練習問題Ａ

（教科書 p.42）

1　次の 2 次曲線の方程式を求め，その概形をかけ。

(1)　頂点 $(-1,\ 2)$，準線 $x=2$ の放物線

(2)　焦点が $(2,\ 4)$，$(2,\ -2)$，短軸の長さ 8 の楕円

(3)　焦点が $(1,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ で点 $(3,\ 4)$ を通る双曲線

2 次の 2 次曲線の焦点を求めよ。

⑴ 楕円 $9x^2-54x+25y^2+100y-44=0$

⑵ 放物線 $y^2-2y+8x+9=0$

3 楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ と直線 $y=\frac{1}{2}x+k$ が 2 つの共有点 P，Q をもつとき，線分 PQ の中点 R は，直線 $y=-\frac{1}{2}x$ 上の $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ の部分にあることを証明せよ。

4 円 $x^2+y^2=1$ 上に，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ と異なる 2 点 $\mathrm{P}(s,\ t)$，$\mathrm{Q}(s,\ -t)$ をとるとき，2 直線 AP，BQ の交点の描く軌跡を求めよ。

5 次の媒介変数表示について，x と y の関係式を求め，どのような曲線を表すか答えよ。

(1) $\begin{cases} x=t-\frac{1}{t} \\ y=t^2+\frac{1}{t^2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=\frac{1}{1+t^2} \\ y=\frac{t}{1+t^2} \end{cases}$

6 極を点O，2点 P_1，P_2 の極座標をそれぞれ $(r_1,\ \theta_1)$，$(r_2,\ \theta_2)$ とするとき，次のことを示せ。

(1) $\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2 = \frac{1}{2}|r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)|$

(2) 2点 P_1，P_2 の直交座標をそれぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とするとき
$\triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2 = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$

練習問題B

（教科書 p.43）

7 原点をOとし，点Pから直線 $x=-6$ に下ろした垂線をPHとする。OP：PH が次のときの点Pの軌跡を求めよ。

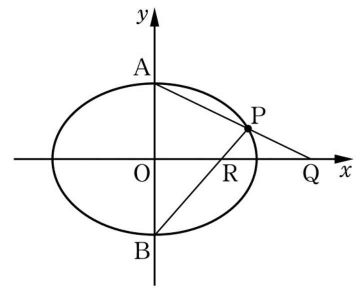
(1) 1：2

(2) 1：1

(3) 2：1

8 双曲線 $x^2-4y^2=4$ 上の点で点 $(5,\ 0)$ に最も近い点の座標と，そのときの距離を求めよ。

9 楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ の短軸の両端を $\mathrm{A}(0,\ b)$，$\mathrm{B}(0,\ -b)$ とする。右の図のように，楕円上に A，B と異なる点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ をとり，2 直線 AP，BP が長軸またはその延長と交わる点をそれぞれ Q，R とするとき，$\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}$ は一定であることを証明せよ。



１０　楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ の 2 つの焦点のうち，x 座標が正であるものを F とする。この楕円上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ と F との距離 FP を，p の 1 次式で表せ。

１１　極方程式で表されたカージオイド $C : r=a(1+\cos\theta)$ について，次の問に答えよ。ただし，$a>0,\ 0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　点 $\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{a}{2}$ の円を S とする。C 上の点 P に対して直線 OP が O 以外の点で S と交わるとき，その交点を Q とする。PQ が一定であることを示せ。

⑵　P が C 上を動くとき，A$\left(\frac{3}{4}a,\ 0\right)$からの距離が最大となる点 P の極座標およびそのときの距離 AP を求めよ。

練習問題Ａ

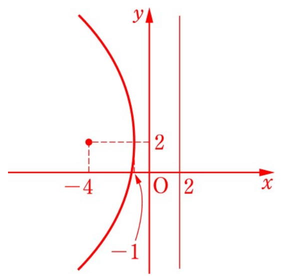
（教科書 p.42）

1 次の 2 次曲線の方程式を求め，その概形をかけ。

(1) 頂点 $(-1,\ 2)$，準線 $x = 2$ の放物線

求める放物線を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，頂点が原点，準線が $x = 3$ の放物線 $y^2 = 4\cdot(-3)x = -12x$ となる。

