2 節 媒介変数表示と極座標

1 曲線の媒介変数表示

（教科書 p.28）

一般に，平面上の曲線がある変数 t によって

（①　　　　　　　　　）

のような形で表されるとき，これをその曲線の（②　　　　　　　　　）といい，t を

（③　　　　　　　　　）という。

問 1 次の式の媒介変数 t を消去して，x, y の関係式を求めよ。

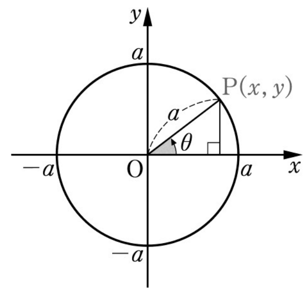
（1）$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -t + 5 \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = -2t \end{cases}$

例 1 原点 O を中心とする半径 a の円上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，半径 OP が x 軸の正の向きとなす角を θ とすれば

（　　　　　　　　　）…… ①

となる。ここで θ が実数全体を動くとき，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ はこの円上を動くから，①は円 $x^2 + y^2 = a^2$ の（　　　　　）を媒介変数とする（　　　　　　　　　）である。



問 2 円 $x^2 + y^2 = 25$ の媒介変数表示を求めよ。

例 2 媒介変数表示 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ …… ①

はどのような曲線を表すかを考えてみよう。

①より（　　　　　　　　　　　　）

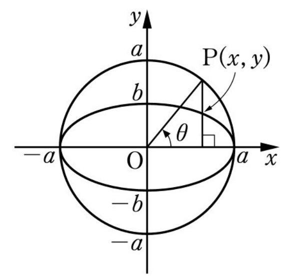
ここで，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ であるから

（　　　　　　　　　）

よって，θ が実数全体を動くとき，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

（　　　　　　　　　　　）…… ②

上を動く。したがって，①は（　　　　　　）を表す。



問 3 楕円 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ の媒介変数表示を求めよ。

問 4 媒介変数表示 $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\theta} \\ y = b\tan\theta \end{cases}$ は双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を表すことを示せ。

例題 1 放物線 $y = x^2 + 2tx - 2t$ の頂点 P は，t の値が変化するとき，どのような曲線上を動くか。

解

問 5 放物線 $y = -x^2 + 2tx + 1$ の頂点 P は，t の値が変化するとき，どのような曲線上を動くか。

例題 2 媒介変数表示 $\begin{cases} x = 2\cos\theta + 1 \\ y = 2\sin\theta + 3 \end{cases}$ はどのような曲線を表すか。

解

問 6 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(1) $\begin{cases} x = 3\cos\theta + 2 \\ y = 3\sin\theta - 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = 3\cos\theta - 2 \\ y = 5\sin\theta + 2 \end{cases}$

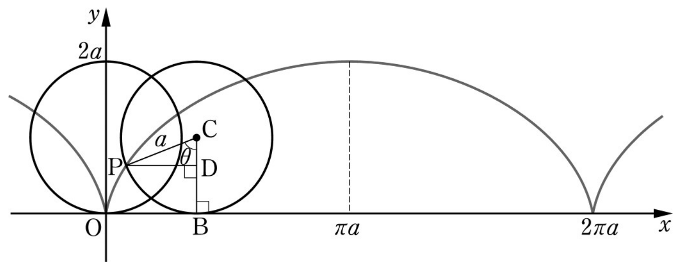
曲線の平行移動
曲線$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線は$\begin{cases} x=f(t)+p \\ y=g(t)+q \end{cases}$である。

問 7 中心 $(4,\ 3)$，半径 2 の円の媒介変数表示を求めよ。

サイクロイド

（教科書 p.31）

１つの円が定直線に接しながら，すべることなく回転するとき，その円上の定点がえがく曲線を（④　　　　　　　　　　）という。



サイクロイドの媒介変数表示は次のようになる。

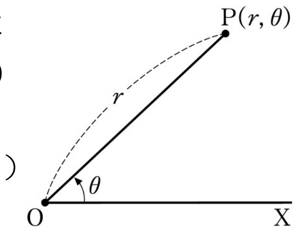
（⑤　　　　　　　　　　　　）

2 極座標と極方程式

極座標

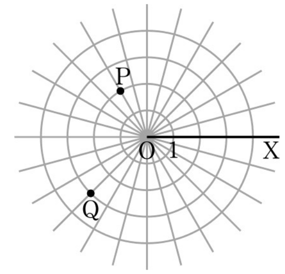
（教科書 p.32）

平面上に点 O と半直線 OX を定めると，平面上の点 P を，O からの距離 r と OX を始線とする動径 OP の表す角 θ で定めることができる。このとき，$(r,\ \theta)$ を点 P の（⑥　　　　　　　）といい，点 O を（⑦　　　　　），θ を（⑧　　　　　　），r を動径 OP の（⑨　　　　　　）または（⑩　　　　　　　　）という。



問 8 右の図で，次の極座標で表される点をそれぞれ図示せよ。

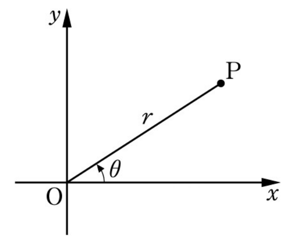
$\mathrm{A}\left(3,\ \frac{\pi}{6}\right)$，$\mathrm{B}\left(2,\ \frac{3}{2}\pi\right)$，$\mathrm{C}(1,\ \pi)$，$\mathrm{D}\left(4,\ -\frac{\pi}{4}\right)$



極座標に対して，いままで用いた $(x,\ y)$ で表された座標を（⑪　　　　　　　）という。直交座標の原点 O を極，x 軸の正の部分を始線 OX とする極座標をとると

（⑫　　　　　　　　　　　　　）

が成り立つ。



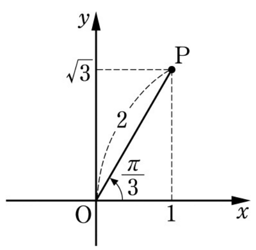
例 3 極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$ である点 P の直交座標 $(x,\ y)$ を求めてみよう。

$x=$

$y=$

であるから，P の直交座標は

（　　　　　　　）



問 9 次の極座標で表される点の直交座標 $(x,\ y)$ を求めよ。

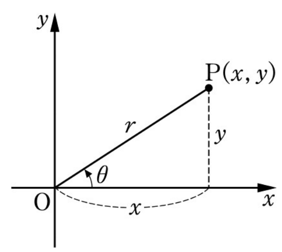
$\mathrm{A}\left(3,\ \frac{\pi}{6}\right), \mathrm{B}\left(2,\ \frac{\pi}{2}\right), \mathrm{C}(1,\ \pi), \mathrm{D}\left(4,\ -\frac{\pi}{4}\right)$

点 P の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，これらの間には

(⑬　　　　　　　　　　　　　　　　)

