1 節 複素数平面

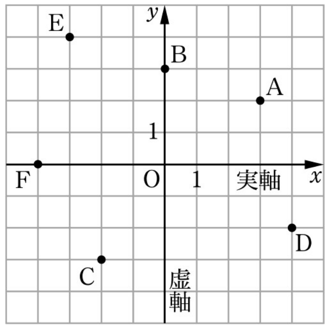
1 複素数平面

複素数平面

（教科書 p.46）

平面上に座標軸を定め，複素数
（①　　　　　　　　）
に点 $(a,\ b)$ を対応させる。このとき，すべての複素数はそれぞれ平面上の 1 つの点で表され，逆に，平面上のすべての点はそれぞれ 1 つの複素数で表されることになる。

例 1 右の図で，点 $\mathrm{A}(3,\ 2)$，$\mathrm{B}(0,\ 3)$，$\mathrm{C}(-2,\ -3)$ はそれぞれ
（　　　　　　），（　　　　　），（　　　　　　　　）を表す。



問 1 上の図で，点 D，E，F はそれぞれどのような複素数を表すか。

このように，各点 $(a,\ b)$ が複素数 $z=a+bi$ を表している平面を（②　　　　　　　　）という。このとき，x 軸を（③　　　　　），y 軸を（④　　　　　）という。

複素数 z に対応する点 P を（⑤　　　　　　）と表す。また，単に（⑥　　　　　）ということもある。たとえば，例 1 における点 $\mathrm{A}(3,\ 2)$ は，$\mathrm{A}(3+2i)$ と表し，点 $3+2i$ という。また，点 0 は原点 O である。

問 2 4 点 $\mathrm{A}(-1+i)$，$\mathrm{B}(2+3i)$，$\mathrm{C}(-2i)$，$\mathrm{D}(-1)$ をそれぞれ複素数平面上に示せ。

共役な複素数の性質

（教科書 p.47）

共役な複素数について，次のことが成り立つ。

共役な複素数の性質	
1 $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$	2 $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$
3 $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$	4 $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

問 3 $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ として，上のことを示せ。

複素数 $z=a+bi$ は複素数平面上では点 $(a,\ b)$ で表され，z と共役な複素数 $\bar{z}=a-bi$ は点 $(a,\ -b)$ で表される。

したがって，右の図より

（⑦　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

である。

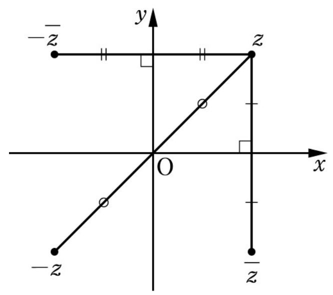
同様にして

（⑧　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

であり

（⑨　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

であることがわかる。



また，このことより，次のことが成り立つ。

（⑩　　　　　　　　　　　　　　　）

（⑪　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

問 4　複素数 $2-3i$ を表す点と実軸，原点，虚軸に関して対称な点が表す複素数をそれぞれ求めよ。

複素数の絶対値

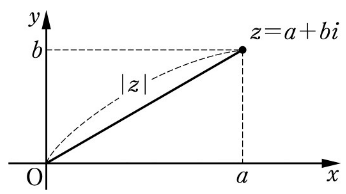
（教科書 p.48）

点 z と原点 O の距離を複素数 z の（⑫　　　　　　　　）といい，$|z|$ で表す。

したがって，$z=a+bi$ とすると

（⑬　　　　　　　　　　　　　　　　）

である。



例 2　$z=1-2i$ について　　$|z|=$

問 5　複素数 $-3+2i,\ 5+5i,\ -3i$ の絶対値をそれぞれ求めよ。

絶対値の定義から次のことが成り立つ。

複素数の絶対値
1　$\lvert z\rvert \geqq 0$　　　とくに　$\lvert z\rvert=0 \iff z=0$
2　$\lvert z\rvert=\lvert -z\rvert=\lvert \bar{z}\rvert$
3　$\lvert z\rvert^2=z\bar{z}$

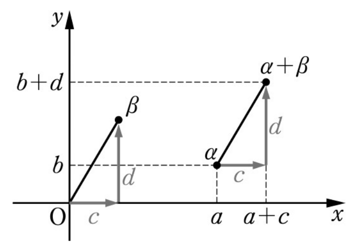
問 6　上の 2，3 が成り立つことを示せ。

複素数の和と差

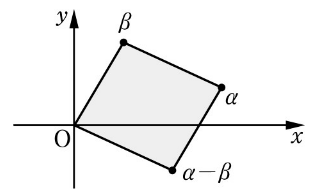
（教科書 p.49）

点 $\alpha+\beta$ は，点 α を実軸方向に c，虚軸方向に d だけ平行移動した点である。このような平行移動を，複素数 α を

（⑭　　　　　　　　　　　　　　　　）という。



右の図より，点 α と点 β の距離は（⑮　　　　　　　　）であることがわかる。この距離は（⑯　　　　　　　）と表してもよい。



例 3　2 点 $\alpha=4-3i,\ \beta=2+i$ 間の距離は

$|\alpha-\beta|=$

問 7　次の 2 点間の距離を求めよ。

(1)　$\alpha=5+2i,\ \beta=1-i$

(2)　$\alpha=2-5i,\ \beta=7+7i$

2　複素数の極形式

極形式

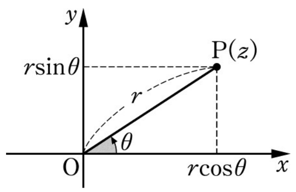
（教科書 p.50）

複素数平面上で，0 でない複素数 $z=a+bi$ が表す点を P とする。

P と原点 O の距離を r，実軸の正の部分を始線としたときの動径 OP が表す角を θ とすると

$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$

であるから



（⑰　　　　　　　　　　　　　　　）

と表される。このような表し方を複素数 z の（⑱　　　　　　　　）という。

ここで

（⑲　　　　　　　　　　　　　　）

である。

また，θ を複素数 z の（⑳　　　　　　　）といい，記号

（㉑　　　　　　　　　）

で表す。(*)ふつう θ は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えるが，一般角で考えることもある。すなわち，複素数 z の 1 つの偏角を θ とすると，整数 n を用いて，$\arg z$ は，一般に，次のように表される。

（㉒　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

$z=0$ のときは，$r=0$ であり，偏角は定まらない。

複素数の極形式
$\boldsymbol{z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$ ただし，　$r=\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$，$\theta=\arg z$

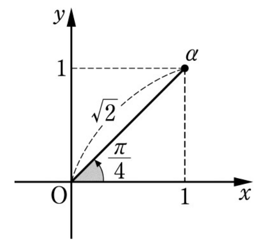
注意　この章では，$\arg z=\arg w$ とは「 2π の整数倍の差を無視したとき z と w の偏角が等しい」という意味に用いる。