よって，求める方程式はこれを x 軸方向に-1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線の方程式 $\boldsymbol{(y-2)^2 = -12(x+1)}$ であり，その概形は次の図のようになる。

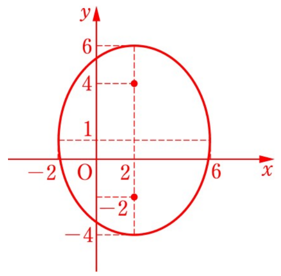


(2) 焦点が $(2,\ 4)$，$(2,\ -2)$，短軸の長さ 8 の楕円

2 つの焦点を結ぶ線分の中点が中心となるから，$(2,\ 4)$，$(2, -2)$ の中点 $(2,\ 1)$ がこの楕円の中心である。求める楕円を x 軸方向に -2，y 軸方向に -1 だけ平行移動すると，焦点が $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$ となる。

この楕円の方程式を $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ とおくと，$\sqrt{b^2-a^2}=3$，$2a=8$ よって，$a=4$，$b=5$であるから，その方程式は　$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

よって，求める方程式はこの楕円を x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した楕円の方程式 $\boldsymbol{\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=1}$ であり，その概形は次の図のようになる。



(3) 焦点が $(1,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ で点 $(3,\ 4)$ を通る双曲線

2 つの焦点を結ぶ線分の中点が中心となるから，$(1,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ の中点 $(-2,\ 0)$ がこの双曲線の中心である。求める双曲線を x 軸方向に 2 だけ平行移動すると，焦点が$(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ となる。

この双曲線の方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ とおくと$\sqrt{a^2+b^2}=3$　すなわち　$a^2+b^2=9$　……①

また，点 $(5,\ 4)$ を通るから　$\frac{25}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1$

分母をはらって

$a^2b^2 = 25b^2 - 16a^2$　……②

①，②より，b^2 を消去し整理すると

$a^4 - 50a^2 + 225 = 0$

$(a^2-5)(a^2-45) = 0$

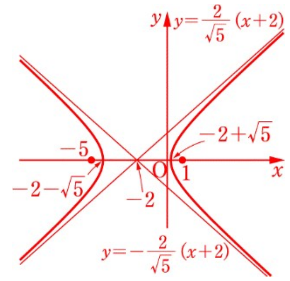
①より，$a^2 < 9$ であるから　$a^2 = 5$

このとき，①より　$b^2 = 4$

双曲線の方程式は　$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$

よって，求める方程式はこの双曲線を x 軸方向に -2 だけ平行移動した双曲線の方程式

$\boldsymbol{\frac{(x+2)^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1}$ であり，その概形は次の図のようになる。



2　次の 2 次曲線の焦点を求めよ。

(1)　楕円　$9x^2-54x+25y^2+100y-44=0$

$9x^2-54x+25y^2+100y-44=0$

$9(x-3)^2+25(y+2)^2=225$

$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$

これは楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動したものである。

楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ の焦点は $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ であるから，求める焦点はこれらを x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ移動した $(\mathbf{7},\ \mathbf{-2})$，$(\mathbf{-1},\ \mathbf{-2})$ である。

(2)　放物線　$y^2-2y+8x+9=0$

$y^2-2y+8x+9=0$

$(y-1)^2=-8(x+1)$

これは，放物線 $y^2=-8x$ を x 軸方向に-1，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

放物線 $y^2=-8x$ の焦点は，$(-2,\ 0)$ であるから，求める焦点はこれを x 軸方向に -1，y 軸方向に 1 だけ移動した $(\mathbf{-3},\ \mathbf{1})$ である。

3　楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ と直線 $y=\frac{1}{2}x+k$ が 2 つの共有点 P，Q をもつとき，線分 PQ の中点 R は，直線 $y=-\frac{1}{2}x$ 上の $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ の部分にあることを証明せよ。

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+y^2=1 & \cdots\cdots① \\ y=\frac{1}{2}x+k & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②から，y を消去して

$x^2+2kx+2k^2-2=0$　……③

2 次方程式③の実数解が共有点 P，Q の x 座標である。

③の判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=k^2-(2k^2-2)$

$=-k^2+2$

よって，2 次方程式③が異なる 2 個の実数解をもつ条件は　$D>0$

すなわち　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$　……④

ここで，P，Q の x 座標をそれぞれ p，q とすると，解と係数の関係により

$p+q=-2k$

したがって，線分 PQ の中点 R の座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=\frac{p+q}{2}=\frac{-2k}{2}=-k$　……⑤