(⑭　　　　　　　　　)

という関係がある。



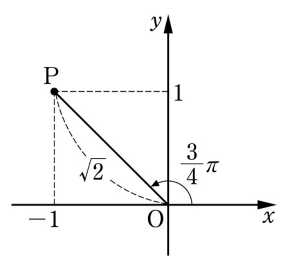
例 4 直交座標が $(-1,\ 1)$ である点 P の極座標 $(r,\ \theta)$ を求めてみよう。

$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ であるから

$\cos\theta=$　　　　　, $\sin\theta=$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ で考えると　$\theta=$

よって，P の極座標は　(　　　　　　　　)



問 10 次の直交座標で表される点の極座標 $(r,\ \theta)$ を求めよ。
ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　$(1,\ 1)$

(2)　$(0,\ -2)$

(3)　$\left(\sqrt{3},\ -1\right)$

極方程式

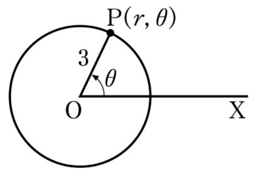
（教科書 p.34）

平面上の曲線が，極座標 $(r,\ \theta)$ を用いた式

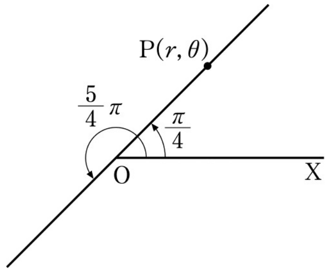
（⑮　　　　　　　　）　または　（⑯　　　　　　　　）　…… ①

で表されるとき，①をその曲線の（⑰　　　　　　　　）という。

例 5 点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ が極方程式 $r=3$ を満たすとき，動径の長さ r は（　　　　　）で一定で，偏角 θ は任意であるから，極方程式 $r=3$ で表される図形は，（　　　　　）を中心とする（　　　　　　　　）である。



例 6 点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ が極方程式 $\theta=\frac{\pi}{4}$ を満たすとき，始線と動径のなす角は（　　　　）で一定であるから，極方程式 $\theta=\frac{\pi}{4}$ で表される図形は，（　　　　　）を通り，始線となす角が（　　　　　　　）である。



問 11 次の極方程式は，どのような図形を表すか。

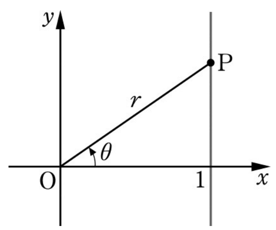
(1)　$r=5$

(2)　$\theta=\frac{\pi}{3}$

例 7 極方程式 $r=\frac{1}{\cos\theta}$ は

（　　　　　　　　）

すなわち，（　　　　　　）と変形されるから，（　　　　　　　　）を表す。



問 12 極方程式 $r=\frac{2}{\sin\theta}$ はどのような図形を表すか。

例 8 極方程式 $r=2\cos\theta$ が円を表すことを示してみよう。

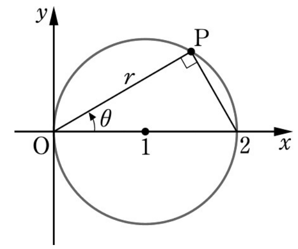
両辺に r を掛けて　（　　　　　　　　）

（　　　　　　　　），$r\cos\theta=$　　　　より

（　　　　　　　　）すなわち（　　　　　　　　　　　）

したがって，極方程式 $r=2\cos\theta$ は，

（　　　　　　　　　　　　　　）を表す。



問 13 極方程式 $r=6\sin\theta$ が円を表すことを示せ。

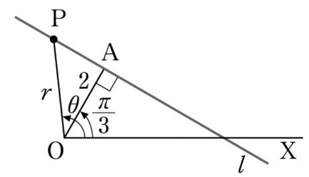
例 9 極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$ である点 A を通り，線分 OA に垂直な直線 l の極方程式を求めてみよう。

