練習問題Ａ

（教科書 p.74）

1 △ABC において，次の等式が成り立つことを示せ。

$$(\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B)(\cos C + i\sin C) = -1$$

2 ド・モアブルの定理を用いて，次の 3 倍角の公式を示せ。

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

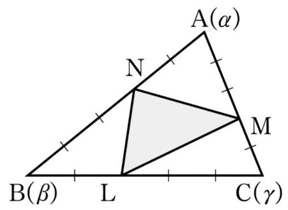
3 複素数平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ について，次の問に答えよ。

ただし，$\alpha = 1 + i$，$\beta = \left(-\sqrt{3} - 1\right) + \left(\sqrt{3} - 1\right)i$ とする。

(1) 複素数 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求めよ。

(2) △OAB の面積を求めよ。

4　複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を 3 頂点とする△ABC の辺 BC，CA，AB をそれぞれ 2 : 3 に内分する点を L，M，N とするとき，△LMN の重心 G を α，β，γ を用いて表せ。



5　点 z が単位円上を動くとき，$w=\frac{2z+i}{z-1}$ が表す点 w はどのような図形をえがくか。

6　複素数 z_1，z_2，z_3 について，3 点 $\mathrm{A}(2z_1+z_3)$，$\mathrm{B}(3z_1-z_2)$，$\mathrm{C}(2z_2+3z_3)$ は一直線上にあることを示せ。ただし，$z_1 \neq z_2+z_3$ とする。

7　異なる 3 つの複素数 z_1，z_2，z_3 の間に等式

$$z_1+iz_2=(1+i)z_3$$

が成り立つとき，3 点 $\mathrm{P}(z_1)$，$\mathrm{Q}(z_2)$，$\mathrm{R}(z_3)$ を頂点とする△PQR はどのような三角形か。

練習問題B

（教科書 p.75）

8　複素数 $z=\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}$ について，z^n が実数となる最小の自然数 n を求めよ。

9　z は複素数で，$z^4+z^3+z^2+z+1=0$ である。このとき，次の値を求めよ。

(1)　z^5

(2)　$|z|$

(3)　$|z-1|^2+|z+1|^2$

１０　複素数平面上の 2 点 $z_1=6-3i$，$z_2=3+\sqrt{3}+\sqrt{3}i$ について，点 z_1 を点 z を中心に $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転したら点 z_2 に重なった。
このとき，複素数 z を求めよ。

１１　点 z が単位円上を動くとき，$w=\frac{6z-1}{2z-1}$ が表す点 w はどのような図形をえがくか。

１２　複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(z)$，$\mathrm{B}(z^2)$，$\mathrm{C}(z^3)$ を頂点とする△ABC について $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ が成り立つとき，点 A はどのような図形上にあるか。

１３ 複素数平面上の原点 O と異なる 2 点 A，B の表す複素数をそれぞれ α，β とする。
等式 $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 0$ が成り立つとき，次の問に答えよ。

(1) 複素数 $\frac{\beta}{\alpha}$ を求めよ。

(2) △OAB はどのような三角形か。

練習問題A

（教科書 p.74）

1　△ABC において，次の等式が成り立つことを示せ。

$(\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B)(\cos C + i\sin C) = -1$

$(\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B)(\cos C + i\sin C)$

$= \{\cos(A+B) + i\sin(A+B)\}(\cos C + i\sin C)$

$= \cos(A+B+C) + i\sin(A+B+C)$

$= \cos\pi + i\sin\pi = -1$

2　ド・モアブルの定理を用いて，次の 3 倍角の公式を示せ。

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

ド・モアブルの定理により

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$　……①

また

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) + i\{3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta\}$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + i(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$　……②

①，②の実部と虚部をそれぞれ比較して

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

3　複素数平面上の 3 点 O(0)，A(α)，B(β) について，次の問に答えよ。

ただし，$\alpha = 1 + i$，$\beta = \left(-\sqrt{3}-1\right) + \left(\sqrt{3}-1\right)i$ とする。

(1)　複素数 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求めよ。

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\left(-\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)i}{1+i} = \frac{\left\{\left(-\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)i\right\}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{2} = \boldsymbol{-1+\sqrt{3}i}$$

(2)　△OAB の面積を求めよ。

$\dfrac{\beta}{\alpha} = 2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$\mathrm{OA} = |\alpha| = \sqrt{2}$

$\mathrm{OB} = |\beta| = \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| \cdot |\alpha| = 2\sqrt{2}$