例 4 (1)　$\alpha=1+i$ を極形式で表してみよう。

絶対値は

$r=|\alpha|=$

右の図より，偏角は　$\theta=$



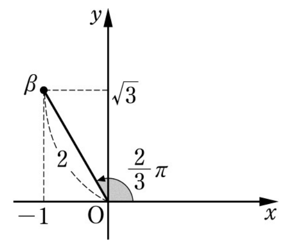
よって　　$\alpha=$

(2)　$\beta=-1+\sqrt{3}i$ を極形式で表してみよう。

絶対値は

$r=|\beta|=$

右の図より，偏角は　$\theta=$



よって　　$\beta=$

問 8　次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　$1-i$

⑵　$-1-i$

⑶　-2

⑷　$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

⑸　$3+\sqrt{3}i$

⑹ $-2i$

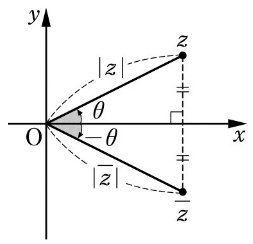
複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と共役な複素数 $\bar{z}$ は，複素数平面上では点 z と実軸に関して対称な点で表されるから

$$\bar{z}=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

である。よって

（㉓　　　　　　　　　　　　　　）

である。



問 9　複素数 z の絶対値を r，偏角を θ とする。このとき，複素数 $-z$，$-\bar{z}$ の絶対値と偏角を r，θ を用いてそれぞれ表せ。

複素数の積と商

（教科書 p.52）

0 でない 2 つの複素数 z_1，z_2 を極形式でそれぞれ

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

と表すとき，複素数 z_1，z_2 の積や商について，次のことが成り立つ。

複素数の積と商		
1	積	$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$
		$\boldsymbol{\lvert z_1z_2\rvert=\lvert z_1\rvert\lvert z_2\rvert}$，$\boldsymbol{\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2}$
2	商	$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$
		$\boldsymbol{\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert=\frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}}$，$\boldsymbol{\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2}$

上の性質 1，2 は，数学Ⅱで学んだ三角関数の加法定理

$$\sin(\theta_1+\theta_2)=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2$$
$$\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$$

を用いて示すことができる。

証明　1 を証明してみよう。

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}\\&=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}\end{aligned}$$

ゆえに

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|$$
$$\arg(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2=\arg z_1+\arg z_2$$

問 10 $\boxed{2}$ が成り立つことを証明せよ。

問 11 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき，$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$ であることを示せ。

例 5 $z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$，$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

のとき，z_1z_2 と $\frac{z_1}{z_2}$ を求めてみよう。

$z_1z_2=$

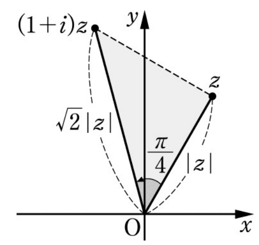
$\frac{z_1}{z_2}=$

問 12 $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，$z_2=3\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ のとき，z_1z_2 と $\frac{z_1}{z_2}$ を求めよ。

複素数の積の図表示

（教科書 p.53）

例 6 点 z と点 $(1+i)z$ の位置関係を考えてみよう。



$|1+i|=$　　　　　，$\arg(1+i)=$

であるから，点 $(1+i)z$ は，（　　　　　）を（　　　　　）を中心に（　　　　）だけ回転し，原点からの距離 $|z|$ を（　　　　）倍した点である。

問 13 点 z に対して，次の点はどのような位置関係にあるか。

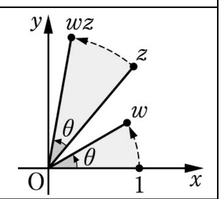
(1)　$(\sqrt{3}+3i)z$

(2)　$\sqrt{2}(-1+i)z$

複素数 z と絶対値が 1 である複素数 $w=\cos\theta+i\sin\theta$ との積について，次のことが成り立つ。

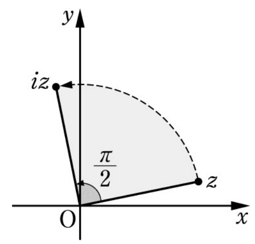
複素数の積と回転

$w=\cos\theta+i\sin\theta$ とするとき，wz の表す点は，点 z を原点 O を中心に角 θ だけ回転した点となる。



例 7 (1)　点 z を原点 O を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点を表す複素数は

（　　　　　　　　　　　）

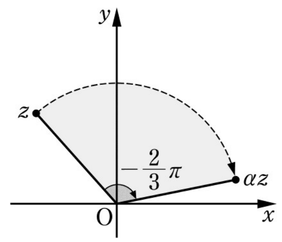


(2)　点 z を原点 O を中心に $-\frac{2}{3}\pi$ だけ回転した点を表す複素数は

$\alpha=$

$=$

としたときの（　　　　）である。



問 14 複素数 z に対して，点 z を原点 O を中心に $\frac{\pi}{3}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点は，それぞれどのような複素数で表されるか。

例題 1　$\alpha=1+i$ とする。2 点 0, α を頂点とする正三角形の第 3 の頂点を表す複素数 β を求めよ。

考え方　α の表す点を A, β の表す点を B とすると，△OAB が正三角形となるのは，OA = OB, $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$ となるときである。

解

問 15 $\alpha=2+3i$ とする。原点 O を直角の頂点とする直角二等辺三角形の頂点の 1 つが点 α であるとき，第 3 の頂点を表す複素数 β を求めよ。

3 ド・モアブルの定理

ド・モアブルの定理

（教科書 p.56）

絶対値が 1 の複素数 z の累乗について考えてみよう。

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

とするとき

$$z^2=zz=\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$$

$$z^3=zz^2=\cos(\theta+2\theta)+i\sin(\theta+2\theta)=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

したがって，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対して

$$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つことがわかる。

また

$$\frac{1}{z}=\frac{\cos 0+i\sin 0}{\cos\theta+i\sin\theta}$$

$$=\cos(0-\theta)+i\sin(0-\theta)$$

$$=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$$

ここで，正の整数 n に対して $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$ と定めると，①より

$$z^{-n}=\frac{1}{z^n}=\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=\cos\bigl(n\cdot(-\theta)\bigr)+i\sin\bigl(n\cdot(-\theta)\bigr)$$

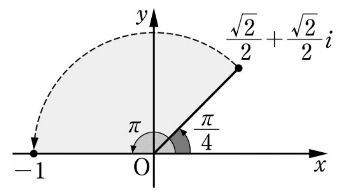
$$=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$$

である。

したがって，$z^0=1$ と定めると，次の（㉔　　　　　　　　　　）が成り立つ。

ド・モアブルの定理
整数 n に対して $\boldsymbol{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta}$

例 8 ド・モアブルの定理を用いて，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4$ の値を求めてみよう。



$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=$

よって

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4=$

$=$

$=$

問 16 次の値を計算せよ。

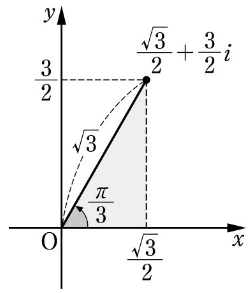
(1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{12}$