直線 l 上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ について

（　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

$\mathrm{OA}=$　　　　　であるから，求める極方程式は

（　　　　　　　　　　）



問 14 極座標が $\left(4,\ \frac{3}{4}\pi\right)$ である点 A を通り，線分 OA に垂直な直線 l の極方程式を求めよ。

2 次曲線の極方程式

（教科書 p.36）

例 10 楕円 $5x^2+y^2=1$ を極方程式で表してみよう。

楕円上の点 $(x,\ y)$ を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと

$x=$　　　　　　　，$y=$

よって

（　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

したがって，この楕円の極方程式は

（　　　　　　　　　　　　　　　）

問 15 次の直交座標を用いて表された曲線を，極方程式で表せ。

(1)　$x^2+y^2=4$

(2)　$x^2-3y^2=-1$

例題 3　円 $x^2+y^2-4x=0$ を極方程式で表せ。

解

問 16 次の直交座標を用いて表された曲線を，極方程式で表せ。

(1)　$(x+2)^2+y^2=4$

(2)　$y^2=3x$

離心率と極方程式

（教科書 p.37）

例 11 極方程式 $r=\frac{ed}{1-e\,\mathrm{co}}$ において，$e=2$，$d=1$ とすると

（　　　　　　　　　　）　…… ③

分母をはらって整理すると　（　　　　　　　　　　　）

両辺を 2 乗して　（　　　　　　　　　　　　　）

ここで，$r^2=$　　　　　　，$x=$　　　　　　より

（　　　　　　　　　　　　　　）

よって　（　　　　　　　　　　　　　）　…… ④

したがって，極方程式③は（　　　　　　　）を表すことがわかる。

問 17 極方程式 $r=\frac{ed}{1-e\cos}$ において e，d が次の値のとき，どのような 2 次曲線になるか。

(1)　$e=\frac{1}{2}$，$d=1$

(2)　$e=1$，$d=4$

3 いろいろな曲線

リサージュ曲線

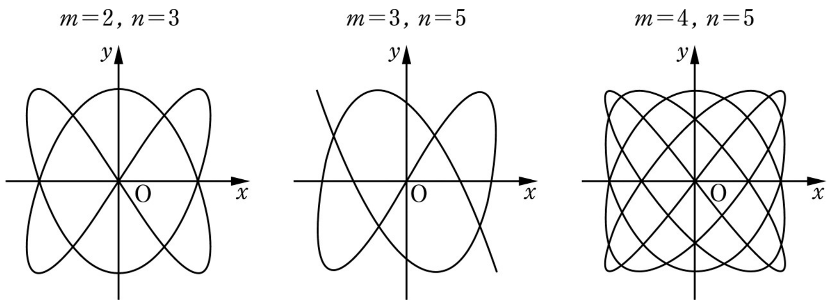
（教科書 p.38）

m, n を自然数とするとき，媒介変数表示

（⑱　　　　　　　　　　）

で表される曲線を（⑲　　　　　　　　　　）という。

いくつかの m, n についてリサージュ曲線をかくと，次のようになる。



アステロイド

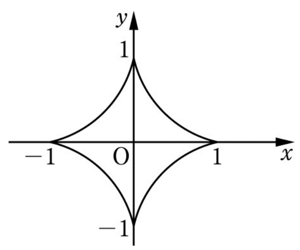
（教科書 p.38）

a を正の定数とするとき，媒介変数表示

（⑳　　　　　　　　　　）

で表される曲線を（㉑　　　　　　　　　　）という。

右の図は，$a=1$ の場合のアステロイドをかいたものである。



アルキメデスの渦巻線

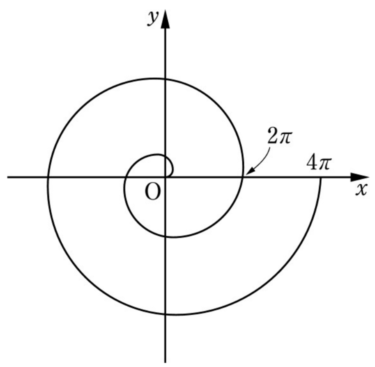
（教科書 p.39）

a を正の定数とするとき，極方程式

（㉒　　　　　　　　　　）

で表される曲線を（㉓　　　　　　　　　　）という。

右の図は，$a=1$ の場合のアルキメデスの渦巻線を，$0 \leqq \theta \leqq 4\pi$ の範囲でかいたものである。



正葉曲線

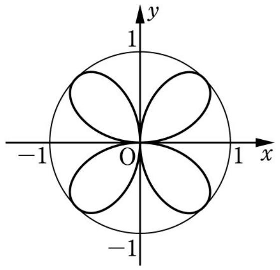
（教科書 p.39）

n を自然数とするとき，極方程式

（㉔　　　　　　　　　　）

で表される曲線を（㉕　　　　　　　　　　）という。

右の図は，$n=2$ の場合の正葉曲線をかいたものである。



カージオイド

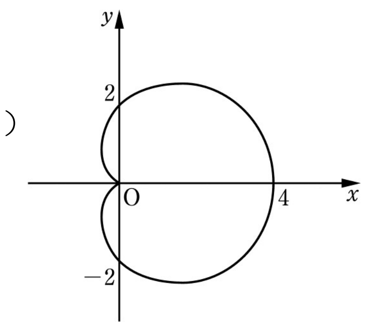
（教科書 p.39）

a を正の定数とするとき，極方程式

（㉖　　　　　　　　　　）

で表される曲線を（㉗　　　　　　　　　　），または（㉘　　　　　　　　）という。

右の図は，$a=2$ の場合のカージオイドをかいたものである。



参 考　定点を通る直線による円の媒介変数表示

（教科書 p.40）

円　$x^2+y^2=1$　…… ①

直線　$y=t(x+1)$　…… ②

とする。

①，②の交点のうち，点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ と異なる点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。

点 P は円①上にあるから，媒介変数 θ を用いて，次のように表される。

$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$

2 つの媒介変数 $t,\ \theta$ の間には，次のような関係があることがわかる。

(㉙　　　　　　)，(㉚　　　　　　)，(㉛　　　　　　)

問 題

（教科書 p.41）

8　媒介変数表示 $\begin{cases} x=pt^2 \\ y=2pt \end{cases}$ は，放物線 $y^2=4px$ を表すことを示せ。

9　次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか答えよ。

(1)　$\begin{cases} x=2\cos\theta+2 \\ y=1-\sin\theta \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos\theta} + 1 \\ y = \tan\theta - 3 \end{cases}$

１０ 次の極方程式を直交座標に関する方程式で表し，どのような曲線を表すか答えよ。

(1) $r = \frac{-2}{\sin\theta}$

(2) $r = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

(3) $r = 2(\sin\theta - \cos\theta)$

(4) $r = \frac{2}{1-\sqrt{2}\,\mathrm{co}}$

１１ 次の直交座標を用いて表された直線や曲線を，極方程式で表せ。

(1) $2x-3y=5$

(2) $x^2+(y-3)^2=9$

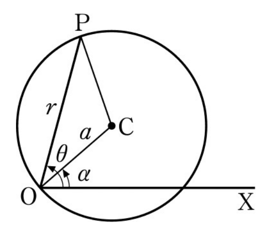
(3) $x^2=2y$

１２ 次の極座標で表された 2 点間の距離を求めよ。

(1) $\mathrm{P}\left(4,\ \frac{\pi}{4}\right)$，$\mathrm{Q}\left(8,\ \frac{7}{12}\pi\right)$

(2) $\mathrm{P}\left(7,\ \frac{5}{6}\pi\right)$，$\mathrm{Q}\left(8,\ \frac{3}{2}\pi\right)$

１３ 中心 C の極座標が $(a,\ \alpha)$ で，極を通る円の極方程式を求めよ。



2 節 媒介変数表示と極座標

1 曲線の媒介変数表示

（教科書 p.28）

一般に，平面上の曲線がある変数 t によって

（① $\begin{cases} \boldsymbol{x = f(t)} \\ \boldsymbol{y = g(t)} \end{cases}$ ）

のような形で表されるとき，これをその曲線の（② 媒介変数表示 ）といい，t を（③ 媒介変数 ）という。

問 1　次の式の媒介変数 t を消去して，x，y の関係式を求めよ。

(1) $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -t + 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -t + 5 \end{cases}$ ……①

①から変数 t を消去すると

$y = -\dfrac{x+3}{2} + 5$

すなわち　$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}}$

(2) $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = -2t \end{cases}$

$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = -2t \end{cases}$ ……①

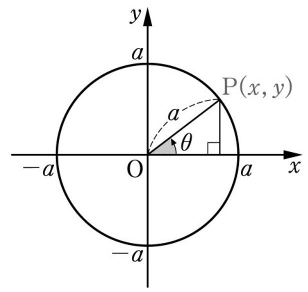
①から変数 t を消去すると

$x = \left(-\dfrac{y}{2}\right)^2 - 1$

すなわち　$\boldsymbol{x = \frac{1}{4}y^2 - 1}$

例 1　原点 O を中心とする半径 a の円上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，半径 OP が x 軸の正の向きとなす角を θ とすれば

（ $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$ ）…… ①



となる。ここで θ が実数全体を動くとき，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ はこの円上を動くから，①は円 $x^2 + y^2 = a^2$ の（ θ ）を媒介変数とする（ 媒介変数表示 ）である。

問 2　円 $x^2 + y^2 = 25$ の媒介変数表示を求めよ。

$x^2 + y^2 = 25$　すなわち　$x^2 + y^2 = 5^2$

よって，この円の媒介変数表示は

$\begin{cases} \boldsymbol{x = 5\cos\theta} \\ \boldsymbol{y = 5\sin\theta} \end{cases}$