$y=\frac{x}{2}+k=\frac{-k}{2}+k=\frac{k}{2}$　……⑥

⑤，⑥より k を消去して　$y=-\frac{1}{2}x$

また，④，⑤より

$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

ゆえに，中点 R は直線 $y=-\frac{1}{2}x$ 上の$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ の部分にある。

4　円 $x^2+y^2=1$ 上に，A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$ と異なる 2 点 P$(s,\ t)$，Q$(s,\ -t)$ をとるとき，2 直線 AP，BQ の交点の描く軌跡を求めよ。

2 直線 AP，BQ の方程式はそれぞれ

$y=\frac{t}{s-1}(x-1)$，$y=\frac{-t}{s+1}(x+1)$

となる。これらを連立して解くと

$x=\frac{1}{s}$，$y=-\frac{t}{s}$　　……①

ここで，s，t は，$s\neq 0$，$t\neq 0$ であって

$-1<s<1$，$-1<t<1$

の範囲を動く。また，点 P は円 $x^2+y^2=1$ 上にあるから　　$s^2+t^2=1$　　……②

①より $s=\frac{1}{x}$，$t=-\frac{y}{x}$ であるから

これを②に代入すると

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(-\frac{y}{x}\right)^2=1$$

$$x^2-y^2=1$$

したがって，求める交点の軌跡は，

双曲線 $x^2-y^2=1$

ただし，2 点 $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ を除く。

5　次の媒介変数表示について，x と y の関係式を求め，どのような曲線を表すか答えよ。

(1)　$\begin{cases} x=t-\frac{1}{t} \\ y=t^2+\frac{1}{t^2} \end{cases}$

$\begin{cases} x=t-\frac{1}{t} \\ y=t^2+\frac{1}{t^2} \end{cases}$　　……①

$$x^2=\left(t-\frac{1}{t}\right)^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2=y-2$$

である。

よって，①は放物線 $\boldsymbol{y=x^2+2}$ を表す。

(2)　$\begin{cases} x=\frac{1}{1+t^2} \\ y=\frac{t}{1+t^2} \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{1}{1+t^2} \\ y=\frac{t}{1+t^2} \end{cases}$　　……①

$x>0$ より　$1+t^2=\frac{1}{x}$　すなわち　$t^2=\frac{1}{x}-1$

ここで

$$y^2=\frac{t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{\frac{1}{x}-1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}=x-x^2$$

整理すると　$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$

よって，①は円 $\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}}$ を表す。

ただし，原点を除く。

〔別解 1〕$y=\frac{t}{1+t^2}=t\cdot\frac{1}{1+t^2}=tx$

$x=\frac{1}{1+t^2}\neq 0$ より，$x\neq 0$ であるから

$t=\frac{y}{x}$ となり，①に代入すると

$$x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

これを整理すると，円 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ となる。ただし，$x\neq 0$ より原点を除く。

〔別解 2〕$x^2+y^2=\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2$

$$=\frac{1+t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{1}{1+t^2}=x$$

よって　$x^2+y^2=x$

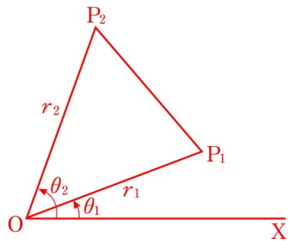
これを整理すると，円 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ となる。ただし，$x=\frac{1}{1+t^2}\neq 0$ より原点を除く。

6　極を点 O，2 点 P_1，P_2 の極座標をそれぞれ $(r_1,\ \theta_1)$，$(r_2,\ \theta_2)$ とするとき，次のことを示せ。

(1)　$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}|r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)|$

三角形の面積の公式により

$$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}|OP_1 \cdot OP_2 \sin\angle P_1OP_2|$$
$$= \frac{1}{2}|r_1r_2\sin|\theta_2-\theta_1||$$
$$= \frac{1}{2}|r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)|$$



(2)　2 点 P_1，P_2 の直交座標をそれぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とするとき