(2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^6$

(3) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-9}$

例題 2 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)^5$を計算せよ。

解



問 17 次の値を計算せよ。

(1) $\left(\sqrt{3}+i\right)^9$

(2) $(1+i)^{-4}$

(3) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{11}$

1の n 乗根

（教科書 p.58）

自然数 n に対して，方程式 $z^n = \alpha$ を満たす複素数 z を（㉕　　　　　　　　　　　　　）という。

問 18 次の問に答えよ。

(1)　1 の 4 乗根を求め，複素数平面上に図示せよ。

(2)　1 の 6 乗根を求め，複素数平面上に図示せよ。

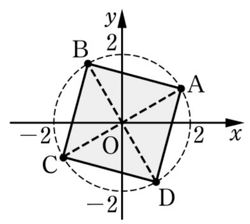
一般に，次のことが成り立つ。

1 の n 乗根
1 の n 乗根は，次の n 個の複素数である。 $z_k=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$

例題 3　方程式 $z^4=8\left(-1+\sqrt{3}i\right)$ を解け。

解

注意　この 4 つの解は $8\left(-1+\sqrt{3}i\right)$ の 4 乗根である。
これらを表す複素数平面上の点 A，B，C，D は原点を中心とする半径 2 の円上にあり，正方形の 4 つの頂点となっている。



問 19 次の方程式を解け。

(1)　$z^2=-1-\sqrt{3}i$

(2)　$z^8 = 16$

問 題

（教科書 p.61）

1　$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ のとき，次の複素数の極形式を求め，それらを図示せよ。

(1)　$2z$

(2)　$\bar{z}$

(3)　iz

(4)　z^2

2　次の計算をせよ。

（1）　$2\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

(2)　$\dfrac{\sqrt{3}\left(\cos\frac{11}{18}\pi + i\,\mathrm{si}\ \ \frac{11}{18}\pi\right)}{2\left(\cos\frac{5}{18}\pi + i\,\mathrm{s}\ \ \frac{5}{18}\pi\right)}$

3　点 $\sqrt{3} + i$ を原点 0 を中心に，次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

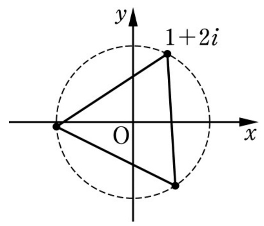
（1）　$\frac{\pi}{3}$

(2)　$-\frac{\pi}{2}$

(3)　$-\frac{5}{6}\pi$

(4)　$\frac{4}{3}\pi$

4 原点 O を中心とする円に内接する正三角形の 1 つの頂点を表す複素数が $1+2i$ であるとき，他の 2 頂点を表す複素数を求めよ。



5 次の値を計算せよ。

(1) $\left(\sqrt{3}-i\right)^4$

(2) $\left(\frac{\sqrt{3}-3i}{2}\right)^6$

(3) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^6$

6 次の方程式を解き，解が表す点を複素数平面上に図示せよ。

(1) $z^3 = i$

(2) $z^6 + 8 = 0$

⑶ $z^2 = 1 - \sqrt{3}i$

1 節 複素数平面

1 複素数平面

複素数平面

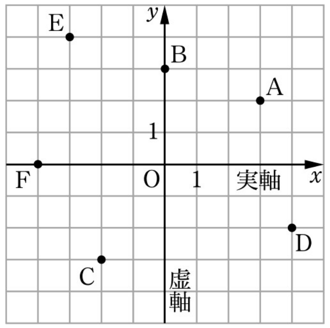
（教科書 p.46）

平面上に座標軸を定め，複素数

（① $z = a + bi$ ）

に点 $(a,\ b)$ を対応させる。このとき，すべての複素数はそれぞれ平面上の 1 つの点で表され，逆に，平面上のすべての点はそれぞれ 1 つの複素数で表されることになる。

例 1 右の図で，点 A(3, 2), B(0, 3), C(−2, −3) はそれぞれ
（ $3+2i$ ），（ $3i$ ），（ $-2-3i$ ）を表す。



問 1 上の図で，点 D, E, F はそれぞれどのような複素数を表すか。

点 D(4, −2) は $4-2i$ を表す。

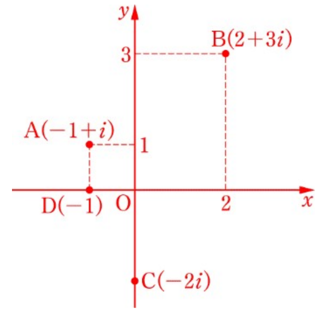
点 E(−3, 4) は $-3+4i$ を表す。

点 F(−4, 0) は -4 を表す。

このように，各点 $(a,\ b)$ が複素数 $z = a + bi$ を表している平面を（② 複素数平面 ）という。このとき，x 軸を（③ 実軸 ），y 軸を（④ 虚軸 ）という。

複素数 z に対応する点 P を（⑤ $\mathrm{P}(z)$ ）と表す。また，単に（⑥ 点 z ）ということもある。たとえば，例 1 における点 A(3, 2) は，A$(3+2i)$ と表し，点 $3+2i$ という。また，点 0 は原点 O である。

問 2 4 点 A$(-1+i)$, B$(2+3i)$, C$(-2i)$, D(-1) をそれぞれ複素数平面上に示せ。



共役な複素数の性質

（教科書 p.47）

共役な複素数について，次のことが成り立つ。

共役な複素数の性質	
① $\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$	② $\overline{\alpha-\beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$
③ $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$	④ $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

問 3 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ として，上のことを示せ。

① $\overline{\alpha+\beta} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta} = \overline{(a+bi)}+\overline{(c+di)} = (a-bi)+(c-di) = (a+c)-(b+d)i$

よって $\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha}+\overline{\beta}$

② $\overline{\alpha-\beta} = \overline{(a+bi)-(c+di)} = \overline{(a-c)+(b-d)i} = (a-c)-(b-d)i$

$\overline{\alpha}-\overline{\beta} = \overline{(a+bi)}-\overline{(c+di)} = (a-bi)-(c-di) = (a-c)-(b-d)i$

よって $\overline{\alpha-\beta} = \overline{\alpha}-\overline{\beta}$

③ $\overline{\alpha\beta} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd)-(ad+bc)i$

$\overline{\alpha}\,\overline{\beta} = \overline{(a+bi)}\,\overline{(c+di)} = (a-bi)(c-di) = (ac-bd)-(ad+bc)i$

よって $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$

④ $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \overline{\left\{\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\right\}} = \overline{\left\{\frac{(ac+b\quad)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\right\}} = \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{c^2+d^2}$

$\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = \frac{\overline{(a+bi)}}{\overline{(c+di)}} = \frac{a-bi}{c-di} = \frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)} = \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{c^2+d^2}$

