2 節 図形への応用

1 円と分点

内分点と外分点

（教科書 p.62）

内分点と外分点
2 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ の比に 内分する点は $\frac{n\alpha+m\beta}{m+n}$,　外分する点は $\frac{-n\alpha+m\beta}{m-n}$ とくに，線分 AB の中点は $\frac{\alpha+\beta}{2}$

問 1　次の 2 点 α, β を結ぶ線分を 3 : 2 に内分する点および外分する点を表す複素数を求めよ。

(1)　$\alpha = 2+4i$, $\beta = 7-i$

(2)　$\alpha = 4-i$, $\beta = -2+3i$

例題 1　複素数平面上の 3 点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を 3 頂点とする△ABC の重心 G は，$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ で表されることを証明せよ。

証明

問 2　△ABC の 2 頂点 A，B および重心 G を表す複素数をそれぞれ $-1-i$, $8+i$, $4+2i$ とするとき，頂点 C を表す複素数を求めよ。

垂直二等分線

（教科書 p.63）

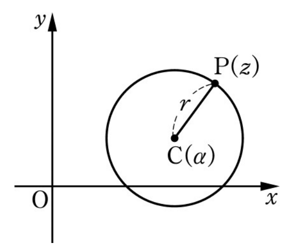
例 1　条件 $|z+2| = |z-i|$ を満たす点 z は，2 点 $A(-2)$, $B(i)$ を結ぶ線分 AB の（　　　　　　　　　）をえがく。

問 3　次の条件を満たす点 z はどのような図形をえがくか。

$|z-3| = |z+1-i|$

円

（教科書 p.64）



点 $C(\alpha)$ を中心とする半径 r の円上の点 $P(z)$ は

$CP = r$

である。すなわち

（① 　　　　　　　　　）

を満たす点である。

とくに，原点 O を中心とする半径 r の円上の点 $P(z)$ は

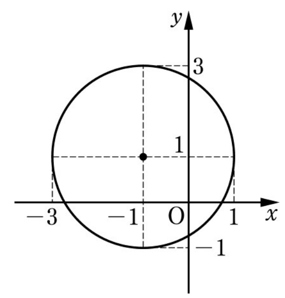
（② 　　　　　　　）

を満たす点である。

例 2　条件 $|z+1-i| = 2$ を満たす点 z は，どのような図形をえがくか調べてみよう。

（　　　　　　　　　　　）

と変形できるから，点 z は，（　　　　　　　　）を中心とする（　　　　　　　）をえがく。



問 4 次の条件を満たす点 z はどのような図形をえがくか。

(1) $|z-2i|=3$

(2) $|z-2+3i|=4$

例題 2 $w=i(z+2)$ とする。点 z が単位円上を動くとき，点 w はどのような図形をえがくか。

解

問 5 点 z が単位円上を動くとき，次のように表される点 w はどのような図形をえがくか。

(1) $w=z-1$

(2) $w=i(2z+1)$

アポロニウスの円

（教科書 p.66）

例題 3 複素数平面上で，2 点 A(-1)，B(2) からの距離の比が $2:1$ である点 P(z) 全体の表す図形を求めよ。

解

一般に，$m \neq n$ のとき，2 点 A，B からの距離の比が $m:n$ である点全体は円をえがく。この円を

（③　　　　　　　　　　　　）という。

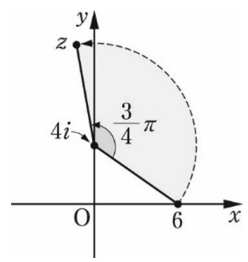
問 6 複素数平面上で，2 点 $A(-2i)$，$B(2i)$ からの距離の比が $3:1$ である点 $P(z)$ 全体の表す図形を求めよ。

一般の点における回転

（教科書 p.67）

例 3 点 6 を点 $4i$ を中心に $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した点 z を求めてみよう。

$z=$



問 7 点 $5+4i$ を点 $1+i$ を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点 z を求めよ。