$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

$r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)$

$= r_1r_2(\sin\theta_2\cos\theta_1 - \cos\theta_2\sin\theta_1)$

$= r_1\cos\theta_1 \cdot r_2\sin\theta_2 - r_2\cos\theta_2 \cdot r_1\sin\theta_1$

$= x_1y_2 - x_2y_1$

よって　　$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$

練習問題B

(教科書 p.43)

7　原点を O とし，点 P から直線 $x=-6$ に下ろした垂線を PH とする。OP : PH が次のときの点 P の軌跡を求めよ。

点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$OP = \sqrt{x^2+y^2}$，$PH = |x+6|$

(1)　1 : 2

OP : PH = 1 : 2 より

$2OP = PH$

$2\sqrt{x^2+y^2} = |x+6|$

両辺を 2 乗して整理すると

$3(x-2)^2 + 4y^2 = 48$

$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

よって，求める点 P の軌跡は，

楕円　$\boldsymbol{\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1}$ である。

(2)　1 : 1

OP : PH = 1 : 1 より

$OP = PH$

$\sqrt{x^2+y^2} = |x+6|$

両辺を 2 乗して整理すると

$y^2 = 12x + 36$

$y^2 = 12(x+3)$

よって，求める点 P の軌跡は，

放物線　$\boldsymbol{y^2 = 12(x+3)}$ である。

(3)　2 : 1

OP : PH = 2 : 1 より

$OP = 2PH$

$\sqrt{x^2+y^2} = 2|x+6|$

両辺を 2 乗して整理すると

$3(x+8)^2 - y^2 = 48$

$\frac{(x+8)^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$

よって，求める点 P の軌跡は，

双曲線　$\boldsymbol{\frac{(x+8)^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1}$ である。

8　双曲線 $x^2-4y^2=4$ 上の点で点 $(5,\ 0)$ に最も近い点の座標と，そのときの距離を求めよ。

双曲線 $x^2-4y^2=4$　……①

上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，点 $(5,\ 0)$ を A とすると

$\mathrm{AP}^2=(x-5)^2+y^2$　……②

ここで，点 P は①上にあるから

$x^2-4y^2=4$ より　$y^2=\frac{x^2-4}{4}$　……③

$y^2 \geqq 0$ であるから

$x^2-4 \geqq 0$

よって　$x \leqq -2,\ 2 \leqq x$　……④

このとき，②，③より

$$\mathrm{AP}^2=(x-5)^2+\frac{x^2-4}{4}$$

$$=\frac{5}{4}x^2-10x+24$$

$$=\frac{5}{4}(x-4)^2+4$$

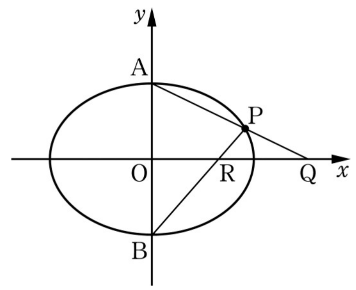
x の変域は④であるから，AP^2 は $x=4$ のとき最小値 4 をとるので，AP は最小値 $\sqrt{4}=2$ をとる。

このとき，③より　$y^2=\frac{16-4}{4}=3$

よって　$y=\pm\sqrt{3}$

したがって，求める点の座標は $\boldsymbol{(4,\ \sqrt{3})}$，$\boldsymbol{(4,\ -\sqrt{3})}$ であり，そのときの距離は **2** である。

9　楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ の短軸の両端を $\mathrm{A}(0,\ b)$，$\mathrm{B}(0,\ -b)$ とする。右の図のように，楕円上に A，B と異なる点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ をとり，2 直線 AP，BP が長軸またはその延長と交わる点をそれぞれ Q，R とするとき，$\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}$ は一定であることを証明せよ。



Q，R の座標をそれぞれ $(q,\ 0)$，$(r,\ 0)$ とする。このとき，直線 AP の傾きに着目すると

$\frac{y_1-b}{x_1-0}=\frac{0-b}{q-0}$　すなわち　$q=-\frac{bx_1}{y_1-b}$　……①

同様にして，直線 BP の傾きに着目すると

$r=\frac{bx_1}{y_1+b}$　……②

①，②より

$$\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}=|q|\cdot|r|$$

$$=\frac{b^2{x_1}^2}{|{y_1}^2-b^2|}$$

ここで，$|y_1|<b$ より　${y_1}^2-b^2<0$

したがって　$\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}=\frac{b^2{x_1}^2}{b^2-{y_1}^2}$　……③