よって $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

複素数 $z=a+bi$ は複素数平面上では点 $(a,\ b)$ で表され，z と共役な複素数 $\bar{z}=a-bi$ は点 $(a,\ -b)$ で表される。

したがって，右の図より

（⑦　点 $\boldsymbol{z}$ と点 $\bar{\boldsymbol{z}}$ は実軸に関して対称　）

である。

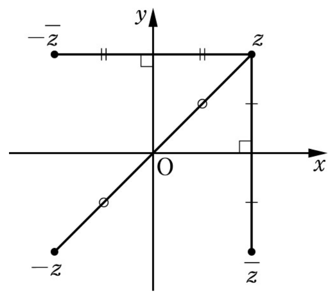
同様にして

（⑧　点 $\boldsymbol{z}$ と点 $-\boldsymbol{z}$ は原点に関して対称　）

であり

（⑨　点 $\boldsymbol{z}$ と点 $-\bar{\boldsymbol{z}}$ は虚軸に関して対称　）

であることがわかる。



また，このことより，次のことが成り立つ。

（⑩　$\boldsymbol{z}$ が実数　$\Longleftrightarrow$　$\bar{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{z}$　）

（⑪　$\boldsymbol{z}$ が純虚数　$\Longleftrightarrow$　$\bar{\boldsymbol{z}}=-\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{z}\neq 0$　）

問 4　複素数 $2-3i$ を表す点と実軸，原点，虚軸に関して対称な点が表す複素数をそれぞれ求めよ。

実軸に関して対称　$\boldsymbol{2+3i}$

原点に関して対称　$\boldsymbol{-2+3i}$

虚軸に関して対称　$\boldsymbol{-2-3i}$

複素数の絶対値

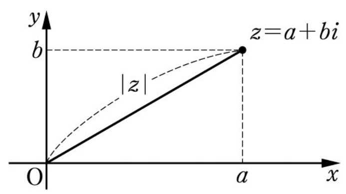
（教科書 p.48）

点 z と原点 O の距離を複素数 z の（⑫　絶対値　）といい，$|\boldsymbol{z}|$ で表す。

したがって，$z=a+bi$ とすると

（⑬　$|\boldsymbol{z}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bi}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}$　）

である。



例 2　$z=1-2i$ について　$|z|=$　$\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

問 5　複素数 $-3+2i,\ 5+5i,\ -3i$ の絶対値をそれぞれ求めよ。

$|-3+2i|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\boldsymbol{\sqrt{13}}$

$|5+5i|=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}=\boldsymbol{5\sqrt{2}}$

$|-3i|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=\sqrt{9}=\boldsymbol{3}$

絶対値の定義から次のことが成り立つ。

複素数の絶対値	
1　$|z|\geqq 0$	とくに　$|z|=0 \Longleftrightarrow z=0$
2　$|z|=|-z|=|\bar{z}|$	
3　$|z|^2=z\bar{z}$	

問 6　上の2，3が成り立つことを示せ。

$a,\ b$ を実数として，$z=a+bi$ とおく。

2の証明

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$|-z|=|-a-bi|=\sqrt{(-a)^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

$|\bar{z}|=|a-bi|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

よって　$|z|=|-z|=|\bar{z}|$

3の証明

$|z|^2=a^2+b^2$

$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

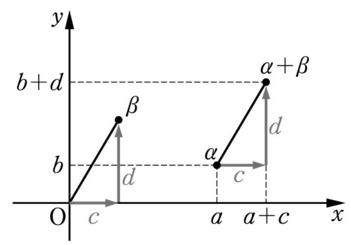
よって　$|z|^2=z\bar{z}$

複素数の和と差

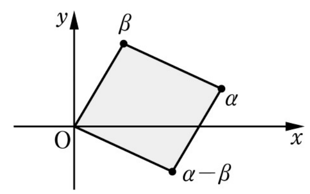
（教科書 p.49）

点 $\alpha+\beta$ は，点 α を実軸方向に c，虚軸方向に d だけ平行移動した点である。このような平行移動を，複素数 α を

（⑭　複素数 $\boldsymbol{\beta}$ だけ平行移動する　）という。



右の図より，点 α と点 β の距離は（⑮　$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$　）であることがわかる。この距離は（⑯　$|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}|$　）と表してもよい。



例 3 2 点 $\alpha = 4 - 3i$, $\beta = 2 + i$ 間の距離は

$$|\alpha - \beta| = |(4 - 3i) - (2 + i)| = |2 - 4i|$$
$$= \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

問 7 次の 2 点間の距離を求めよ。

(1) $\alpha = 5 + 2i$, $\beta = 1 - i$

$|\alpha - \beta| = |(5 + 2i) - (1 - i)| = |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$

(2) $\alpha = 2 - 5i$, $\beta = 7 + 7i$

$|\alpha - \beta| = |(2 - 5i) - (7 + 7i)| = |-5 - 12i| = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = \mathbf{13}$

2 複素数の極形式

極形式

（教科書 p.50）

複素数平面上で，0 でない複素数 $z = a + bi$ が表す点を P とする。

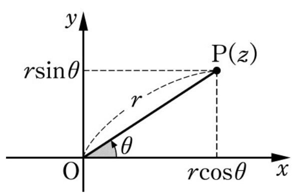
P と原点 O の距離を r，実軸の正の部分を始線としたときの動径 OP が表す角を θ とすると

$a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$

であるから

（⑰ $\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ ）

と表される。このような表し方を複素数 z の（⑱ 極形式 ）という。



ここで

（⑲ $\boldsymbol{r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|}$ ）

である。

また，θ を複素数 z の（⑳ 偏角 ）といい，記号

（㉑ $\boldsymbol{\theta = \arg z}$ ）

で表す。(*)ふつう θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えるが，一般角で考えることもある。すなわち，複素数 z の 1 つの偏角を θ とすると，整数 n を用いて，$\arg z$ は，一般に，次のように表される。

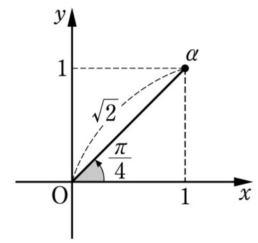
（㉒ $\boldsymbol{\arg z = \theta + 2n\pi}$ （n は整数） ）

$z = 0$ のときは，$r = 0$ であり，偏角は定まらない。

複素数の極形式
$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ただし，　$r = \lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = \arg z$

注意 この章では，$\arg z = \arg w$ とは「2π の整数倍の差を無視したとき z と w の偏角が等しい」という意味に用いる。

例 4 (1) $\alpha = 1 + i$ を極形式で表してみよう。



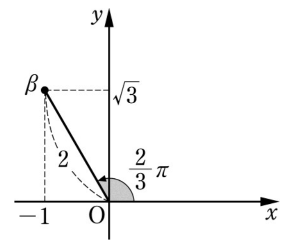
絶対値は

$r = |\alpha| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

右の図より，偏角は $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

よって $\alpha = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $\beta = -1 + \sqrt{3}i$ を極形式で表してみよう。