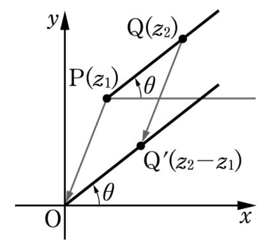
2 複素数と三角形

2 直線のなす角

（教科書 p.68）

複素数平面上の異なる 2 点 $P(z_1)$，$Q(z_2)$ について，半直線 PQ が実軸の正の向きとなす角を θ とする。ただし，角は向きを含めて考える。
$-z_1$ だけ平行移動すると，点 P は原点 O に移り，点 Q は点 $Q'(z_2-z_1)$ に移るから，次のことが成り立つ。

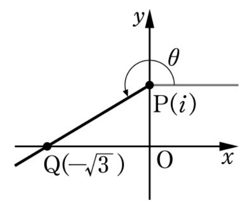
（④　　　　　　　　　　　　）



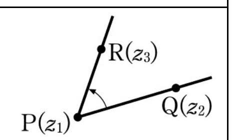
例 4 複素数 i，$-\sqrt{3}$ が表す点をそれぞれ P，Q とする。半直線 PQ が実軸の正の向きとなす角を θ とすると

$-\sqrt{3}-i=$

であるから　　$\theta=$



問 8 複素数 $\sqrt{3}+i$，$4i$ が表す点をそれぞれ P，Q とする。このとき，半直線 PQ が実軸の正の向きとなす角を求めよ。

複素数と角
異なる 3 点 $P(z_1)$，$Q(z_2)$，$R(z_3)$ に対して $\angle \mathbf{QPR} = \mathbf{arg}\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)$ 

例 5 複素数 $1+2i$, $3-i$, $2+7i$ が表す点をそれぞれ P, Q, R とするとき，∠QPR を求めてみよう。

(　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　)

よって　　∠QPR =

問 9 複素数 $-\sqrt{3}+i$, i, $-2\sqrt{3}+4i$ が表す点をそれぞれ P, Q, R とするとき，∠QPR を求めよ。

3 点 P, Q, R が一直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ が実数

2 直線 PQ, PR が垂直に交わる $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ が純虚数

例 6 3 点 P(1), Q$(2+i)$, R$(x-i)$ について，P, Q, R が一直線上にあるときと，2 直線 PQ, PR が垂直に交わるときの実数 x の値をそれぞれ求めてみよう。

(　　　　　　　　　　　　　　　　)

であるから，3 点 P, Q, R が一直線上にあるのは，(　　　　　　) のとき，2 直線 PQ, PR が垂直に交わるのは，(　　　　　　) のときである。

問 10 3 点 P$(2+5i)$, Q$(-1-i)$, R$(4+xi)$ について，次の条件を満たすような実数 x の値を求めよ。

(1)　3 点 P, Q, R が一直線上にある。

(2)　2 直線 PQ, PR が垂直に交わる。

応用例題 4　3 点 P(z_1), Q(z_2), R(z_3) において，$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=1+\sqrt{3}i$ が成り立つとき，△PQR はどのような三角形か。

解

問 11 3 点 P(z_1), Q(z_2), R(z_3) において，$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=i$ が成り立つとき，△PQR はどのような三角形か。

問 題

（教科書 p.71）

7 複素数平面上の 3 点 $z_1 = 3 + 5i$，$z_2 = 1 - 3i$，$z_3 = 1 - i$ をそれぞれ P，Q，R とするとき，次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 平行四辺形 PQRS の頂点 S

(2) 正三角形 PQT の頂点 T

8 複素数平面上の 3 点 P$(1 + 5i)$，Q$(2 + 3i)$，R$(-1 + 9i)$ は一直線上にあることを示せ。また，P は線分 QR をどのような比に分けるかを答えよ。

9 $\alpha = 2 + 6i$ とする。2 点 0，α を結ぶ線分を斜辺とする直角二等辺三角形の第 3 の頂点を表す複素数 β を求めよ。また，この三角形の面積を求めよ。

