1 節 関数

1 分数関数とそのグラフ

（教科書 p.78）

$y=\frac{1}{x}$ や $y=\frac{x^2-1}{x+2}$ のように，分数式で表される関数を（① 　　　　　　　　）という。分数関数の定義域は，分母を 0 にする x の値を除く実数全体である。

$y=\frac{k}{x}$ のグラフ

（教科書 p.78）

問 1　関数 $y=\frac{3}{x}$，$y=-\frac{3}{x}$ のグラフをかけ。

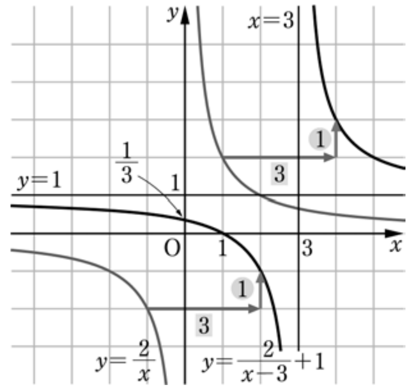
$y=\frac{k}{x-p}+q$ のグラフ

（教科書 p.79）

関数 $y=\frac{k}{x}$ のグラフの平行移動については，次のようになる。

$\boldsymbol{y=\frac{k}{x-p}+q}$ のグラフ
$y=\frac{k}{x-p}+q$ のグラフは，$y=\frac{k}{x}$ のグラフを $\boldsymbol{x}$ 軸方向に $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{y}$ 軸方向に $\boldsymbol{q}$ だけ平行移動した直角双曲線である。 その漸近線は **2** 直線 $\boldsymbol{x=p}$，$\boldsymbol{y=q}$ である。

例 1　関数 $y=\frac{2}{x-3}+1$ のグラフは $y=\frac{2}{x}$ のグラフを x 軸方向に（　　　　），y 軸方向に（　　　　）だけ平行移動した直角双曲線である。
その漸近線は 2 直線（　　　　　　　　）である。



問 2　次の関数のグラフをかけ。また，その漸近線を求めよ。

(1)　$y=\frac{3}{x+3}-1$

(2)　$y=-\frac{4}{x-2}-5$

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ のグラフ

（教科書 p.80）

例題 1　関数 $y=\frac{-2x+3}{x-1}$ のグラフをかけ。また，その漸近線を求めよ。

考え方　$-2x+3$ を $x-1$ で割ると，商は -2，余りは 1 であるから

$-2x+3=-2(x-1)+1$

と変形できる。

$$\begin{array}{rr} & -2 \\ \cline{2-2} x-1 \big) & -2x+3 \\ & -2x+2 \\ \cline{2-2} & 1 \end{array}$$

解

問 3　次の関数のグラフをかけ。また，その漸近線を求めよ。

(1)　$y=\frac{3x}{x-2}$

(2)　$y=\frac{2x-1}{x+2}$

(3)　$y=\frac{-2x+5}{2x-1}$

分数関数のグラフと不等式

（教科書 p.81）

例題 2　不等式 $\frac{4x+3}{2x+3} > x$ を解け。

解

問 4　次の不等式を解け。

（1）　$\frac{2x-1}{x-1} < x+1$

(2) $\frac{3x}{x+2} \geqq 2x-1$

2 無理関数とそのグラフ

（教科書 p.82）

$\sqrt{x}$, $\sqrt{4-2x}$, $\sqrt{x^2+1}$ のように，根号の中に文字を含む式を（②　　　　　　　）といい，無理式で表される関数を（③　　　　　　　）という。

問５ 次の無理関数の定義域を求めよ。

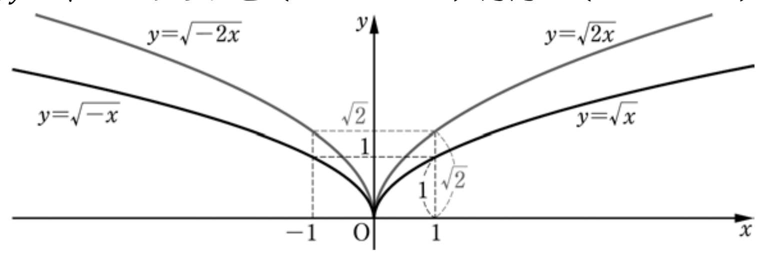
(1) $y=\sqrt{3x+2}$

(2) $y=-\sqrt{-2x+3}$

$y=\sqrt{ax}$ のグラフ

（教科書 p.82）

例２ 関数 $y=\sqrt{-x}$ のグラフは，関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと（　　　　　）に関して対称である。また，関数 $y=\sqrt{2x}=\sqrt{2}\sqrt{x}$ と関数 $y=\sqrt{-2x}=\sqrt{2}\sqrt{-x}$ のグラフは，それぞれ関数 $y=\sqrt{x}$ と関数 $y=\sqrt{-x}$ のグラフを（　　　　　）方向に（　　　　　）倍に拡大して得られる。