絶対値は

$r = |\beta| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

右の図より，偏角は $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$

よって $\beta = 2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

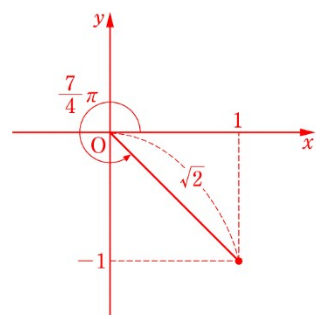
問 8 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $1 - i$

絶対値は

$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

次の図より，偏角は $\theta = \dfrac{7}{4}\pi$



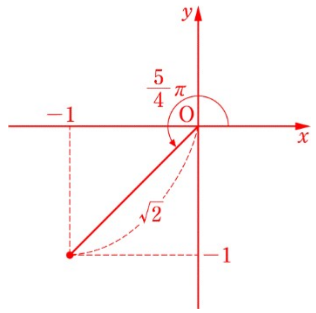
よって $\boldsymbol{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7}{4}\pi + i\sin\dfrac{7}{4}\pi\right)}$

(2)　$-1-i$

絶対値は

$$|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

次の図より，偏角は　$\theta=\frac{5}{4}\pi$



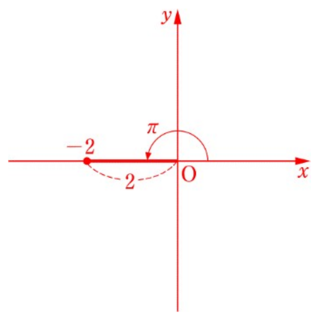
よって　　$\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$

(3)　-2

絶対値は

$$|-2|=2$$

次の図より，偏角は　$\theta=\pi$



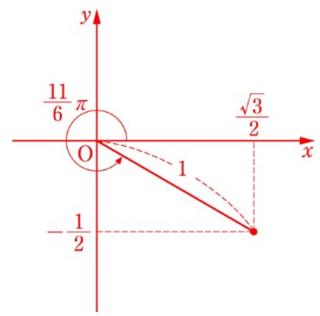
よって　　$2(\cos\pi+i\sin\pi)$

(4)　$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

絶対値は

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=1$$

次の図より，偏角は　$\theta=\frac{11}{6}\pi$



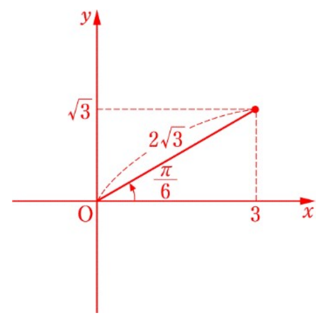
よって　　$\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi$

(5)　$3+\sqrt{3}i$

絶対値は

$$|3+\sqrt{3}i|=\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

次の図より，偏角は　$\theta=\frac{\pi}{6}$



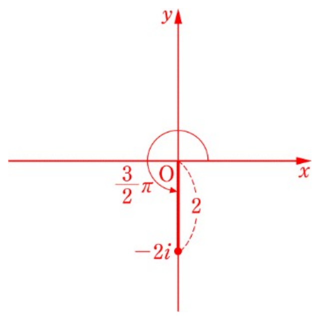
よって　　$2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

⑹　$-2i$

絶対値は

$|-2i| = 2$

次の図より，偏角は　$\theta = \frac{3}{2}\pi$



よって　　$\mathbf{2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)}$

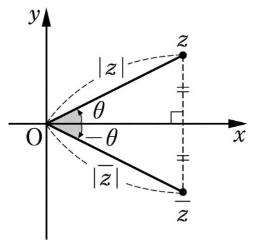
複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と共役な複素数 $\bar{z}$ は，複素数平面上では点 z と実軸に関して対称な点で表されるから

$\bar{z} = r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$

である。よって

（㉓　$|\bar{z}| = |z|$，$\arg\bar{z} = -\arg z$　）

である。



問 9　複素数 z の絶対値を r，偏角を θ とする。このとき，複素数 $-z$，$-\bar{z}$ の絶対値と偏角を r，θ を用いてそれぞれ表せ。

$-z$ は点 z と原点に関して対称な点で表されるから

$-z = r\{\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)\}$

である。よって

$|-z| = r$，$\arg(-z) = \theta + \pi$

$-\bar{z}$ は点 z と虚軸に関して対称な点で表されるから

$-\bar{z} = r\{\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)\}$

である。よって

$|-\bar{z}| = r$，$\arg(-\bar{z}) = \pi - \theta$

複素数の積と商

（教科書 p.52）

0 でない 2 つの複素数 z_1，z_2 を極形式でそれぞれ

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

と表すとき，複素数 z_1，z_2 の積や商について，次のことが成り立つ。

複素数の積と商

1　積　$z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

$\mathbf{|z_1z_2| = |z_1||z_2|}$，$\mathbf{\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2}$

2　商　$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$

$\mathbf{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}$，$\mathbf{\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2}$

上の性質 1，2 は，数学Ⅱで学んだ三角関数の加法定理

$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$

$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$

を用いて示すことができる。

証明　1 を証明してみよう。

$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$= r_1r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

ゆえに

$|z_1z_2| = r_1r_2 = |z_1||z_2|$

$\arg(z_1z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

問 10 [2]が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$
$$=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

したがって

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$$

問 11 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき，$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$ であることを示せ。

$$\frac{1}{z}=\frac{\cos 0+i\sin 0}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$
$$=\frac{1}{r}\{\cos(0-\theta)+i\sin(0-\theta)\}$$
$$=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

例 5 $z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$，$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

のとき，z_1z_2 と $\frac{z_1}{z_2}$ を求めてみよう。

$$z_1z_2=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{7}{12}\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7}{12}\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=4\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)=-2\sqrt{3}+2i$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{7}{12}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7}{12}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}i$$

問 12 $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$，$z_2=3\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ のとき，z_1z_2 と $\frac{z_1}{z_2}$ を求めよ。

$$z_1z_2=2\cdot3\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$$
$$=6(\cos\pi+i\sin\pi)=6\cdot(-1)=\mathbf{-6}$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{3}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$$
$$=\frac{2}{3}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\mathbf{\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}i}$$

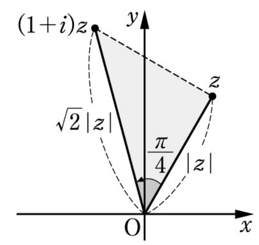
複素数の積の図表示

（教科書 p.53）

例 6 点 z と点 $(1+i)z$ の位置関係を考えてみよう。

$|1+i|=$ $\sqrt{2}$ ，$\arg(1+i)=$ $\frac{\pi}{4}$

であるから，点 $(1+i)z$ は，（ 点 z ）を（ 原点 O ）を中心に（ $\frac{\pi}{4}$ ）だけ回転し，原点からの距離 $|z|$ を（ $\sqrt{2}$ ）倍した点である。