１０ 点 z に対して，$w=(1+i)(z-1)$ で表される点 w がある。このとき，次の問に答えよ。

(1) z を w の式で表せ。

(2) 点 z が単位円上を動くとき，点 w はどのような図形をえがくか。

１１ 複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ を頂点とする△ABC と，3 点 $\mathrm{P}(w_1)$，$\mathrm{Q}(w_2)$，$\mathrm{R}(w_3)$ を頂点とする△PQR について，次のことを証明せよ。

$\dfrac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=\dfrac{w_1-w_2}{w_3-w_2}$ のとき　　△ABC∽△PQR

１２ 4点 $\mathrm{P}(z_1)$，$\mathrm{Q}(z_2)$，$\mathrm{R}(z_3)$，$\mathrm{S}(z_4)$ について，次が成り立つことを示せ。

(1) 2直線 PQ，RS が平行である $\iff$ $\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}$ が実数

(2) 2直線 PQ，RS が垂直に交わる $\iff$ $\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}$ が純虚数

参 考 **直線の方程式**

（教科書 p.72）

問１ 次のとき，上に述べた点 z は，2点 α，β を結ぶ線分をどのような比に内分または外分する点か。

(1) $t=\frac{2}{3}$

(2) $t=3$

(3) $t=-2$

2 節 図形への応用

1 円と分点

内分点と外分点

（教科書 p.62）

内分点と外分点

2 点 A(α)，B(β) を結ぶ線分 AB を $m:n$ の比に

内分する点は $\frac{n\alpha+m\beta}{m+n}$，　外分する点は $\frac{-n\alpha+m\beta}{m-n}$

とくに，線分 AB の中点は $\frac{\alpha+\beta}{2}$

問 1　次の 2 点 α，β を結ぶ線分を 3 : 2 に内分する点および外分する点を表す複素数を求めよ。

(1)　$\alpha=2+4i$，$\beta=7-i$

内分　$\frac{2\alpha+3\beta}{3+2}=\frac{2(2+4i)+3(7-i)}{5}=\frac{25+5i}{5}=\boldsymbol{5+i}$

外分　$\frac{-2\alpha+3\beta}{3-2}=-2(2+4i)+3(7-i)=\boldsymbol{17-11i}$

(2)　$\alpha=4-i$，$\beta=-2+3i$

内分　$\frac{2\alpha+3\beta}{3+2}=\frac{2(4-i)+3(-2+3i)}{5}=\boldsymbol{\frac{2+7i}{5}}$

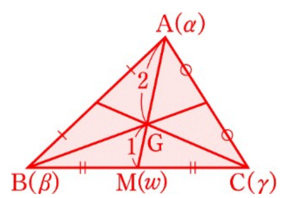
外分　$\frac{-2\alpha+3\beta}{3-2}=-2(4-i)+3(-2+3i)=\boldsymbol{-14+11i}$

例題 1　複素数平面上の 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) を 3 頂点とする△ABC の重心 G は，$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ で表されることを証明せよ。

証明　線分 BC の中点を M(w) とすると，重心 G は中線 AM を 2 : 1 に内分する点である。

$w=\frac{\beta+\gamma}{2}$ であるから，G は

$$\frac{\alpha+2\cdot\frac{\beta+\gamma}{2}}{2+1}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$



すなわち，△ABC の重心 G は $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ で表される。

問 2　△ABC の 2 頂点 A，B および重心 G を表す複素数をそれぞれ $-1-i$，$8+i$，$4+2i$ とするとき，頂点 C を表す複素数を求めよ。

