限値を求めよ。

(1)　$\lim_{n\to\infty} \frac{n-5}{2n+1}$

(2)　$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2-2}$

(3)　$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n+4}{3-2n^2}$

(4)　$\lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{n+1}{3n-1}\right)$

**例題 1**　次の極限を調べよ。

(1)　$\lim_{n\to\infty}(n^3 - 10n^2)$　　(2)　$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2+3}{n+4}$　　(3)　$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$

解

問 3　次の極限を調べよ。

（1）　$\lim_{n\to\infty}(4n-3n^2)$

⑵　$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-n-7}{3n-2}$

⑶　$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

⑷　$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)$

⑸　$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+2n}-n}$

(6)　$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n}}$

## 数列の極限と大小関係

（教科書 p.97）

数列の極限と大小関係については，次の性質が成り立つ。

**数列の極限と大小関係**

$\boxed{1}$　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ において，$a_n \leqq b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき
$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$　ならば　$\alpha \leqq \beta$

$\boxed{2}$　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ において，$a_n \leqq b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき
$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$　ならば　$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

$\boxed{3}$ (*)　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ において，$a_n \leqq b_n \leqq c_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき，
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ ならば，$\{b_n\}$も収束して
$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

(*) 性質 $\boxed{3}$ は（⑭　　　　　　　　　　）とよばれている。

**応用例題**　$\theta$ を定数とするとき，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n\theta$ を求めよ。

**解**

**問 4**　$\theta$ を定数とするとき，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin^2 n\theta$ を求めよ。

## 2　無限等比数列

（教科書 p.98）

数列 $a,\ ar,\ ar^2,\ \cdots,\ ar^{n-1},\ \cdots$ を初項 $a$，公比 $r$ の（⑮　　　　　　　　　　）という。

**数列 $\{r^n\}$ の極限**

1　$r>1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

2　$r=1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n = 1$

3　$|r|<1$ のとき　$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

4　$r \leqq -1$ のとき　数列 $\{r^n\}$ は振動し，$\lim_{n\to\infty} r^n$ は存在しない。

したがって，次のことがわかる。

数列（⑯　　　　　　　）する　$\Longleftrightarrow$　（⑰　　　　　　　　　）

**例 7**　無限等比数列 6, 12, 24, 48, … は，一般項が（　　　　　　）であり，
公比 2 が（　　　　　　）であるから　$\lim_{n\to\infty} 3\cdot 2^n =$

**問 5**　次の無限等比数列の極限を調べよ。
(1)　$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$, $\frac{16}{81}$, …

(2)　$2,\ -4,\ 8,\ -16,\ \cdots$

(3)　$6,\ -\frac{9}{2},\ \frac{27}{8},\ -\frac{81}{32},\ \cdots$

(4)　$-2,\ -2\sqrt{3},\ -6,\ -6\sqrt{3},\ \cdots$

**例題 3**　$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-5^n}{3^n+5^n}$ を求めよ。

**解**

**問 6**　次の極限値を求めよ。

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+5^n}{6^n}$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{1+3^n}$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-4^{n+1}}{3^n-4^n}$

**応用 例題 4**　数列 $\left\{\frac{r^{n+1}}{1+r^n}\right\}$ の極限を調べよ。ただし，$r\neq-1$ とする。

**考え方**　$|r|<1,\ r=1,\ |r|>1$ の場合に分けて考える。

**解**

**問 7**　次の極限を調べよ。

(1)　$\lim_{n\to\infty}\frac{3r^n}{2+r^n}$　ただし，$r>0$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}$　ただし，$r \neq -1$

**応用例題 5**　$a_1 = 3,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

**解**

**問 8**　$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

## 3 無限級数

（教科書 p.102）

無限数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

の形の式を（⑱　　　　　　　　）といい，$a_n$ をこの無限級数の（⑲　　　　　　　　）という。

この無限級数を記号$\sum$を用いて（⑳　　　　　　　　）とも書く。すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において，初項から第 $n$ 項までの和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

を，この無限級数の（㉑　　　　　　　　）という。すなわち

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$\cdots\cdots$$

数列 $\{S_n\}$ が収束して，その極限値が $S$ であるとき，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$$

であるとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は $S$ に（㉒　　　　　　）するといい， $S$をこの無限級数の（㉓　　　　）という。このとき

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S \quad \text{または} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

と書く。

数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は（㉔　　　　　　）するという。

**解**

**例題 6**　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + \cdots$

**問 9**　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots$

(2)　$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}+\cdots$

## 4 無限等比級数

（教科書 p.104）

初項 $a$，公比 $r$ の無限等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ からつくられた無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

を初項 $a$，公比 $r$ の（㉕　　　　　　　　）という。この無限等比級数の収束，発散を調べてみよう。

部分和 $S_n$ を考えると，$r \neq 1$ のときは　$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$r = 1$ のときは　$S_n = na$

教科書 99 ページの数列 $\{r^n\}$ の極限を用いると，無限等比級数は次のようになる。

(i)　**$|r| < 1$ のとき**

$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ より，$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$

よって，この無限等比級数は収束し，その和は（㉖　　　　　）である。

(ii)　**$r = 1$ のとき**

$S_n = na$ で，$a \neq 0$ であるから，この無限等比級数は（㉗　　　　　）する。

(iii)　**$r \leqq -1$ または $1 < r$ のとき**

数列 $\{r^n\}$ は発散するから，$\{S_n\}$ も発散する。

よって，この無限等比級数は（㉘　　　　　）する。

| 無限等比級数の収束・発散 |
|---|
| 無限等比級数 $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$<br>の収束，発散は次のようになる。ただし，$a \neq 0$ とする。<br>1　**$|r| < 1$ のとき収束して，その和は $\frac{a}{1-r}$**<br>2　**$|r| \geqq 1$ のとき発散する。** |

