1 節 2 次曲線

1 放物線 （教科書 p.6）

平面上で，“定点 F からの距離と，F を通らない定直線 l からの距離が等しい点 P の軌跡”を（① ）といい，点 F を（② ），直線 l を（③ ）という。

放物線の方程式 （教科書 p.6）

$$y^2 = 4px \quad \cdots\cdots ①$$

①を放物線の方程式の（④ ）という。

一般に，放物線において，焦点を通り準線に垂直な直線を放物線の（⑤ ）といい，軸と放物線との交点を放物線の（⑥ ）という。

放物線の性質	
放物線 $y^2 = 4px$ について	
焦点は $(p,\ 0)$	準線は $x = -p$
頂点は原点 $(0,\ 0)$	軸は x 軸 $(y = 0)$

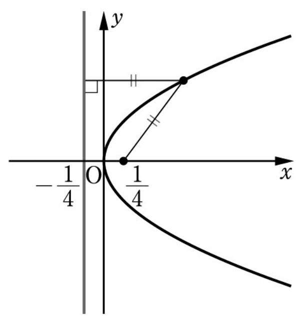
例 1 放物線 $y^2 = x$ は

（ ）

と表すことができるから，

焦点は（ ），準線は（ ）

である。



問 1 次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

(1) $y^2 = 4x$

(2) $y^2 = -6x$

⑶　$2y^2 = x$

例 2 焦点が $(2,\ 0)$，準線が $x = -2$ である放物線の方程式は

（　　　　　　　　　　）　すなわち　（　　　　　　　　　）

問 2 焦点が $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$，準線が $x = -\frac{5}{2}$ である放物線の方程式を求めよ。

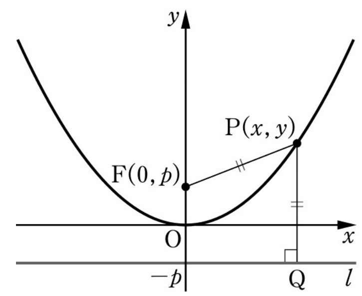
y 軸上に焦点をもつ放物線

（教科書 p.7）

教科書 6 ページの放物線の方程式①において，x と y を入れかえて得られる方程式

（⑦　　　　　　　　　　）

が表す図形は，右の図のような放物線である。



問 3 次の放物線の焦点と準線を求めよ。

⑴　$x^2 = 8y$

⑵　$x^2 = -12y$

⑶　$y = x^2$

問 4 次の放物線の方程式を求めよ。

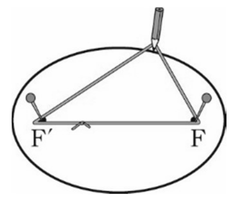
⑴　焦点 $(0,\ 4)$，準線 $y = -4$

⑵　頂点 $(0,\ 0)$，準線 $y = \frac{3}{8}$

2 楕円

（教科書 p.8）

平面上で，“2 定点 F, F′ からの距離の和が一定である点 P の軌跡”を（⑧　　　　　　）といい，点 F, F′ をその（⑨　　　　　　）という。



楕円の方程式

（教科書 p.8）

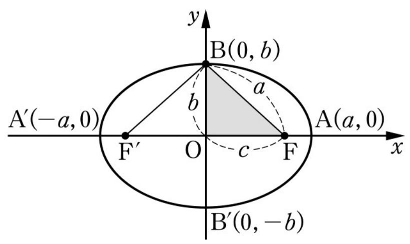
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

①を楕円の方程式の（⑩　　　　　　）という。楕円①と x 軸，y 軸の交点

$\mathrm{A}(a,\ 0)$,　$\mathrm{A'}(-a,\ 0)$,　$\mathrm{B}(0,\ b)$,　$\mathrm{B'}(0,\ -b)$

を楕円の（⑪　　　　　　）といい，線分 AA′ を（⑫　　　　　　），線分 BB′ を（⑬　　　　　　）という。

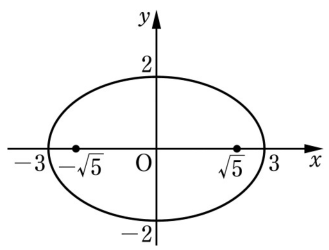
また，楕円①は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称である。この O を楕円の（⑭　　　　　　）という。



楕円の性質
楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ について 長軸の長さは　$2a$，　短軸の長さは　$2b$ 焦点　$\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$, $\mathrm{F'}\left(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$ 楕円上の点 P について　　$\mathrm{PF}+\mathrm{PF'}=2a$

例 3 楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ の頂点は（　　　　　　　　　　　　）で，長軸の長さは（　　　　），短軸の長さは（　　　　）である。

また，$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$より，焦点は（　　　　　　　　　　）であるから，その概形は右の図のようになる。



問 5 次の楕円の頂点と焦点を求め，その概形をかけ。

(1)　$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

(2)　$x^2+4y^2=4$

例 4 2 点 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$ を焦点とし，2 点からの距離の和が 10 である楕円の方程式を求めてみよう。

求める方程式を $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ とおくと　（　　　　　　　　　　　　）