頂点 C を表す複素数を γ とすると

$$\frac{(-1-i)+(8+i)+\gamma}{3}=4+2i$$

$7+\gamma=3(4+2i)$

よって　$\gamma=\boldsymbol{5+6i}$

垂直二等分線

（教科書 p.63）

例 1　条件 $|z+2|=|z-i|$ を満たす点 z は，2 点 A(-2)，B(i) を結ぶ線分 AB の（　垂直二等分線　）をえがく。

問 3　次の条件を満たす点 z はどのような図形をえがくか。

$|z-3|=|z+1-i|$

2 点 A(3)，B$(-1+i)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線をえがく。

円

（教科書 p.64）

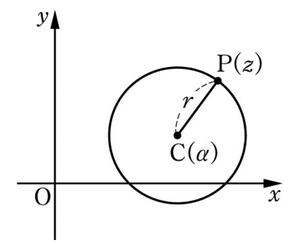
点 C(α) を中心とする半径 r の円上の点 P(z) は

CP $=r$

である。すなわち

（① $\boldsymbol{|z-\alpha|=r}$　）

を満たす点である。



とくに，原点 O を中心とする半径 r の円上の点 P(z) は

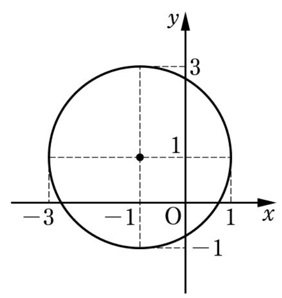
（② $\boldsymbol{|z|=r}$　）

を満たす点である。

例 2　条件 $|z+1-i|=2$ を満たす点 z は，どのような図形をえがくか調べてみよう。

（　$|z-(-1+i)|=2$　）

と変形できるから，点 z は，（　点 $-1+i$　）を中心とする（　半径 2 の円　）をえがく。



問 4 次の条件を満たす点 z はどのような図形をえがくか。

(1) $|z-2i|=3$

点 $2i$ を中心とする半径 3 の円

(2) $|z-2+3i|=4$

点 $2-3i$ を中心とする半径 4 の円

例題 2 $w=i(z+2)$ とする。点 z が単位円上を動くとき，点 w はどのような図形をえがくか。

解 点 z が単位円上を動くから

$|z|=1$ ……①

$w=i(z+2)$ を z について解くと

$$z=\frac{w}{i}-2$$

$$=\frac{w-2i}{i}$$

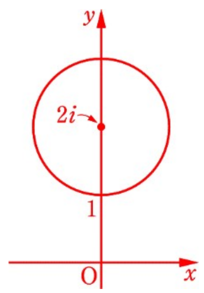
これを①に代入して

$$\left|\frac{w-2i}{i}\right|=1$$

$$\frac{|w-2i|}{|i|}=1$$

$$|w-2i|=1$$

したがって，点 w は点 $2i$ を中心とする半径 1 の円をえがく。



問 5 点 z が単位円上を動くとき，次のように表される点 w はどのような図形をえがくか。

(1) $w=z-1$

点 z が単位円上を動くから

$|z|=1$ ……①

$w=z-1$ を z について解くと

$z=w+1$

これを①に代入して

$|w+1|=1$

したがって，点 w は点 -1 を中心とする半径 1 の円をえがく。

(2) $w=i(2z+1)$

点 z が単位円上を動くから

$|z|=1$ ……①

$w=i(2z+1)$ を z について解くと

$$z=\left(\frac{w}{i}-1\right)\times\frac{1}{2}=\frac{w-i}{2i}$$

これを①に代入して

$$\left|\frac{w-i}{2i}\right|=1$$

$$\frac{|w-i|}{|2i|}=1$$

$$|w-i|=2$$

したがって，点 w は点 i を中心とする半径 2 の円をえがく。

アポロニウスの円

（教科書 p.66）

例題 3 複素数平面上で，2 点 A(-1)，B(2) からの距離の比が $2:1$ である点 P(z) 全体の表す図形を求めよ。

解 条件より　AP : BP $=2:1$　すなわち　AP $=2$BP

よって　$|z+1|=2|z-2|$

両辺を 2 乗すると

$$|z+1|^2=2^2|z-2|^2$$

$$(z+1)\overline{(z+1)}=4(z-2)\overline{(z-2)}$$

$$(z+1)(\bar{z}+1)=4(z-2)(\bar{z}-2)$$