$\angle\mathrm{AOB} = \arg\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{2}{3}\pi$

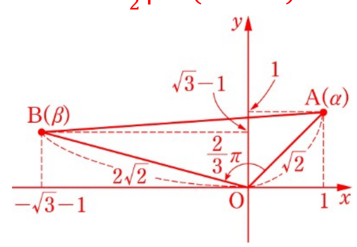
したがって

$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{AOB} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

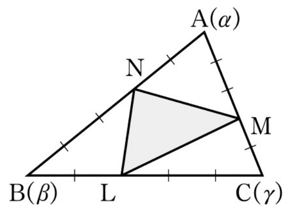
〔別解〕 xy 平面上の 3 点 O(0, 0)，A(1, 1)，

B$\left(-\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}-1\right)$ と考えて

$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\left|1\cdot\left(\sqrt{3}-1\right) - 1\cdot\left(-\sqrt{3}-1\right)\right| = \sqrt{3}$



4　複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ を 3 頂点とする△ABC の辺 BC, CA, AB をそれぞれ 2 : 3 に内分する点を L, M, N とするとき，△LMN の重心 G を α, β, γ を用いて表せ。



3 点 L, M, N を表す複素数は，それぞれ

$\frac{3\beta+2\gamma}{5}$, $\frac{3\gamma+2\alpha}{5}$, $\frac{3\alpha+2\beta}{5}$

ゆえに，△LMN の重心 G は

$$\frac{\frac{3\beta+2\gamma}{5}+\frac{3\gamma+2\alpha}{5}+\frac{3\alpha+2\beta}{5}}{3}=\boldsymbol{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}$$

5　点 z が単位円上を動くとき，$w=\frac{2z+i}{z-1}$ が表す点 w はどのような図形をえがくか。

点 z が単位円上を動くから

$|z|=1$　……①

$w=\frac{2z+i}{z-1}$ を z について解くと

$$z=\frac{w+i}{w-2}$$

これを①に代入して

$$\left|\frac{w+i}{w-2}\right|=1$$

$|w+i|=|w-2|$

したがって，点 w は **2 点 $\mathbf{A(2)}$, $\mathbf{B(-i)}$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線**をえがく。

6　複素数 z_1, z_2, z_3 について，3 点 $\mathrm{A}(2z_1+z_3)$, $\mathrm{B}(3z_1-z_2)$, $\mathrm{C}(2z_2+3z_3)$ は一直線上にあることを示せ。ただし，$z_1 \neq z_2+z_3$ とする。

$$\frac{(2z_2+3z_3)-(2z_1+z_3)}{(3z_1-z_2)-(2z_1+z_3)}=\frac{2(z_2+z_3-z_1)}{z_1-z_2-z_3}=-2$$

この値が実数であるから，3 点 A, B, C は一直線上にある。

7　異なる 3 つの複素数 z_1, z_2, z_3 の間に等式

$$z_1+iz_2=(1+i)z_3$$

が成り立つとき，3 点 $\mathrm{P}(z_1)$, $\mathrm{Q}(z_2)$, $\mathrm{R}(z_3)$ を頂点とする△PQR はどのような三角形か。

$z_1+iz_2=(1+i)z_3$ より

$z_1-z_3=i(z_3-z_2)$

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=-i=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi$$

ゆえに

$\left|\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right|=1$ より　　PR = QR

$\arg\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right)=\frac{3}{2}\pi$ より　　$\angle\mathrm{PRQ}=\frac{\pi}{2}$

したがって，△PQR は，**$\angle\mathrm{PRQ}=\frac{\pi}{2}$ であるような直角二等辺三角形**である。

練習問題B

（教科書 p.75）

8　複素数 $z=\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}$ について，z^n が実数となる最小の自然数 n を求めよ。

$$z=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right\}$$

よって

$$z^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left\{\cos\left(-\frac{n}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{n}{12}\pi\right)\right\}$$

z^n が実数となるから，k を整数として

$$-\frac{n}{12}\pi=k\pi$$

よって　　$k=-\frac{n}{12}$

したがって，求める自然数 n は，k が整数となる最小の自然数 n に等しく

$\boldsymbol{n=12}$

9　z は複素数で，$z^4+z^3+z^2+z+1=0$ である。このとき，次の値を求めよ。

(1)　z^5

$$(z^4+z^3+z^2+z+1)(z-1)=z^5-1$$

であるから

$$z^5-1=0$$

ゆえに　　$z^5=\mathbf{1}$

(2)　$|z|$

(1)より　$|z|^5=|z^5|=1$

ゆえに　　$|z|=\mathbf{1}$

(3)　$|z-1|^2+|z+1|^2$

$$\begin{aligned}|z-1|^2+|z+1|^2&=(z-1)\overline{(z-1)}+(z+1)\overline{(z+1)}\\&=(z-1)(\bar{z}-1)+(z+1)(\bar{z}+1)\\&=2z\bar{z}+2=2|z|^2+2\\&=2\cdot1^2+2=\mathbf{4}\end{aligned}$$