問６ 次の無理関数のグラフをかけ。

(1) $y=\sqrt{3x}$

(2)　$y=-\sqrt{3x}$

(3)　$y=\sqrt{-\frac{1}{2}x}$

(4)　$y=-\sqrt{-\frac{1}{2}x}$

$y=\sqrt{ax+b}$ のグラフ

（教科書 p.84）

例 3 $y=\sqrt{2x+6}$ は

(　　　　　　　　　　)

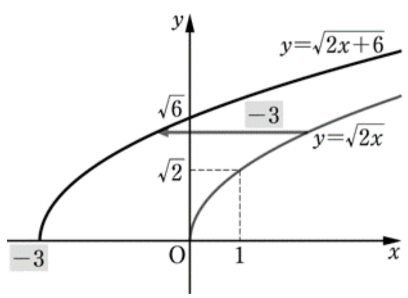
と変形される。

したがって，そのグラフは

(　　　　　　　　)

のグラフを x 軸方向に（　　　　　）

だけ平行移動したもので，右の図のようになる。



一般に，$a\neq 0$ のとき，$\sqrt{ax+b}=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}$ と変形できるから，次のことがわかる。

$\boldsymbol{y=\sqrt{ax+b}}$ のグラフ
無理関数 $y=\sqrt{ax+b}$ のグラフは，$y=\sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{b}{a}$ だけ平行移動したものである。

問 7 次の無理関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\sqrt{x-3}$

(2)　$y=\sqrt{-2x+4}$

(3)　$y=-\sqrt{3x+6}$

(4) $y=-\sqrt{-3x-5}$

問 8 次の不等式を解け。

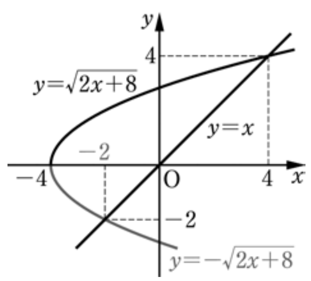
(1) $\sqrt{2x+5}>\frac{1}{2}x$

例題 3 不等式 $\sqrt{2x+8}>x$ を解け。

解

注意 例題 3 において，$x=-2$ は③の解ではなく，方程式 $-\sqrt{2x+8}=x$ の解である。

一般に，方程式の両辺を 2 乗して得た解については，もとの方程式を満たすかどうかを調べる必要がある。



⑵　$\sqrt{-2x+7} \leqq -x+2$

3 逆関数と合成関数

逆関数

（教科書 p.86）

一般に，関数 $y=f(x)$ を x に関する方程式と考えて x について解き，ただ 1 つの解 $x=g(y)$ が得られたとする。これは x が y の関数であることを表している。ここで，x と y を入れかえて得られる関数 $y=g(x)$ を $y=f(x)$ の（④　　　　　　　　）といい，（⑤　　　　　　　　）で表す。