◀ $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

展開して整理すると　$z\bar{z}+(z+\bar{z})+1=4\{z\bar{z}-2(z+\bar{z})+4\}$

$$3z\bar{z}-9(z+\bar{z})+15=0$$

$$z\bar{z}-3(z+\bar{z})+5=0$$

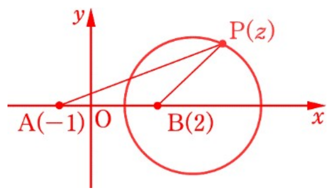
よって　$(z-3)(\bar{z}-3)=4$

$$(z-3)\overline{(z-3)}=4$$

$$|z-3|^2=2^2$$

したがって　$|z-3|=2$

これは中心が点 3，半径 2 の円を表す。



一般に，$m\neq n$ のとき，2 点 A，B からの距離の比が $m:n$ である点全体は円をえがく。この円を（③　アポロニウスの円　）という。

問 6 複素数平面上で，2 点 A$(-2i)$，B$(2i)$ からの距離の比が $3:1$ である点 P(z) 全体の表す図形を求めよ。

条件より　AP : BP = 3 : 1

すなわち　AP = 3BP

よって　$|z+2i| = 3|z-2i|$

両辺を 2 乗すると

$|z+2i|^2 = 3^2|z-2i|^2$

$(z+2i)\overline{(z+2i)} = 9(z-2i)\overline{(z-2i)}$

$(z+2i)(\overline{z}-2i) = 9(z-2i)(\overline{z}+2i)$

展開して整理すると

$z\overline{z} - 2i(z-\overline{z}) + 4 = 9\{z\overline{z} + 2i(z-\overline{z}) + 4\}$

$8z\overline{z} + 20i(z-\overline{z}) + 32 = 0$

$z\overline{z} + \frac{5}{2}i(z-\overline{z}) + 4 = 0$

よって　$\left(z-\frac{5}{2}i\right)\left(\overline{z}+\frac{5}{2}i\right) = \frac{9}{4}$

$\left(z-\frac{5}{2}i\right)\overline{\left(z-\frac{5}{2}i\right)} = \frac{9}{4}$

$\left|z-\frac{5}{2}i\right|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

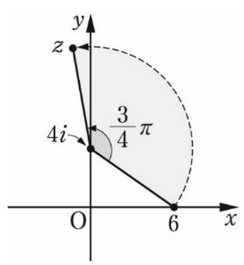
したがって　$\left|z-\frac{5}{2}i\right| = \frac{3}{2}$

これは中心が点 $\frac{5}{2}i$，半径 $\frac{3}{2}$ の円を表す。

一般の点における回転

（教科書 p.67）

例 3 点 6 を点 $4i$ を中心に $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した点 z を求めてみよう。



$z = \left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)(6-4i) + 4i$

$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(6-4i) + 4i$

$= (-\sqrt{2} + 5\sqrt{2}i) + 4i$

$= -\sqrt{2} + (4+5\sqrt{2})i$

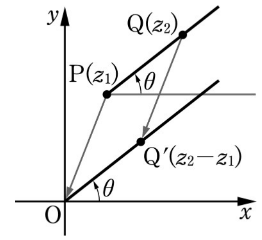
問 7 点 $5+4i$ を点 $1+i$ を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点 z を求めよ。

$$z = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\{(5+4i)-(1+i)\} + (1+i) = i(4+3i) + (1+i) = -2+5i$$