問 13 点 z に対して，次の点はどのような位置関係にあるか。

(1) $(\sqrt{3}+3i)z$

$$|\sqrt{3}+3i|=2\sqrt{3}$$
$$\arg(\sqrt{3}+3i)=\frac{\pi}{3}$$

であるから，点 $(\sqrt{3}+3i)z$ は，**点 z を原点 O を中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し，原点からの距離 $|z|$ を $2\sqrt{3}$ 倍した点である。**

(2) $\sqrt{2}(-1+i)z$

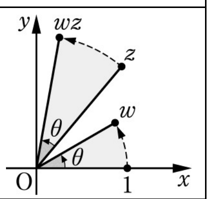
$$|\sqrt{2}(-1+i)|=2$$
$$\arg(-1+i)=\frac{3}{4}\pi$$

であるから，点 $\sqrt{2}(-1+i)z$ は，**点 z を原点 O を中心に $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転し，原点からの距離 $|z|$ を 2 倍した点である。**

複素数 z と絶対値が 1 である複素数 $w=\cos\theta+i\sin\theta$ との積について，次のことが成り立つ。

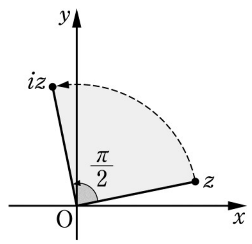
複素数の積と回転

$w=\cos\theta+i\sin\theta$ とするとき，wz の表す点は，点 z を原点 O を中心に角 θ だけ回転した点となる。



例 7 (1)　点 z を原点 O を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点を表す複素数は

（　$\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)z=iz$　）

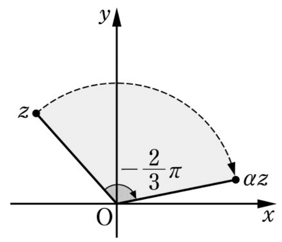


(2)　点 z を原点 O を中心に $-\frac{2}{3}\pi$ だけ回転した点を表す複素数は

$\alpha=$　$\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$

$=$　$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

としたときの（　αz　）である。



問 14 複素数 z に対して，点 z を原点 O を中心に $\frac{\pi}{3}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点は，それぞれどのような複素数で表されるか。

$\frac{\pi}{3}$ だけ回転

$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)z=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

$\frac{3}{4}\pi$ だけ回転

$\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)z=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z$

$\frac{5}{6}\pi$ だけ回転

$\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)z=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)z$

$-\frac{\pi}{2}$ だけ回転

$\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}z=-iz$

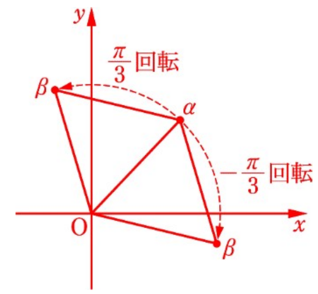
例題 1　$\alpha=1+i$ とする。2 点 0, α を頂点とする正三角形の第 3 の頂点を表す複素数 β を求めよ。

考え方　α の表す点を A, β の表す点を B とすると，△OAB が正三角形となるのは，OA = OB, ∠AOB $=\frac{\pi}{3}$ となるときである。

解　第 3 の頂点 β は，点 α を原点 O を中心に

$\frac{\pi}{3}$　または　$-\frac{\pi}{3}$

だけ回転した点である。



$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\alpha$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

$\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\alpha$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$

したがって

$\beta=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$　または　$\beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$

問 15 $\alpha=2+3i$ とする。原点 O を直角の頂点とする直角二等辺三角形の頂点の 1 つが点 α であるとき，第 3 の頂点を表す複素数 β を求めよ。

第 3 の頂点 β は，点 α を原点 O を中心に

$\frac{\pi}{2}$　または　$-\frac{\pi}{2}$

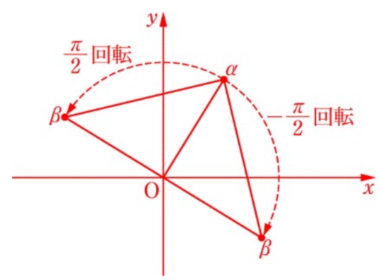
だけ回転した点である。

$\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\alpha=i(2+3i)=-3+2i$

$\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\alpha=-i(2+3i)=3-2i$

したがって

$\boldsymbol{\beta=-3+2i}$　または　$\boldsymbol{\beta=3-2i}$



3 ド･モアブルの定理

ド･モアブルの定理

（教科書 p.56）

絶対値が 1 の複素数 z の累乗について考えてみよう。

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

とするとき

$$z^2=zz=\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$$
$$z^3=zz^2=\cos(\theta+2\theta)+i\sin(\theta+2\theta)=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

したがって，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対して

$$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つことがわかる。

また

$$\frac{1}{z}=\frac{\cos 0+i\sin 0}{\cos\theta+i\sin\theta}$$
$$=\cos(0-\theta)+i\sin(0-\theta)$$
$$=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$$

ここで，正の整数 n に対して $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$ と定めると，①より

$$z^{-n}=\frac{1}{z^n}=\left(\frac{1}{z}\right)^n$$
$$=\cos\bigl(n\cdot(-\theta)\bigr)+i\sin\bigl(n\cdot(-\theta)\bigr)$$
$$=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$$

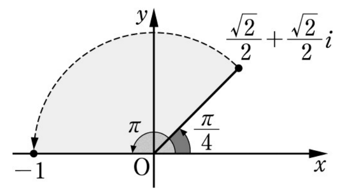
である。

したがって，$z^0=1$ と定めると，次の（㉔ ド・モアブルの定理 ）が成り立つ。

ド・モアブルの定理
整数 n に対して $(\boldsymbol{\cos\theta+i\sin\theta})^{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{\cos n\theta+i\sin n\theta}$

例 8 ド・モアブルの定理を用いて，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4$ の値を求めてみよう。

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$$



よって

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^4$$
$$=\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

問 16 次の値を計算せよ。

(1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{12}$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{12}=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{12}$$
$$=\cos\left(12\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(12\cdot\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=\mathbf{1}$$

(2) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^6$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^6=\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)^6$$
$$=\cos\left(6\cdot\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(6\cdot\frac{3}{4}\pi\right)$$
$$=\cos\frac{9}{2}\pi+i\sin\frac{9}{2}\pi=\boldsymbol{i}$$

(3) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-9}$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-9}=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{-9}$$
$$=\cos\left\{(-9)\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}+i\sin\left\{(-9)\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$
$$=\cos 3\pi+i\sin 3\pi=\mathbf{-1}$$

例題 2　$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)^5$ を計算せよ。

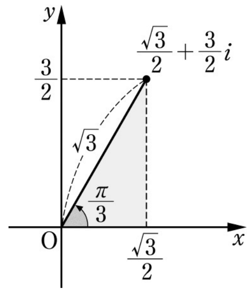
解　$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ より