**例題 7**　次の無限等比級数の収束，発散を調べよ。収束するものについてはその和を求めよ。

(1)　$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$

(2)　$2 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{4} + \cdots$

**解**

問 10 次の無限等比級数の収束，発散を調べよ。収束するものについてはその和を求めよ。

(1)　$64 + 32 + 16 + 8 + \cdots$

(2)　$5 - 5 + 5 - 5 + \cdots$

(3)　$1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{100} - \frac{1}{1000} + \cdots$

例 8 無限等比級数 $1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \cdots$ が収束するような実数 $x$ の値の範囲と，そのときの和を求めてみよう。

初項（　　　　），公比（　　　　　）の無限等比級数であるから，収束するのは

（　　　　　　　　　），すなわち（　　　　　　　　　）のときであり，その和 $S$ は

$S =$

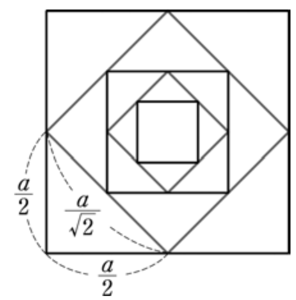
問 11 次の無限等比級数が収束するような実数 $x$ の値の範囲を求めよ。また，収束するときの和を求めよ。

(1)　$1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} + \cdots$

(2)　$4 + 4(1-x) + 4(1-x)^2 + \cdots$

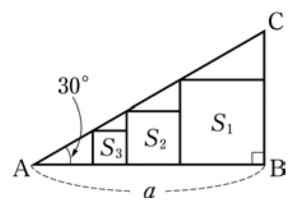
応用例題 8

1 辺の長さが $a$ の正方形がある。その各辺の中点を順に結んで正方形をつくる。さらにその正方形の各辺の中点を順に結んで正方形をつくる。このような操作を無限に続けるとき，これらの正方形の周の長さの総和を求めよ。




解

問 12 $\angle A = 30°$，$\angle B = 90°$，$AB = a$ の直角三角形 ABC がある。この三角形の内部に右の図のように正方形 $S_1$，$S_2$，$S_3$，… が限りなく並んでいる。これらの正方形の面積の総和を求めよ。



## 循環小数

（教科書 p.107）

**例題 9**　次の循環小数を分数で表せ。

(1)　$0.\dot{5}\dot{7}$

(2)　$3.5\dot{2}$

**解**

**問 13**　次の循環小数を分数で表せ。

(1)　$0.\dot{6}$

(2)　$0.\dot{2}7\dot{0}$

(3)　$4.2\dot{5}\dot{4}$

有限小数は有理数を表し，上に示したように循環小数も有理数である。

逆に有理数を小数で表すと，有限小数または循環小数となる。したがって，無理数は循環しない無限小数である。

(㉙　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

(㉚　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

注意　$0.\dot{9} = \frac{0.9}{1-0.1} = 1$ となるから，1 と循環小数 $0.\dot{9}$ とは等しい。同様にして，$0.15 = 0.14\dot{9}$，$6.4 = 6.3\dot{9}$ などとなる。

## 5 いろいろな無限級数　　（教科書 p.108）

教科書 95 ページの数列の極限値の性質から，無限級数について次のことが成り立つ。

**無限級数の和・差・実数倍**

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束して，その和がそれぞれ $S, T$ であるとき，次の性質が成り立つ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kS \qquad \text{ただし，} k \text{ は定数}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = S - T$$

**例題 10**　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ の和を求めよ。

**解**

**問 14**　次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n + (-3)^n}{5^n}$

次の命題が成り立つ。

| 無限級数の収束・発散 |
| --- |
| $\boxed{1}$ 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Longrightarrow$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ |
| $\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ が $0$ に収束しない $\Longrightarrow$ 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する |

注意　$\boxed{2}$ は $\boxed{1}$ の対偶である。

**例 9** 数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ は，（　　　　　　　　　　　　）で（　　　　　）に収束しないから，

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots$ は（　　　　　　）する。

**問 15** 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$ は発散することを示せ。

## 問 題

（教科書 p.110）

**7** 次の極限を調べよ。

（1） $\lim_{n\to\infty}\frac{5-3n^2}{(n+1)(n+2)}$

（2） $\lim_{n\to\infty}\frac{5-2n^3}{3n^2+4}$

（3） $\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{(n+2)(n+3)}-\sqrt{(n-2)(n-3)}\right\}$

（4） $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{4}$

（5） $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-(-5)^n}{(-5)^n+3^n}$

**8** 次の極限を調べよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}}{1+r^{2n}}$$

**9**　無限等比数列 $3,\ 6a,\ 12a^2,\ 24a^3,\ \cdots$ が収束するような定数 $a$ の値の範囲を求めよ。また，そのときの極限値を求めよ。

**１０**　$a_1 = 5,\ a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + 4\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

**１１**　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1)　$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{24}\right)+\cdots$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^2+3n}$

**１２** $\mathrm{AB}=a,\ \angle\mathrm{B}=90^\circ$ の直角二等辺三角形 ABC がある。点 A を中心とし，辺 AB を半径とする円と辺 AC との交点を $\mathrm{P_1}$ とし，扇形 $\mathrm{ABP_1}$ をつくる。次に，$\mathrm{P_1}$ から辺 BC に垂線 $\mathrm{P_1Q_1}$ を引き，同じようにして，扇形 $\mathrm{P_1Q_1P_2}$ をつくる。このような操作を無限に続けるとき，これらの扇形の弧の長さの総和を求めよ。