2 複素数と三角形

2 直線のなす角

（教科書 p.68）

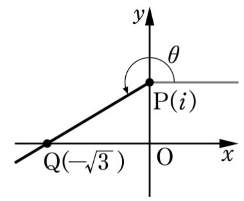


複素数平面上の異なる 2 点 P(z_1)，Q(z_2) について，半直線 PQ が実軸の正の向きとなす角を θ とする。ただし，角は向きを含めて考える。

$-z_1$ だけ平行移動すると，点 P は原点 O に移り，点 Q は点 Q′(z_2-z_1) に移るから，次のことが成り立つ。

（④　$\boldsymbol{\theta = \arg(z_2 - z_1)}$　）

例 4 複素数 i，$-\sqrt{3}$ が表す点をそれぞれ P，Q とする。半直線 PQ が実軸の正の向きとなす角を θ とすると



$-\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$

であるから　$\theta = \arg(-\sqrt{3}-i) = \frac{7}{6}\pi$

問 8 複素数 $\sqrt{3}+i$，$4i$ が表す点をそれぞれ P，Q とする。このとき，半直線 PQ が実軸の正の向きとなす角を求めよ。

$4i - (\sqrt{3}+i) = -\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

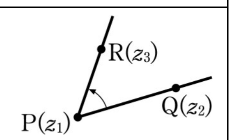
であるから，半直線 PQ が実軸の正の向きとなす角を θ とすると

$\theta = \arg(-\sqrt{3}+3i) = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$

複素数と角

異なる 3 点 P(z_1)，Q(z_2)，R(z_3) に対して

$$\angle\mathrm{QPR} = \arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)$$



例 5 複素数 $1+2i$, $3-i$, $2+7i$ が表す点をそれぞれ P, Q, R とするとき，∠QPR を求めてみよう。

（ $\dfrac{(2+7i)-(1+2i)}{(3-i)-(1+2i)}=\dfrac{1+5i}{2-3i}=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$ ）

よって　∠QPR ＝ $\arg\dfrac{(2+7i)-(1+2i)}{(3-i)-(1+2i)}=\dfrac{3}{4}\pi$

問 9 複素数 $-\sqrt{3}+i$, i, $-2\sqrt{3}+4i$ が表す点をそれぞれ P, Q, R とするとき，∠QPR を求めよ。

$$\frac{\left(-2\sqrt{3}+4i\right)-\left(-\sqrt{3}+i\right)}{i-\left(-\sqrt{3}+i\right)}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}}=-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

よって

$$\angle\mathrm{QPR}=\arg\frac{\left(-2\sqrt{3}+4i\right)-\left(-\sqrt{3}+i\right)}{i-\left(-\sqrt{3}+i\right)}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$$

3 点 P, Q, R が一直線上にある ⟺ $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ が実数

2 直線 PQ, PR が垂直に交わる ⟺ $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ が純虚数

例 6 3 点 P(1), Q$(2+i)$, R$(x-i)$ について，P, Q, R が一直線上にあるときと，2 直線 PQ, PR が垂直に交わるときの実数 x の値をそれぞれ求めてみよう。

（ $\dfrac{(x-i)-1}{(2+i)-1}=\dfrac{(x-1)-i}{1+i}=\dfrac{(x-2)-xi}{2}$ ）

であるから，3 点 P, Q, R が一直線上にあるのは，（ $x=0$ ）のとき，2 直線 PQ, PR が垂直に交わるのは，（ $x=2$ ）のときである。

問 10 3 点 P$(2+5i)$, Q$(-1-i)$, R$(4+xi)$ について，次の条件を満たすような実数 x の値を求めよ。

$$\frac{(4+xi)-(2+5i)}{(-1-i)-(2+5i)}=\frac{2+(x-5)i}{-3-6i}$$
$$=-\frac{\{2+(x-5)i\}(1-2i)}{3(1+2i)(1-2i)}$$
$$=-\frac{2x-8+(x-9)i}{15}\quad\cdots\cdots①$$

(1)　3 点 P, Q, R が一直線上にある。

3 点 P, Q, R が一直線上にあるから，①は実数である。したがって

$x-9=0$ より　$\boldsymbol{x=9}$

(2)　2 直線 PQ, PR が垂直に交わる。

2 直線 PQ, PR が垂直に交わるから，①は純虚数である。したがって

$2x-8=0$ より　$\boldsymbol{x=4}$

応用例題 4 3 点 P(z_1), Q(z_2), R(z_3) において，$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=1+\sqrt{3}i$ が成り立つとき，△PQR はどのような三角形か。