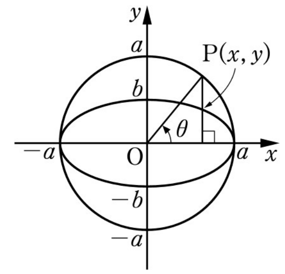
例 2　媒介変数表示 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ …… ①

はどのような曲線を表すかを考えてみよう。

①より　（ $\dfrac{x}{a} = \cos\theta,\ \dfrac{y}{b} = \sin\theta$ ）

ここで，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ であるから

（ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ）



よって，θ が実数全体を動くとき，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は

（ 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ）…… ②

上を動く。したがって，①は（ 楕円② ）を表す。

問 3　楕円 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ の媒介変数表示を求めよ。

$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$　すなわち　$\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

よって，この楕円の媒介変数表示は

$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2\cos\theta} \\ \boldsymbol{y = 3\sin\theta} \end{cases}$

問 4　媒介変数表示 $\begin{cases} x = \frac{a}{\cos\theta} \\ y = b\tan\theta \end{cases}$ は双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ を表すことを示せ。

$x = \frac{a}{\cos\theta}$，$y = b\tan\theta$ より

$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos\theta}$，$\frac{y}{b} = \tan\theta$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta = \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1$$

よって，θ ($\theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$，$n$ は整数) が実数全体を動くとき，点 P$(x,\ y)$ は双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上を動く。

したがって，媒介変数表示 $\begin{cases} x = \frac{a}{\cos\theta} \\ y = b\tan\theta \end{cases}$ は双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ を表す。

例題 1　放物線 $y = x^2 + 2tx - 2t$ の頂点 P は，t の値が変化するとき，どのような曲線上を動くか。

解　頂点の座標を P$(X,\ Y)$ とすると

$y = x^2 + 2tx - 2t$

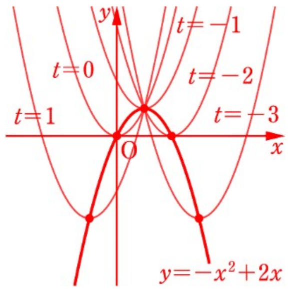
$\quad = (x+t)^2 - t^2 - 2t$

より　$X = -t$，$Y = -t^2 - 2t$

これらから t を消去すると

$Y = -X^2 + 2X$

よって，頂点 P は，放物線 $y = -x^2 + 2x$ 上を動く。



問 5　放物線 $y = -x^2 + 2tx + 1$ の頂点 P は，t の値が変化するとき，どのような曲線上を動くか。

頂点の座標を P$(X,\ Y)$ とすると

$y = -x^2 + 2tx + 1 = -(x-t)^2 + t^2 + 1$

より　$X = t$，$Y = t^2 + 1$

これらから t を消去すると　$Y = X^2 + 1$

よって，頂点 P は**放物線 $y = x^2 + 1$** 上を動く。

例題 2　媒介変数表示 $\begin{cases} x = 2\cos\theta + 1 \\ y = 2\sin\theta + 3 \end{cases}$ はどのような曲線を表すか。

解　$\cos\theta = \frac{x-1}{2}$，$\sin\theta = \frac{y-3}{2}$

である。これらを $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入して整理すると

$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$

よって，中心 $(1,\ 3)$，半径 2 の円を表す。

問 6　次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(1)　$\begin{cases} x = 3\cos\theta + 2 \\ y = 3\sin\theta - 3 \end{cases}$

$x = 3\cos\theta + 2$，$y = 3\sin\theta - 3$ より

$\cos\theta = \frac{x-2}{3}$，$\sin\theta = \frac{y+3}{3}$

である。これらを $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入して整理すると

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$

よって，**中心 $(2,\ -3)$，半径 3 の円**を表す。

〔別解〕$x = 3\cos\theta$，$y = 3\sin\theta$ は円 $x^2 + y^2 = 9$ を表し，これを x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動したものであるから

円 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$

すなわち，中心 $(2,\ -3)$，半径 3 の円を表す。

(2)　$\begin{cases} x = 3\cos\theta - 2 \\ y = 5\sin\theta + 2 \end{cases}$

$x = 3\cos\theta - 2$，$y = 5\sin\theta + 2$ より

$\cos\theta = \frac{x+2}{3}$，$\sin\theta = \frac{y-2}{5}$

である。これらを $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入して

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

よって，これは**楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 2 だけ平行移動した楕円**を表す。

〔別解〕$x = 3\cos\theta$，$y = 5\sin\theta$ は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ を表し，これを x 軸方向に -2，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものであるから，楕円 $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$ を表す。

曲線の平行移動

曲線 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線は $\begin{cases} x = f(t) + p \\ y = g(t) + q \end{cases}$ である。

問 7　中心 $(4,\ 3)$，半径 2 の円の媒介変数表示を求めよ。

中心が原点，半径が 2 の円の媒介変数表示は

$x = 2\cos\theta$，$y = 2\sin\theta$

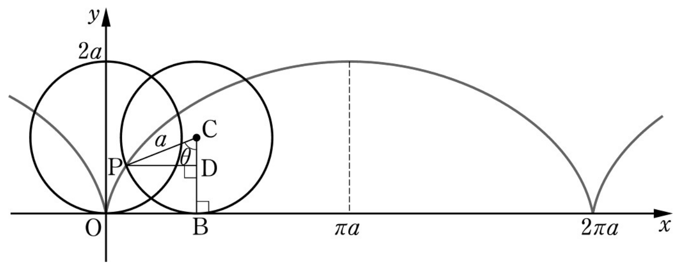
求める円は，これを x 軸方向に 4，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものであるから

$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2\cos\theta + 4} \\ \boldsymbol{y = 2\sin\theta + 3} \end{cases}$

サイクロイド

（教科書 p.31）

1 つの円が定直線に接しながら，すべることなく回転するとき，その円上の定点がえがく曲線を（④　サイクロイド　）という。



サイクロイドの媒介変数表示は次のようになる。

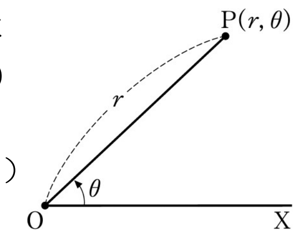
（⑤　$\begin{cases} \boldsymbol{x = a(\theta - \sin\theta)} \\ \boldsymbol{y = a(1 - \cos\theta)} \end{cases}$　）

2　極座標と極方程式

極座標

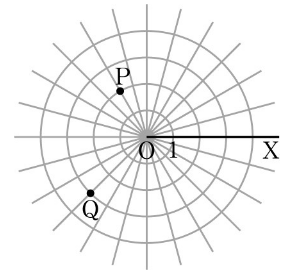
（教科書 p.32）

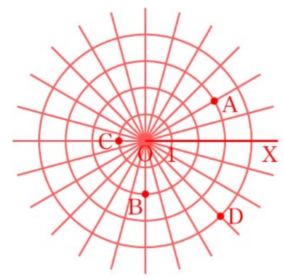
平面上に点 O と半直線 OX を定めると，平面上の点 P を，O からの距離 r と OX を始線とする動径 OP の表す角 θ で定めることができる。このとき，$(r,\ \theta)$ を点 P の（⑥　極座標　）といい，点 O を（⑦　極　），θ を（⑧　偏角　），r を動径 OP の（⑨　長さ　）または（⑩　大きさ　）という。