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ は楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の点であるから

$\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$ すなわち $b^2-{y_1}^2=\frac{b^2{x_1}^2}{a^2}$　……④

③，④より

$$\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}=\frac{b^2{x_1}^2}{\frac{b^2{x_1}^2}{a^2}}=a^2$$

よって，$\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OR}$ は一定である。

１０　楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ の 2 つの焦点のうち，x 座標が正であるものを F とする。この楕円上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ と F との距離 FP を，p の 1 次式で表せ。

$\sqrt{25-16}=3$ より，$\mathrm{F}(3,\ 0)$ であるから

$\mathrm{FP}^2=(p-3)^2+q^2$　……①

ここで，$\mathrm{P}(p,\ q)$ は楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上の点であるから

$$\frac{p^2}{25}+\frac{q^2}{16}=1$$

よって　$q^2=16-\frac{16}{25}p^2$　……②

①，②より

$$\mathrm{FP}^2=(p-3)^2+\left(16-\frac{16}{25}p^2\right)$$

$$=\frac{9}{25}p^2-6p+25$$

$$=\left(\frac{3}{5}p-5\right)^2$$

したがって

$\mathrm{FP}=\left|\frac{3}{5}p-5\right|$　……③

また，$q^2\geqq 0$ であるから，②より

$$16-\frac{16}{25}p^2\geqq 0$$

$$-5\leqq p\leqq 5$$

よって　$-8\leqq\frac{3}{5}p-5\leqq -2$

したがって　$\frac{3}{5}p-5<0$

ゆえに，③より　$\mathrm{FP}=\boldsymbol{5-\frac{3}{5}p}$

１１　極方程式で表されたカージオイド $C: r=a(1+\cos\theta)$ について，次の問に答えよ。ただし，$a>0,\ 0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　点 $\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{a}{2}$ の円を S とする。C 上の点 P に対して直線 OP が O 以外の点で S と交わるとき，その交点を Q とする。PQ が一定であることを示せ。

$\mathrm{P}(r,\ \theta)$ とする。

Q が OP を内分するとき，Q の偏角は θ に等しい。また S の直径は a であるから

$\mathrm{OQ}=a\cos\theta$

このとき

$\mathrm{PQ}=r-\mathrm{OQ}=a(1+\cos\theta)-a\cos\theta$

$=a$

また，Q が OP を外分するとき，Q の偏角は $\theta+\pi$ に等しいから

$\mathrm{OQ}=a\cos(\theta+\pi)=-a\cos\theta$

このとき

$\mathrm{PQ}=r+\mathrm{OQ}=a(1+\cos\theta)+(-a\cos\theta)$

$=a$

よって，PQ は一定である。

⑵ P が C 上を動くとき，A$\left(\frac{3}{4}a,\ 0\right)$からの距離が最大となる点 P の極座標およびそのときの距離 AP を求めよ。

AP $= d$ とする。△OAP において，余弦定理により

$$d^2 = r^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 - 2r\cdot\frac{3}{4}a\cos\theta$$

ここで $a\cos\theta = r - a$ であるから

$$d^2 = r^2 + \frac{9}{16}a^2 - \frac{3}{2}r(r-a)$$

$$= -\frac{1}{2}r^2 + \frac{3}{2}ar + \frac{9}{16}a^2$$

$$= -\frac{1}{2}\left(r - \frac{3}{2}a\right)^2 + \frac{27}{16}a^2$$

よって $r = \frac{3}{2}a$ のとき，d は最大となる。
したがって

$$a\cos\theta = r - a = \frac{1}{2}a$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ で考えると　　$\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$
よって，求める点 **P** の極座標は

$$\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{a},\ \frac{\pi}{3}\right),\ \left(\frac{3}{2}\boldsymbol{a},\ \frac{5}{3}\boldsymbol{\pi}\right)$$

であって，そのときの距離 AP は

$$\mathbf{AP} = \sqrt{\frac{27}{16}a^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{a}$$