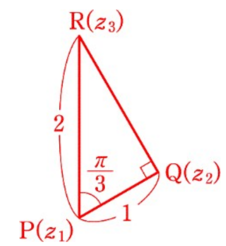
解

$\left|\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right|=\left|1+\sqrt{3}i\right|=2$ より

$\mathrm{PQ}:\mathrm{PR}=|z_2-z_1|:|z_3-z_1|=1:2$

また

$$\angle\mathrm{QPR}=\arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)=\arg\left(1+\sqrt{3}i\right)=\frac{\pi}{3}$$



したがって，△PQR は，$\angle\mathrm{PQR}=\frac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{QPR}=\frac{\pi}{3}$ であるような直角三角形である。

問 11 3 点 P(z_1), Q(z_2), R(z_3) において，$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=i$ が成り立つとき，△PQR はどのような三角形か。

$\left|\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right|=|i|=1$ より

$|z_3-z_1|=|z_2-z_1|$

また

$$\angle\mathrm{QPR}=\arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)=\arg i=\frac{\pi}{2}$$

ゆえに　$\mathrm{PR}=\mathrm{PQ}$, $\angle\mathrm{QPR}=\frac{\pi}{2}$

したがって，△PQR は $\boldsymbol{\angle\mathrm{QPR}=\frac{\pi}{2}}$ であるような直角二等辺三角形である。

問 題

（教科書 p.71）

7　複素数平面上の 3 点 $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 1 - 3i$, $z_3 = 1 - i$ をそれぞれ P, Q, R とするとき，次の点を表す複素数を求めよ。

(1)　平行四辺形 PQRS の頂点 S

点 S を表す複素数を z_4 とすると，対角線 PR の中点と QS の中点は一致するから

$$\frac{z_1 + z_3}{2} = \frac{z_2 + z_4}{2}$$

よって　$z_4 = z_1 + z_3 - z_2 = (3 + 5i) + (1 - i) - (1 - 3i) = \mathbf{3 + 7}\boldsymbol{i}$

(2)　正三角形 PQT の頂点 T

点 T を表す複素数を z_5 とすると，Q を P を中心に $\pm\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点が T である。

$-\frac{\pi}{3}$ だけ回転したとき

$$z_5 = \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(z_2 - z_1) + z_1$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2 - 8i) + (3 + 5i)$$

$$= \boldsymbol{(2 - 4\sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i}$$

$\frac{\pi}{3}$ だけ回転したとき

$$z_5 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(z_2 - z_1) + z_1$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2 - 8i) + (3 + 5i)$$

$$= \boldsymbol{(2 + 4\sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i}$$

8　複素数平面上の 3 点 P$(1 + 5i)$, Q$(2 + 3i)$, R$(-1 + 9i)$ は一直線上にあることを示せ。また，P は線分 QR をどのような比に分けるかを答えよ。

$z_1 = 1 + 5i$, $z_2 = 2 + 3i$, $z_3 = -1 + 9i$ とおくと

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{(-1 + 9i) - (1 + 5i)}{(2 + 3i) - (1 + 5i)} = \frac{-2 + 4i}{1 - 2i} = -2$$

この値が実数であるから，3 点 P, Q, R は一直線上にある。

また，$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = -2$ より　$z_1 = \frac{2z_2 + z_3}{3}$

したがって，P は線分 QR を **1 : 2 に内分する。**

9　$\alpha = 2 + 6i$ とする。2 点 0, α を結ぶ線分を斜辺とする直角二等辺三角形の第 3 の頂点を表す複素数 β を求めよ。また，この三角形の面積を求めよ。

点 β は点 α を点 0 を中心に $\pm\frac{\pi}{4}$ だけ回転し，点 0 からの距離を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍したものである。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\alpha = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2 + 6i) = -2 + 4i$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\alpha = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)(2 + 6i) = 4 + 2i$$