問 8　右の図で，次の極座標で表される点をそれぞれ図示せよ。

$A\left(3,\ \frac{\pi}{6}\right)$，$B\left(2,\ \frac{3}{2}\pi\right)$，$C(1,\ \pi)$，$D\left(4,\ -\frac{\pi}{4}\right)$

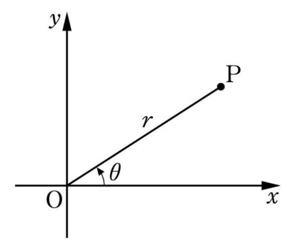




極座標に対して，いままで用いた $(x,\ y)$ で表された座標を（⑪　直交座標　）という。直交座標の原点 O を極，x 軸の正の部分を始線 OX とする極座標をとると

（⑫　$\boldsymbol{x = r\cos\theta}$，$\boldsymbol{y = r\sin\theta}$　）

が成り立つ。



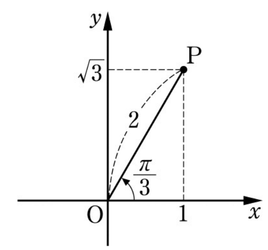
例 3　極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$ である点 P の直交座標 $(x,\ y)$ を求めてみよう。

$x =$　$2\cos\frac{\pi}{3} = 1$

$y =$　$2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

であるから，P の直交座標は

（　$(1,\ \sqrt{3})$　）



問 9　次の極座標で表される点の直交座標 $(x,\ y)$ を求めよ。

$\mathrm{A}\left(3,\ \frac{\pi}{6}\right)$, $\mathrm{B}\left(2,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\mathrm{C}(1,\ \pi)$, $\mathrm{D}\left(4,\ -\frac{\pi}{4}\right)$

極座標 $\mathrm{A}\left(3,\ \frac{\pi}{6}\right)$ について

$x=3\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2},\ y=3\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$

であるから，A の直交座標は　$\mathbf{A}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

極座標 $\mathrm{B}\left(2,\ \frac{\pi}{2}\right)$ について

$x=2\cos\frac{\pi}{2}=0,\ y=2\sin\frac{\pi}{2}=2$

であるから，B の直交座標は　$\mathbf{B(0,\ 2)}$

極座標 $\mathrm{C}(1,\ \pi)$ について

$x=\cos\pi=-1,\ y=\sin\pi=0$

であるから，C の直交座標は　$\mathbf{C(-1,\ 0)}$

極座標 $\mathrm{D}\left(4,\ -\frac{\pi}{4}\right)$ について

$x=4\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2},\ y=4\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-2\sqrt{2}$

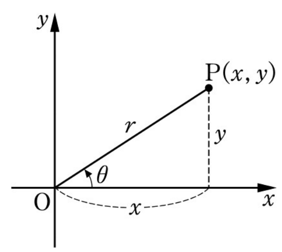
であるから，D の直交座標は　$\mathbf{D(2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})}$

点 P の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，これらの間には

（⑬　$\boldsymbol{\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}}$　）

（⑭　$\boldsymbol{r=\sqrt{x^2+y^2}}$　）

という関係がある。



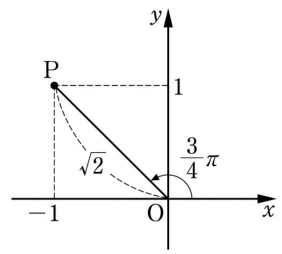
例 4　直交座標が $(-1,\ 1)$ である点 P の極座標 $(r,\ \theta)$ を求めてみよう。

$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ であるから

$\cos\theta=$ $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ ，$\sin\theta=$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ で考えると　$\theta=$ $\frac{3}{4}\pi$

よって，P の極座標は　（ $\left(\sqrt{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)$ ）



問 10　次の直交座標で表される点の極座標 $(r,\ \theta)$ を求めよ。
ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　$(1,\ 1)$

$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ であるから

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leqq\theta<2\pi$ で考えると　$\theta=\frac{\pi}{4}$

よって，極座標は　$\left(\boldsymbol{\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}}\right)$

(2)　$(0,\ -2)$

$r=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$ であるから

$\cos\theta=\frac{0}{2}=0,\ \sin\theta=\frac{-2}{2}=-1$

$0\leqq\theta<2\pi$ で考えると　$\theta=\frac{3}{2}\pi$

よって，極座標は　$\left(\boldsymbol{2,\ \frac{3}{2}\pi}\right)$

(3)　$(\sqrt{3},\ -1)$

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$ であるから

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta=-\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ で考えると　$\theta=\frac{11}{6}\pi$

よって，極座標は　$\left(\boldsymbol{2,\ \frac{11}{6}\pi}\right)$

極方程式

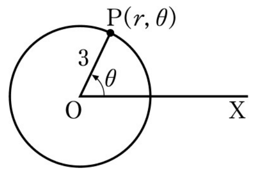
（教科書 p.34）

平面上の曲線が，極座標 $(r,\ \theta)$ を用いた式

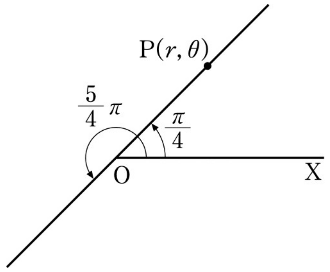
（⑮　$\boldsymbol{r = f(\theta)}$　）　または　（⑯　$\boldsymbol{F(r,\ \theta) = 0}$　）　…… ①

で表されるとき，①をその曲線の（⑰　極方程式　）という。

例 5 点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ が極方程式 $r = 3$ を満たすとき，動径の長さ r は（　3　）で一定で，偏角 θ は任意であるから，極方程式 $r = 3$ で表される図形は，（　極 O　）を中心とする（　半径 3 の円　）である。



例 6 点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ が極方程式 $\theta = \frac{\pi}{4}$ を満たすとき，始線と動径のなす角は（　$\frac{\pi}{4}$　）で一定であるから，極方程式 $\theta = \frac{\pi}{4}$ で表される図形は，（　極 O　）を通り，始線となす角が（　$\frac{\pi}{4}$ の直線　）である。



問 11 次の極方程式は，どのような図形を表すか。

(1)　$r = 5$

点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ が極方程式 $r = 5$ を満たすとき，動径の長さ r は 5 で一定で，偏角 θ は任意であるから，極方程式 $r = 5$ で表される図形は，**極 O を中心とする半径 5 の円**である。