１０　複素数平面上の 2 点 $z_1=6-3i$，$z_2=3+\sqrt{3}+\sqrt{3}i$ について，点 z_1 を点 z を中心に $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転したら点 z_2 に重なった。
このとき，複素数 z を求めよ。

$z_2=\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)(z_1-z)+z$ より

$$3+\sqrt{3}+\sqrt{3}i=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(6-3i-z)+z$$

展開して z について整理すると

$$(3-\sqrt{3}i)z=12-\sqrt{3}-3i-4\sqrt{3}i$$

よって　　$\boldsymbol{z}=\frac{12\ \ \sqrt{3}+(-3-4\sqrt{3})i}{3-\sqrt{3}i}=\frac{48-12}{12}=\mathbf{4-\boldsymbol{i}}$

１１ 点 z が単位円上を動くとき，$w=\frac{6z-1}{2z-1}$ が表す点 w はどのような図形をえがくか。

点 z が単位円上を動くから

$|z|=1$ ……①

$w=\frac{6z-1}{2z-1}$ を z について解くと

$$z=\frac{w-1}{2(w-3)}$$

これを①に代入して

$$\left|\frac{w-1}{2(w-3)}\right|=1$$

$2|w-3|=|w-1|$

両辺を 2 乗して

$4|w-3|^2=|w-1|^2$

$4(w-3)(\overline{w}-3)=(w-1)(\overline{w}-1)$

$3w\overline{w}-11w-11\overline{w}=-35$

よって $w\overline{w}-\frac{11}{3}w-\frac{11}{3}\overline{w}=-\frac{35}{3}$

であるから

$$\left(w-\frac{11}{3}\right)\left(\overline{w}-\frac{11}{3}\right)=\left(\frac{11}{3}\right)^2-\frac{35}{3}$$

$$\left|w-\frac{11}{3}\right|^2=\frac{16}{9}$$

すなわち

$$\left|w-\frac{11}{3}\right|=\frac{4}{3}$$

したがって，点 w は，**点 $\frac{11}{3}$ を中心とする半径 $\frac{4}{3}$ の円をえがく。**

１２ 複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(z)$，$\mathrm{B}(z^2)$，$\mathrm{C}(z^3)$ を頂点とする△ABC について $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ が成り立つとき，点 A はどのような図形上にあるか。

3 点 A，B，C はすべて異なるから

$z\neq z^2$，$z^2\neq z^3$，$z^3\neq z$

すなわち

$z(1-z)\neq 0$，$z^2(1-z)\neq 0$，

$z(z+1)(z-1)\neq 0$

よって $z\neq 0,\ -1,\ 1$ ……①

さらに，3 点 A，B，C が同一直線上にないから

$\frac{z^3-z}{z^2-z}$ すなわち $\frac{z(z+1)(z-1)}{z(z-1)}$

が実数でない。

①より，約分して，$z+1$ が実数でない。

ゆえに，z が実数でない。これは①を含んでいる。

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ より

$|z^2-z|=|z^3-z|$

$|z(z-1)|=|z(z+1)(z-1)|$

$z\neq 0$，$z\neq 1$ であるから

$|z+1|=1$

したがって，点 A は**点 -1 を中心とする半径 1 の円上にある。ただし，点 -2，0 を除く。**

１３　複素数平面上の原点 O と異なる 2 点 A，B の表す複素数をそれぞれ α，β とする。
等式 $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$ が成り立つとき，次の問に答えよ。

(1)　複素数 $\frac{\beta}{\alpha}$ を求めよ。

$\alpha \neq 0$ であるから，$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=0$ の両辺を α^2 で割ると

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-\frac{\beta}{\alpha}+1=0$$

よって　$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{\mathbf{1\pm\sqrt{3}}\boldsymbol{i}}{\mathbf{2}}$

(2)　△OAB はどのような三角形か。

(1)より

$$\beta=\alpha\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

または

$$\beta=\alpha\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

したがって，点 B は点 A を原点を中心に $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。
よって，△OAB は**正三角形**である。