したがって

$\boldsymbol{\beta = -2 + 4i,\ 4 + 2i}$

この三角形の直角をはさむ 2 辺の長さは

$|\beta| = 2\sqrt{5}$

よって，その面積は

$$\frac{1}{2} \times (2\sqrt{5})^2 = \mathbf{10}$$

１０　点 z に対して，$w=(1+i)(z-1)$ で表される点 w がある。このとき，次の問に答えよ。

(1)　z を w の式で表せ。

$w=(1+i)(z-1)$ を z について解くと

$$z-1=\frac{w}{1+i}$$

$$z=\frac{w}{1+i}+1$$

よって　$\boldsymbol{z=\frac{w+1+i}{1+i}}$

(2)　点 z が単位円上を動くとき，点 w はどのような図形をえがくか。

点 z が単位円上を動くから

$|z|=1$　……①

(1) の結果を①に代入して

$$\left|\frac{w+1+i}{1+i}\right|=1$$

$$\frac{|w+1+i|}{|1+i|}=1$$

$$\frac{|w+1+i|}{\sqrt{2}}=1$$

$$|w+1+i|=\sqrt{2}$$

したがって，点 w は点 $\boldsymbol{-1-i}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ の円をえがく。

１１　複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ を頂点とする△ABC と，3 点 $\mathrm{P}(w_1)$，$\mathrm{Q}(w_2)$，$\mathrm{R}(w_3)$ を頂点とする△PQR について，次のことを証明せよ。

$\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}$ のとき　△ABC∽△PQR

$\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}$ であるから

$\left|\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right|=\left|\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\right|$ より

$$\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{QR}}$$

$\arg\left(\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right)=\arg\left(\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\right)$ より

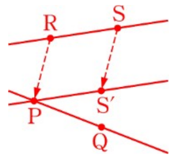
$$\angle\mathrm{CBA}=\angle\mathrm{RQP}$$

△ABC と△PQR において，2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△ABC ∽△PQR

１２ 4 点 $\mathrm{P}(z_1)$，$\mathrm{Q}(z_2)$，$\mathrm{R}(z_3)$，$\mathrm{S}(z_4)$ について，次が成り立つことを示せ。

点 R が点 P に重なるように直線 RS を平行移動すると，点 S は点 $\mathrm{S}'(z_4+z_1-z_3)$ に移るとする。



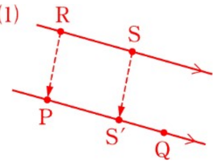
（1） 2 直線 PQ，RS が平行である $\Longleftrightarrow$ $\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}$ が実数

2 直線 PQ，RS が平行である

$\Leftrightarrow$ 3 点 P，Q，S′ が一直線上にある

$\Leftrightarrow$ $\frac{(z_4+z_1-z_3)-z_1}{z_2-z_1}=\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}$ が実数

(1)



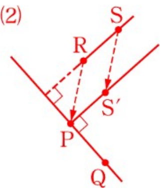
（2） 2 直線 PQ，RS が垂直に交わる $\Longleftrightarrow$ $\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}$ が純虚数

2 直線 PQ，RS が垂直に交わる

$\Leftrightarrow$ 2 直線 PQ，PS′ が垂直に交わる

$\Leftrightarrow$ $\frac{(z_4+z_1-z_3)-z_1}{z_2-z_1}=\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}$ が純虚数

(2)



参 考　**直線の方程式**

（教科書 p.72）

問 1　次のとき，上に述べた点 z は，2 点 α，β を結ぶ線分をどのような比に内分または外分する点か。

（1） $t=\frac{2}{3}$

$z=\frac{1}{3}\alpha+\frac{2}{3}\beta=\frac{\alpha+2\beta}{2+1}$ より

2：1 に内分する。

（2） $t=3$

$z=-2\alpha+3\beta=\frac{-2\alpha+3\beta}{3-2}$ より

3：2 に外分する。

（3） $t=-2$

$z=3\alpha-2\beta=\frac{-3\alpha+2\beta}{2-3}$ より

2：3 に外分する。