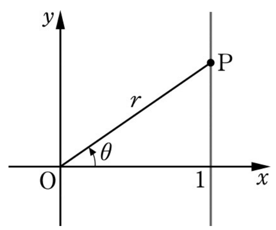
(2)　$\theta = \frac{\pi}{3}$

点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ が極方程式 $\theta = \frac{\pi}{3}$ を満たすとき，始線と動径のなす角は $\frac{\pi}{3}$ で一定であるから，極方程式 $\theta = \frac{\pi}{3}$ で表される図形は，**極 O を通り，始線となす角が $\frac{\pi}{3}$ の直線**である。

例 7 極方程式 $r = \frac{1}{\cos\theta}$ は

（　$r\cos\theta = 1$　）

すなわち，（　$x = 1$　）と変形されるから，（　直線 $x = 1$　）を表す。



問 12 極方程式 $r = \frac{2}{\sin\theta}$ はどのような図形を表すか。

極方程式 $r = \frac{2}{\sin\theta}$ は

$r\sin\theta = 2$

すなわち，$y = 2$ と変形されるから，**直線 $y = 2$** を表す。

例 8 極方程式 $r = 2\cos\theta$ が円を表すことを示してみよう。

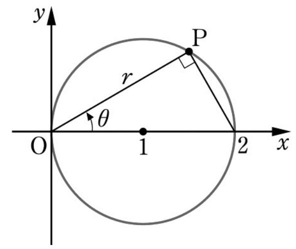
両辺に r を掛けて　（　$r^2 = 2r\cos\theta$　）

（　$r^2 = x^2 + y^2$　），$r\cos\theta =$　x　より

（　$x^2 + y^2 = 2x$　）すなわち（　$(x-1)^2 + y^2 = 1$　）

したがって，極方程式 $r = 2\cos\theta$ は，

（　中心 $(1,\ 0)$，半径 1 の円　）を表す。



問 13 極方程式 $r = 6\sin\theta$ が円を表すことを示せ。

極方程式 $r = 6\sin\theta$ の両辺に r を掛けて

$r^2 = 6r\sin\theta$

$r^2 = x^2 + y^2$，$r\sin\theta = y$ より

$x^2 + y^2 = 6y$　すなわち　$x^2 + (y-3)^2 = 9$

したがって，極方程式 $r = 6\sin\theta$ は，中心 $(0,\ 3)$，半径 3 の円を表す。

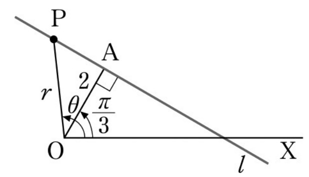
例 9 極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right)$ である点 A を通り，線分 OA に垂直な直線 l の極方程式を求めてみよう。

直線 l 上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ について

（　$\mathrm{OA} = \mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOP} = r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$　）

$\mathrm{OA} =$　2　であるから，求める極方程式は

（　$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$　）



問 14 極座標が $\left(4,\ \frac{3}{4}\pi\right)$ である点 A を通り，線分 OA に垂直な直線 l の極方程式を求めよ。

直線 l 上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ について

$\mathrm{OA} = \mathrm{OP}\cos\angle\mathrm{AOP} = r\cos\left(\theta - \frac{3}{4}\pi\right)$

$\mathrm{OA} = 4$ であるから，求める極方程式は

$$\boldsymbol{r\cos\left(\theta - \frac{3}{4}\pi\right) = 4}$$

2 次曲線の極方程式

（教科書 p.36）

例 10 楕円 $5x^2+y^2=1$ を極方程式で表してみよう。

楕円上の点 $(x,\ y)$ を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと

$x=$ $r\cos\theta$ ，$y=$ $r\sin\theta$

よって

（ $5(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=1$ ）

したがって，この楕円の極方程式は

（ $r^2(4\cos^2\theta+1)=1$ ）

問 15 次の直交座標を用いて表された曲線を，極方程式で表せ。

(1) $x^2+y^2=4$

円 $x^2+y^2=4$ 上の点 $(x,\ y)$ を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

よって　$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=4$

したがって，この円の極方程式は

$\boldsymbol{r=2}$

(2) $x^2-3y^2=-1$

双曲線 $x^2-3y^2=-1$ 上の点 $(x,\ y)$ を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

よって　$(r\cos\theta)^2-3(r\sin\theta)^2=-1$

$r^2(\cos^2\theta-3\sin^2\theta)=-1$

$r^2(-3+4\cos^2\theta)=-1$

したがって，この双曲線の極方程式は

$\boldsymbol{r^2(3-4\cos^2\theta)=1}$

例題 3 円 $x^2+y^2-4x=0$ を極方程式で表せ。

解 円上の点 $(x,\ y)$ を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

これを $x^2+y^2-4x=0$ に代入すると

$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2-4r\cos\theta=0$

$r^2-4r\cos\theta=0$

$r(r-4\cos\theta)=0$

よって　$r=0,\ r=4\cos\theta$

$r=0$ は $r=4\cos\theta$ に含まれるから，求める極方程式は

$r=4\cos\theta$

問 16 次の直交座標を用いて表された曲線を，極方程式で表せ。

(1) $(x+2)^2+y^2=4$

円 $(x+2)^2+y^2=4$ 上の点 $(x,\ y)$ を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

これを $(x+2)^2+y^2=4$ に代入すると

$(r\cos\theta+2)^2+(r\sin\theta)^2=4$

$r^2\cos^2\theta+4r\cos\theta+r^2\sin^2\theta=0$

$r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+4r\cos\theta=0$

$r^2+4r\cos\theta=0$

$r(r+4\cos\theta)=0$

よって　$r=0,\ r=-4\cos\theta$

$r=0$ は $r=-4\cos\theta$ に含まれるから，求める極方程式は

$\boldsymbol{r=-4\cos\theta}$

(2) $y^2=3x$

放物線 $y^2=3x$ 上の点 $(x,\ y)$ を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

これを $y^2=3x$ に代入すると

$(r\sin\theta)^2=3r\cos\theta$

$r(r\sin^2\theta-3\cos\theta)=0$

よって　$r=0,\ r=\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}$

$r=0$ は $r=\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}$ に含まれるから，求める極方程式は

$\boldsymbol{r=\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}}$

離心率と極方程式

（教科書 p.37）

例 11 極方程式 $r=\frac{ed}{1-e\cos\theta}$ において，$e=2$，$d=1$ とすると

（ $r=\frac{2}{1-2\,\mathrm{co}}$ ） …… ③

分母をはらって整理すると （ $r=2+2r\cos\theta$ ）

両辺を 2 乗して （ $r^2=(2+2r\cos\theta)^2$ ）

ここで，$r^2=$ x^2+y^2 ，$x=$ $r\cos\theta$ より

（ $x^2+y^2=(2+2x)^2$ ）

よって （ $\frac{9}{4}\left(x+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{3}{4}y^2=1$ ） …… ④