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)^5$$

$$=\left(\sqrt{3}\right)^5\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^5$$

$$=9\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$$

$$=9\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{9\sqrt{3}}{2}-\frac{27}{2}i$$



問 17 次の値を計算せよ。

(1)　$\left(\sqrt{3}+i\right)^9$

$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ より

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^9=2^9\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^9$$

$$=512\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$=512\times(-i)=\boldsymbol{-512i}$$

(2)　$(1+i)^{-4}$

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ より

$$(1+i)^{-4}=\left(\sqrt{2}\right)^{-4}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-4}$$

$$=\frac{1}{4}\{\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\}$$

$$=\frac{1}{4}\times(-1)=\boldsymbol{-\frac{1}{4}}$$

(3)　$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{11}$

$-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ より

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{11}=2^{11}\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^{11}$$

$$=2048\left(\cos\frac{22}{3}\pi+i\sin\frac{22}{3}\pi\right)$$

$$=2048\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boldsymbol{-1024-1024\sqrt{3}i}$$

1の n 乗根

（教科書 p.58）

自然数 n に対して，方程式 $z^n=\alpha$ を満たす複素数 z を（㉕　**α の n 乗根**　）という。

問 18 次の問に答えよ。

（1）　1 の 4 乗根を求め，複素数平面上に図示せよ。

$z^4=1$ ……①

となるような z の絶対値は 1 であるから

$z=\cos\theta+i\sin\theta$ ……②

とおける。

ド・モアブルの定理を用いて①を変形すると

$\cos 4\theta+i\sin 4\theta=\cos 0+i\sin 0$

偏角を比較して　$4\theta=2k\pi$　（kは整数）

ゆえに　$\theta=\frac{1}{2}k\pi$ ……③

③を②に代入すると

$z=\cos\frac{1}{2}k\pi+i\sin\frac{1}{2}k\pi$ ……④

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で③の k の値を求めると

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$

したがって，④の式において，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ としたときの z をそれぞれ $z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3$ とすると

1 の 4 乗根は

$k=0$ のとき　$z_0=\cos 0+i\sin 0=1$

$k=1$ のとき　$z_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$

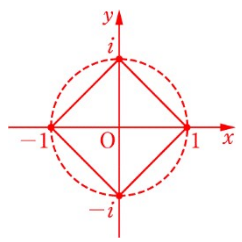
$k=2$ のとき　$z_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$k=3$ のとき　$z_3=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi=-i$

となる。すなわち，1 の 4 乗根は

$\boldsymbol{1,\ i,\ -1,\ -i}$

複素数平面上に図示すると，次のようになる。



（2）　1 の 6 乗根を求め，複素数平面上に図示せよ。

$z^6=1$ ……①

となるような z の絶対値は 1 であるから

$z=\cos\theta+i\sin\theta$ ……②

とおける。

ド・モアブルの定理を用いて①を変形すると

$\cos 6\theta+i\sin 6\theta=\cos 0+i\sin 0$

偏角を比較して　$6\theta=2k\pi$　（k は整数）

ゆえに　$\theta=\frac{1}{3}k\pi$ ……③

③を②に代入すると

$z=\cos\frac{1}{3}k\pi+i\sin\frac{1}{3}k\pi$ ……④

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で③の k の値を求めると

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

したがって，④の式において，

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ としたときの z をそれぞれ $z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5$ とすると

1 の 6 乗根は

$k=0$ のとき　$z_0=\cos 0+i\sin 0=1$

$k=1$ のとき　$z_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$k=2$ のとき　$z_2=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$k=3$ のとき　$z_3=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

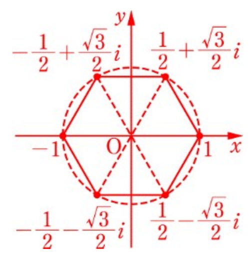
$k=4$ のとき　$z_4=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$k=5$ のとき　$z_5=\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

となる。すなわち，1 の 6 乗根は

$\boldsymbol{1,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

複素数平面上に図示すると，次のようになる。



一般に，次のことが成り立つ。

1 の n 乗根

1 の n 乗根は，次の n 個の複素数である。

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

例題 3 方程式 $z^4 = 8(-1+\sqrt{3}i)$ を解け。

解 右辺の極形式を求めると

$$8(-1+\sqrt{3}i) = 16\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

ここで　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　……①

とおくと，方程式

$z^4 = 8(-1+\sqrt{3}i)$

は，極形式を用いて次のように表される。

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 16\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

両辺の絶対値と偏角を比較して

$r^4 = 16$，$r > 0$ より　$r = 2$

$4\theta = \frac{2}{3}\pi + 2\pi\times k$ より　$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$　（k は整数）

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると

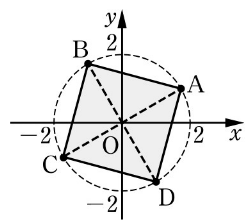
$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

したがって　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

r，θ を①に代入して計算すると

$z = \sqrt{3}+i,\ -1+\sqrt{3}i,\ -\sqrt{3}-i,\ 1-\sqrt{3}i$

注意 この 4 つの解は $8(-1+\sqrt{3}i)$ の 4 乗根である。
これらを表す複素数平面上の点 A，B，C，D は原点を中心とする半径 2 の円上にあり，正方形の 4 つの頂点となっている。



問 19 次の方程式を解け。

（1）　$z^2 = -1-\sqrt{3}i$

右辺の極形式を求めると

$$-1-\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

ここで

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　……①

とおくと，方程式

$z^2 = -1-\sqrt{3}i$

は，極形式を用いて次のように表される。

$$r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = 2\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

両辺の絶対値と偏角を比較して

$r^2 = 2$，$r > 0$ より　$r = \sqrt{2}$

$2\theta = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$ より

$\theta = \frac{2}{3}\pi + k\pi$　（k は整数）

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると

$k = 0,\ 1$

したがって

$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$

r，θ を①に代入して計算すると

$z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i,\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

(2)　$z^8=16$

右辺の極形式を求めると

$16=16(\cos 0+i\sin 0)$

ここで

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　　……①

とおくと，方程式

$z^8=16$

は，極形式を用いて次のように表される。

$r^8(\cos 8\theta+i\sin 8\theta)=16(\cos 0+i\sin 0)$

両辺の絶対値と偏角を比較して

$r^8=16,\ r>0$ より　　$r=\sqrt{2}$

$8\theta=2k\pi$ より　　$\theta=\frac{1}{4}k\pi$　(k は整数)

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$

したがって

$\theta=0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

$r,\ \theta$ を①に代入して計算すると

$\boldsymbol{z=\sqrt{2},\ 1+i,\ \sqrt{2}i,\ -1+i,\ -\sqrt{2},\ -1-i,\ -\sqrt{2}i,\ 1-i}$

問 題

（教科書 p.61）

1　$z=2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ のとき，次の複素数の極形式を求め，それらを図示せよ。