逆関数の求め方

（教科書 p.87）

例 4 関数 $y=\frac{2x-3}{x-1}$ の逆関数を求めてみよう。

$(x-1)y=2x-3$ であるから，これを x について解くと，

$y \neq 2$ の範囲で

（　　　　　　　　）

ここで，x と y を入れかえると，求める逆関数は

（　　　　　　　　）

問 9 次の関数の逆関数を求めよ。

⑴　$y=-3x+2$

⑵　$y=\frac{2x-1}{x-2}$

例 5 関数 $y = 2^x$ の逆関数を求めてみよう。

これを x について解くと

（　　　　　　　　）

ここで，x と y を入れかえると，求める逆関数は

（　　　　　　　　）

問 10 次の関数の逆関数を求めよ。

(1)　$y = \log_3 x$

(2)　$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(3)　$y = \log_2(x+1)$

一般に，（⑥　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

例 6 関数

$y = x^2 + 1$ $(x \geqq 0)$

の逆関数を求めてみよう。

この関数の値域は（　　　　　　）である。

$y = x^2 + 1$ を x について解くと

（　　　　　　　　　）　……①

$x \geqq 0$ であるから

（　　　　　　　　）

ここで，x と y を入れかえると，求める逆関数は

（　　　　　　　　）

また，その定義域は（　　　　　　），値域は（　　　　　　）である。

注意　例 6 の①において，たとえば $y = 5$ とすると $x = \pm 2$ となり，x の値はただ 1 つには定まらない。

したがって，定義域を $x \geqq 0$ などと制限しなければ関数 $y = x^2 + 1$ の逆関数は考えられない。

問 11 次の関数の逆関数を求めよ。

(1)　$y = x^2 - 9$ $(x \geqq 0)$

(2)　$y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ $(x \leqq 0)$

逆関数のグラフ

（教科書 p.89）

逆関数のグラフ
関数 $y=f(x)$ のグラフと，その逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $\boldsymbol{y=x}$ に関して対称である。

例 7 関数 $y=\sqrt{x+1}$ ……①

の逆関数を求め，そのグラフをかいてみよう。

①の値域は（　　　　　）であり，両辺を 2 乗して，x について解くと

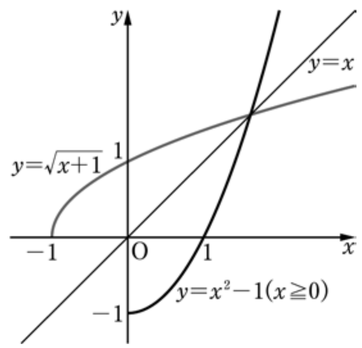
（　　　　　　　　）

であるから，①の逆関数は

（　　　　　　　　　　）

となる。よって，逆関数のグラフは右の図のようになる。

このように，関数 $y=\sqrt{x+1}$ のグラフと，その逆関数 $y=x^2-1\ (x\geqq 0)$ のグラフは，（　　　　　　）に関して対称である。



問 12 次の関数の逆関数を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=-\sqrt{-x+4}$

(2)　$y=\log_{\frac{1}{2}}x$

(3)　$y=-3^x$

合成関数 $y=g\big(f(x)\big)$

（教科書 p.90）

一般に，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が与えられていて，$f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれているとき

$y=g(u)$，$u=f(x)$

とおいて，$y=g(u)$ に $u=f(x)$ を代入すると，y は x の関数で

（⑦　　　　　　　　　　）

と表される。このようにして得られる関数 $y=g\big(f(x)\big)$ を，f と g の（⑧　　　　　　　　　　）という。
f と g の合成関数を（⑨　　　　　　　　　　）と書くこともある。

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "u=f(x)"'] \arrow[rr, bend left, "y=g(f(x))=(g\circ f)(x)"] & u \arrow[r, "y=g(u)"'] & y \end{tikzcd}$$

例 8 $f(x)=x^2$，$g(x)=2x+1$ のとき，合成関数 $(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ は，それぞれ次のようになる。

$(g\circ f)(x)=$

$(f\circ g)(x)=$

問 13 $f(x)=4x^2$，$g(x)=-\frac{1}{2}(x+1)$ であるとき，合成関数 $(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ をそれぞれ求めよ。

合成関数と逆関数

（教科書 p.91）

問 14 $f(x)=2^x$，$g(x)=\log_2 x$ であるとき，合成関数 $(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ を求めよ。

問 題

（教科書 p.91）

1 次の関数のグラフをかけ。また，その漸近線を求めよ。

(1) $y=\frac{7-2x}{x-3}$

(2) $y=\frac{6x}{3x+2}$

2 関数 $y=2\sqrt{x}$ のグラフを次のように移動したとき，それをグラフとする関数を求めよ。

(1) y 軸に関して対称に移動する。

(2) 点 $(7,\ 4)$ を通るように，x 軸方向に平行移動する。

3 グラフを利用して，次の不等式を解け。

(1) $\frac{4x-5}{2x-1}<-x+3$

(2)　$\sqrt{3-2x}<2x-1$

4　次の関数のグラフと直線 $y=x$ に関して対称な曲線をグラフとする関数を求めよ。

(1)　$y=-\sqrt{1-x}$

(2)　$y=2^{x+1}-1$

5　関数 $f(x)=\frac{3x+2}{x+2}$ について，$f^{-1}(x)=x$ を満たす x の値を求めよ。

6　2 つの関数 $f(x)=ax-3,\ g(x)=-x+a$ について，

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ がつねに成り立つように，定数 a の値を定めよ。