したがって，極方程式③は（ 双曲線④ ）を表すことがわかる。

問 17 極方程式 $r=\frac{ed}{1-e\cos\theta}$ において e，d が次の値のとき，どのような 2 次曲線になるか。

(1) $e=\frac{1}{2}$，$d=1$

極方程式 $r=\frac{ed}{1-e\cos\theta}$ において，$e=\frac{1}{2}$，$d=1$ とすると

$r=\frac{1}{2-\cos\theta}$ ……①

分母をはらって整理すると

$r=\frac{1}{2}(1+r\cos\theta)$

両辺を 2 乗して

$r^2=\frac{1}{4}(1+r\cos\theta)^2$

ここで，$r^2=x^2+y^2$，$x=r\cos\theta$ より

$x^2+y^2=\frac{1}{4}(1+x)^2$

よって $\frac{9}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+3y^2=1$

したがって，極方程式①は楕円 $\boldsymbol{\frac{9}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+3y^2=1}$ を表す。

(2) $e=1$，$d=4$

極方程式 $r=\frac{ed}{1-e\cos\theta}$ において，$e=1$，$d=4$ とすると

$r=\frac{4}{1-\cos}$ ……①

分母をはらって整理すると

$r=4+r\cos\theta$

両辺を 2 乗して

$r^2=(4+r\cos\theta)^2$

ここで，$r^2=x^2+y^2$，$x=r\cos\theta$ より

$x^2+y^2=(4+x)^2$

よって $y^2=8(x+2)$

したがって，極方程式①は放物線 $\boldsymbol{y^2=8(x+2)}$ を表す。

3　いろいろな曲線

リサージュ曲線

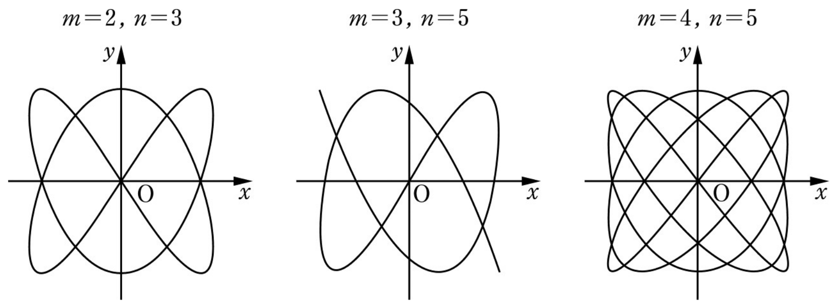
（教科書 p.38）

m, n を自然数とするとき，媒介変数表示

（⑱　$\begin{cases} x = \sin m\theta \\ y = \sin n\theta \end{cases}$　）

で表される曲線を（⑲　リサージュ曲線　）という。

いくつかの m, n についてリサージュ曲線をかくと，次のようになる。



アステロイド

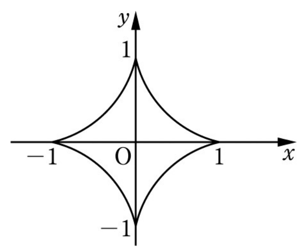
（教科書 p.38）

a を正の定数とするとき，媒介変数表示

（⑳　$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$　）

で表される曲線を（㉑　アステロイド　）という。

右の図は，$a = 1$ の場合のアステロイドをかいたものである。



アルキメデスの渦巻線

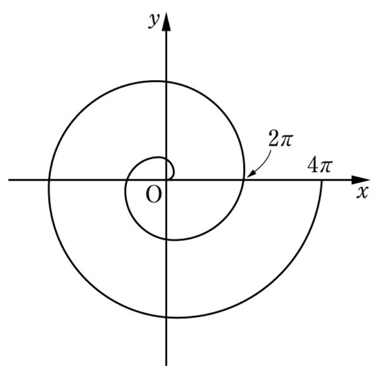
（教科書 p.39）

a を正の定数とするとき，極方程式

（㉒　$r = a\theta \ (\theta \geqq 0)$　）

で表される曲線を（㉓　アルキメデスの渦巻線　）という。

右の図は，$a = 1$ の場合のアルキメデスの渦巻線を，$0 \leqq \theta \leqq 4\pi$ の範囲でかいたものである。



正葉曲線

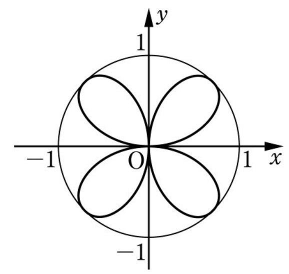
（教科書 p.39）

n を自然数とするとき，極方程式

（㉔　$r = \sin n\theta$　）

で表される曲線を（㉕　正葉曲線　）という。

右の図は，$n = 2$ の場合の正葉曲線をかいたものである。



カージオイド

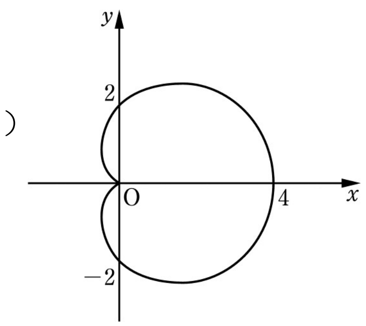
（教科書 p.39）

a を正の定数とするとき，極方程式

（㉖　$r = a(1 + \cos\theta)$　）

で表される曲線を（㉗　カージオイド　），または（㉘　心臓形　）という。

右の図は，$a = 2$ の場合のカージオイドをかいたものである。



参考　定点を通る直線による円の媒介変数表示

（教科書 p.40）

円　$x^2+y^2=1$　…… ①
直線　$y=t(x+1)$　…… ②
とする。
①，②の交点のうち，点 $A(-1,\ 0)$ と異なる点を $P(x,\ y)$ とする。

点 P は円①上にあるから，媒介変数 θ を用いて，次のように表される。

$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$

2 つの媒介変数 $t,\ \theta$ の間には，次のような関係があることがわかる。

（㉙ $\boldsymbol{t=\tan\frac{\theta}{2}}$ ），（㉚ $\boldsymbol{\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}}$ ），（㉛ $\boldsymbol{\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}}$ ）