(1)　$2z$

$2z=\boldsymbol{4\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)}$

(2)　$\bar{z}$

$\bar{z}=2\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)=\boldsymbol{2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right\}}$

(3)　iz

$iz=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)=2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)\right\}$

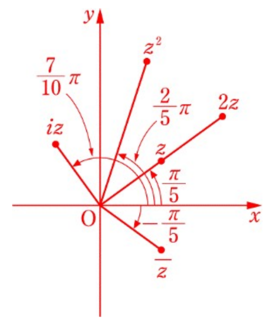
$=\boldsymbol{2\left(\cos\frac{7}{10}\pi+i\sin\frac{7}{10}\pi\right)}$

(4)　z^2

$z^2=2^2\left\{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{5}\right)\right\}$

$=\boldsymbol{4\left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)}$

(1)～(4) を図示すると，次のようになる。



2 次の計算をせよ。

(1) $2\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$$2\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= 2\left\{\cos\left(\frac{5}{12}\pi + \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5}{12}\pi + \frac{\pi}{12}\right)\right\}$$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{2i}$$

(2) $\dfrac{\sqrt{3}\left(\cos\frac{11}{18}\pi + i\,\mathrm{si}\ \frac{11}{18}\pi\right)}{2\left(\cos\frac{5}{18}\pi + i\,\mathrm{si}\ \frac{5}{18}\pi\right)}$

$$\frac{\sqrt{3}\left(\cos\frac{11}{18}\pi + i\sin\frac{11}{18}\pi\right)}{2\left(\cos\frac{5}{18}\pi + i\sin\frac{5}{18}\pi\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\cos\left(\frac{11}{18}\pi - \frac{5}{18}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{18}\pi - \frac{5}{18}\pi\right)\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i}$$

3 点 $\sqrt{3} + i$ を原点 O を中心に，次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

(1) $\frac{\pi}{3}$

$$2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\right\} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \boldsymbol{2i}$$

(2) $-\frac{\pi}{2}$

$$2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{1 - \sqrt{3}i}$$

(3) $-\frac{5}{6}\pi$

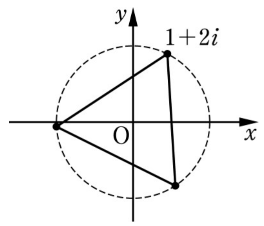
$$2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5}{6}\pi\right)\right\}$$

$$= 2\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\} = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{-1 - \sqrt{3}i}$$

(4) $\frac{4}{3}\pi$

$$2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi\right)\right\} = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = \boldsymbol{-2i}$$

4 原点 O を中心とする円に内接する正三角形の 1 つの頂点を表す複素数が $1+2i$ であるとき，他の 2 頂点を表す複素数を求めよ。



$\alpha=1+2i$ とする。
他の 2 頂点は，点 α を原点 O を中心に $\frac{2}{3}\pi$ または $-\frac{2}{3}\pi$ だけ回転した点である。
点 α を原点 O を中心に $\frac{2}{3}\pi$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\alpha=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+2i)$$

$$=\frac{-1-2\sqrt{3}}{2}+\frac{-2+\sqrt{3}}{2}i$$

点 α を原点 O を中心に $-\frac{2}{3}\pi$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}\alpha$$

$$=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+2i)=\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}+\frac{-2-\sqrt{3}}{2}i$$

したがって

$$\boldsymbol{\frac{-1-2\sqrt{3}}{2}+\frac{-2+\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{-1+2\sqrt{3}}{2}+\frac{-2-\sqrt{3}}{2}i}$$

5 次の値を計算せよ。

(1) $(\sqrt{3}-i)^4$

$$\sqrt{3}-i=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

より

$$(\sqrt{3}-i)^4=2^4\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}=16\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\boldsymbol{-8-8\sqrt{3}i}$$

(2) $\left(\frac{\sqrt{3}-3i}{2}\right)^6$

$$\frac{\sqrt{3}-3i}{2}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{3}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

より

$$\left(\frac{\sqrt{3}-3i}{2}\right)^6=(\sqrt{3})^6\{\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi)\}=\boldsymbol{27}$$

(3) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^6$

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

より

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^6=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6\left(\cos\frac{5}{2}\pi+i\sin\frac{5}{2}\pi\right)=\boldsymbol{\frac{1}{8}i}$$

6 次の方程式を解き，解が表す点を複素数平面上に図示せよ。

(1) $z^3 = i$

右辺の極形式を求めると

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

ここで　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　……①

とおくと，方程式 $z^3 = i$ は，極形式を用いて次のように表される。

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

両辺の絶対値と偏角を比較して

$r^3 = 1$，$r > 0$ より　$r = 1$

$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ より

$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$　(k は整数)

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると

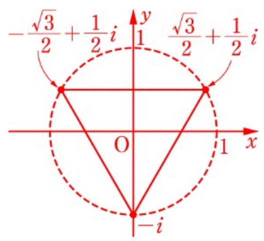
$k = 0,\ 1,\ 2$

したがって　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

r，θ を①に代入して計算すると

$$\boldsymbol{z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ -i}$$

解が表す点を複素数平面上に図示すると，次のようになる。



(2) $z^6 + 8 = 0$

$z^6 = -8$

右辺の極形式を求めると

$-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$

ここで　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　……①

とおくと，方程式 $z^6 = -8$ は，極形式を用いて次のように表される。

$r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$

両辺の絶対値と偏角を比較して

$r^6 = 8$，$r > 0$ より　$r = \sqrt{2}$

$6\theta = \pi + 2k\pi$ より

$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}k\pi$　(k は整数)

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると

$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

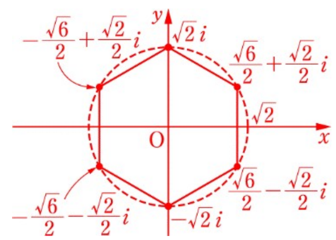
したがって

$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

r，θ を①に代入して計算すると

$$\boldsymbol{z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ \sqrt{2}i,\ -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\sqrt{2}i,\ \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

解が表す点を複素数平面上に図示すると，次のようになる。



(3)　$z^2 = 1 - \sqrt{3}i$

右辺の極形式を求めると

$$1 - \sqrt{3}i = 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

ここで　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　　……①

とおくと，方程式 $z^2 = 1 - \sqrt{3}i$ は，極形式を用いて次のように表される。

$$r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = 2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

両辺の絶対値と偏角を比較して

$r^2 = 2$，$r > 0$ より　　$r = \sqrt{2}$

$2\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ より

　$\theta = -\frac{\pi}{6} + k\pi$　（k は整数）

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考えると　$k = 1，2$

したがって　　$\theta = \frac{5}{6}\pi，\frac{11}{6}\pi$

r，θ を①に代入して計算すると

$$\boldsymbol{z = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i，\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

解が表す点を複素数平面上に図示すると，次のようになる。