問題

（教科書 p.41）

8 媒介変数表示 $\begin{cases}x=pt^2\\y=2pt\end{cases}$ は，放物線 $y^2=4px$ を表すことを示せ。

$\begin{cases}x=pt^2\\y=2pt\end{cases}$ ……①

$p\neq0$ のとき，①から変数 t を消去すると

$$x=p\left(\frac{y}{2p}\right)^2=\frac{y^2}{4p}$$

すなわち　$y^2=4px$

よって①は，放物線 $y^2=4px$ を表す。

9 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか答えよ。

(1) $\begin{cases}x=2\cos\theta+2\\y=1-\sin\theta\end{cases}$

$\begin{cases}x=2\cos\theta+2\\y=1-\sin\theta\end{cases}$

$\cos\theta=\frac{x-2}{2}$，$\sin\theta=-y+1$

である。これらを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると

$$\frac{(x-2)^2}{4}+(-y+1)^2=1$$

すなわち　$\frac{(x-2)^2}{4}+(y-1)^2=1$

よって，これは楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した

楕円 $\boldsymbol{\frac{(x-2)^2}{4}+(y-1)^2=1}$ を表す。

(2) $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos\theta} + 1 \\ y = \tan\theta - 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos\theta} + 1 \\ y = \tan\theta - 3 \end{cases}$

$\frac{1}{\cos\theta} = x - 1$, $\tan\theta = y + 3$

である。これらを $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ に代入して整理すると

$(x-1)^2 - (y+3)^2 = 1$

よって，これは双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 だけ平行移動した**双曲線**

$\boldsymbol{(x-1)^2 - (y+3)^2 = 1}$ を表す。

１０ 次の極方程式を直交座標に関する方程式で表し，どのような曲線を表すか答えよ。

(1) $r = \frac{-2}{\sin\theta}$

極方程式 $r = \frac{-2}{\sin\theta}$ は　　$r\sin\theta = -2$

$y = r\sin\theta$ より　　$y = -2$

したがって，極方程式 $r = \frac{-2}{\sin\theta}$ は**直線 $\boldsymbol{y = -2}$** を表す。

(2) $r = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

極方程式 $r = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ の分母をはらって，両辺に r を掛けると

$r^2\cos^2\theta = r\sin\theta$

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ より　　$x^2 = y$

したがって，極方程式 $r = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ は**放物線 $\boldsymbol{y = x^2}$** を表す。

(3) $r = 2(\sin\theta - \cos\theta)$

極方程式 $r = 2(\sin\theta - \cos\theta)$ の両辺に r を掛けると

$r^2 = 2(r\sin\theta - r\cos\theta)$

$r^2 = x^2 + y^2$，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ より

$x^2 + y^2 = 2(y - x)$

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$

したがって，極方程式 $r = 2(\sin\theta - \cos\theta)$ は，**円 $\boldsymbol{(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2}$** を表す。

(4) $r = \frac{2}{1-\sqrt{2}\cos\theta}$

極方程式 $r = \frac{2}{1-\sqrt{2}\cos\theta}$ の分母をはらって整理すると

$r = 2 + \sqrt{2}r\cos\theta$

両辺を 2 乗すると

$r^2 = \left(2 + \sqrt{2}r\cos\theta\right)^2$

$r^2 = x^2 + y^2$，$x = r\cos\theta$ より

$x^2 + y^2 = \left(2 + \sqrt{2}x\right)^2$

$\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 - y^2 = 4$

したがって，極方程式 $r = \frac{2}{1-\sqrt{2}\cos\theta}$ は，**双曲線 $\boldsymbol{\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 - y^2 = 4}$** を表す。

１１ 次の直交座標を用いて表された直線や曲線を，極方程式で表せ。

(1) $2x-3y=5$

直線 $2x-3y=5$ 上の点 $(x,\ y)$ を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

これを $2x-3y=5$ に代入すると

$2r\cos\theta-3r\sin\theta=5$

$r(2\cos\theta-3\sin\theta)=5$

$r=\dfrac{5}{2\cos\theta-3\sin\theta}$

したがって，求める極方程式は

$$\boldsymbol{r=\frac{5}{2\cos\theta-3\sin\theta}}$$

(2) $x^2+(y-3)^2=9$

円 $x^2+(y-3)^2=9$ 上の点 $(x,\ y)$ を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

これを $x^2+(y-3)^2=9$ に代入すると

$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta-3)^2=9$

$r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta-6r\sin\theta+9=9$

$r(r-6\sin\theta)=0$

よって　$r=0,\ r=6\sin\theta$

$r=0$ は $r=6\sin\theta$ に含まれるから，求める極方程式は

$\boldsymbol{r=6\sin\theta}$

(3) $x^2=2y$

放物線 $x^2=2y$ 上の点 $(x,\ y)$ を極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表すと

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

これを $x^2=2y$ に代入すると

$(r\cos\theta)^2=2r\sin\theta$

$r(r\cos^2\theta-2\sin\theta)=0$

よって　$r=0,\ r=\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$r=0$ は $r=\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$ に含まれるから，求める極方程式は

$$\boldsymbol{r=\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}}$$

１２ 次の極座標で表された 2 点間の距離を求めよ。

(1) $\mathrm{P}\left(4,\ \frac{\pi}{4}\right)$，$\mathrm{Q}\left(8,\ \frac{7}{12}\pi\right)$

$\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{7}{12}\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{3}$

$\triangle\mathrm{POQ}$ において，余弦定理により

$\mathrm{PQ}^2=4^2+8^2-2\cdot4\cdot8\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=48$

ゆえに　$\mathrm{PQ}=\boldsymbol{4\sqrt{3}}$

(2) $\mathrm{P}\left(7,\ \frac{5}{6}\pi\right)$，$\mathrm{Q}\left(8,\ \frac{3}{2}\pi\right)$

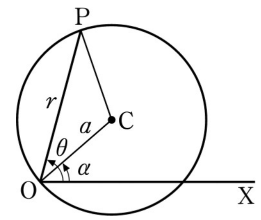
$\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{3}{2}\pi-\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{2}{3}\pi$

$\triangle\mathrm{POQ}$ において，余弦定理により

$\mathrm{PQ}^2=7^2+8^2-2\cdot7\cdot8\cdot\cos\dfrac{2}{3}\pi=169$

ゆえに　$\mathrm{PQ}=\boldsymbol{13}$

１３ 中心 C の極座標が $(a,\ \alpha)$ で，極を通る円の極方程式を求めよ。



円上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とする。

$\triangle\mathrm{COP}$ において，余弦定理により

$\mathrm{CP}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OC}\cos\angle\mathrm{COP}$

ここで，$\mathrm{CP}=\mathrm{OC}=a$，$\mathrm{OP}=r$，$\angle\mathrm{COP}=\theta-\alpha$ であるから

$a^2=r^2+a^2-2ar\cos(\theta-\alpha)$

よって　$r\{r-2a\cos(\theta-\alpha)\}=0$

したがって　$r=0,\ r=2a\cos(\theta-\alpha)$

$r=0$ は，$r=2a\cos(\theta-\alpha)$ に含まれるから，求める極方程式は

$\boldsymbol{r=2a\cos(\theta-\alpha)}$

〔別解〕直線 OC の延長と円 C の交点を Q とすると，$\angle\mathrm{OPQ}=\frac{\pi}{2}$ であるから

$\cos(\theta-\alpha)=\dfrac{r}{2a}$

ゆえに　$r=2a\cos(\theta-\alpha)$