よって，（　　　　　　　　）であるから，その方程式は　（　　　　　　　）

問 6 2 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を焦点とし，2 点からの距離の和が 6 である楕円の方程式を求めよ。

y 軸上に焦点をもつ楕円

（教科書 p.10）

問 7 次の楕円の頂点，焦点を求め，その概形をかけ。また，長軸，短軸の長さを求めよ。

（1） $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

(2) $x^2+\frac{y^2}{9}=1$

(3) $9x^2+4y^2=1$

円と楕円

（教科書 p.10）

例題 1 円 $x^2+y^2=25$ を x 軸を基準にして y 軸方向に $\frac{3}{5}$ 倍して得られる図形は，どのような曲線か。

解

問 8 円 $x^2+y^2=36$ を x 軸を基準にして y 軸方向に $\frac{2}{3}$ 倍して得られる図形は，どのような曲線か。

軌跡と楕円

（教科書 p.11）

応用例題 2 長さ 7 の線分 PQ がある。点 P が x 軸上，点 Q が y 軸上を動くとき，PQ を 3：4 に内分する点 R の軌跡を求めよ。

解

問 9 長さ 5 の線分 PQ がある。点 P が x 軸上，点 Q が y 軸上を動くとき，PQ を 3：2 に内分する点 R の軌跡を求めよ。

3　双曲線

（教科書 p.12）

平面上で，“2 定点 F，F′ からの距離の差が一定である点 P の軌跡” を（⑮　　　　　　　）といい，点 F，F′ をその（⑯　　　　　　　）という。

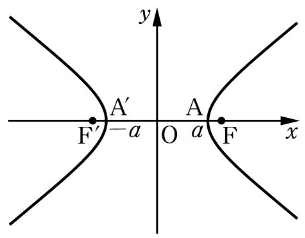
双曲線の方程式

（教科書 p.12）

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

①を双曲線の方程式の（⑰　　　　　　　）という。

双曲線①と x 軸との 2 つの交点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{A}'(-a,\ 0)$ を双曲線の（⑱　　　　　　　）といい，直線 AA′ を（⑲　　　　　　　）という。また，双曲線①は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称である。この O を双曲線の（⑳　　　　　　　）という。



双曲線の性質
双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ について 焦点　$\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$，$\mathrm{F}'\left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$ 双曲線上の点 P について　$\lvert\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'\rvert=2a$

例 5　双曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ の頂点と焦点を求めてみよう。

頂点は（　　　　　　　　　　）で，$\sqrt{16+9}=5$ より，
焦点は（　　　　　　　　　　）である。

問 10　次の双曲線の頂点と焦点を求めよ。

(1)　$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

(2)　$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

例 6　2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とし，2 点からの距離の差が 6 である双曲線の方程式を求めてみよう。

求める方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ とおくと

（　　　　　　　　　　　　　　）

よって，（　　　　　　　　　）であるから，その方程式は（　　　　　　　　）

問 11　2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ からの距離の差が 4 である双曲線の方程式を求めよ。

問 12　焦点が $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$，頂点間の距離が 8 である双曲線の方程式を求めよ。

漸近線

（教科書 p.14）

双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

に対して，２直線 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$ を双曲線①の（㉑　　　　　　　　）という。

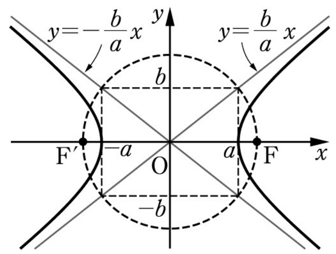
双曲線の漸近線

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

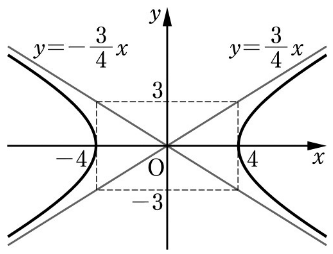
$(a>0,\ b>0)$

の漸近線は

$$\boldsymbol{y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x}$$



例 7 教科書 13 ページの例 5 の双曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ について，漸近線は（　　　　　　　　　）であり，その概形は右の図のようになる。



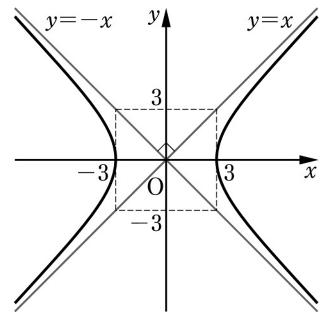
問 13 次の双曲線について，漸近線を求め，その概形をかけ。

(1)　$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

(2)　$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ において，$a=b$ ならば，2 つの漸近線は $y=x$, $y=-x$ となり，これらは直交する。2 つの漸近線が直交する双曲線を（㉒　　　　　　　　）という。

例 8 双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ は（　　　　　　　　　）である。



問 14 2 点 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$ を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ。

y 軸上に焦点をもつ双曲線

（教科書 p.16）

問 15 次の双曲線の頂点と焦点および漸近線を求め，その概形をかけ。

(1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$

(2) $x^2-\frac{y^2}{5}=-1$

(3) $3x^2-9y^2=-1$

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$ は，いずれも x，y についての 2 次方程式で表されている。これらの曲線をまとめて（㉓　　　　　　　　）という。

4　2 次曲線の平行移動

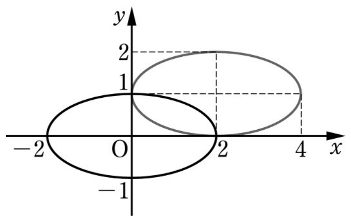
（教科書 p.17）

曲線の平行移動
曲線 $f(x,\ y)=0$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して得られる曲線の方程式は $\boldsymbol{f(x-p,\ y-q)=0}$

例 9　楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$　…… ①

を x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した楕円の方程式は

（　　　　　　　　　　　　　　）…… ②



また，$\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ より，楕円①の焦点は

（　　　　　　　　　　）であるから，楕円②の焦点は，楕円①の焦点を x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ移動した（　　　　　　　　　　　　　）である。

問 16　次の曲線を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した曲線の方程式を求めよ。また，その焦点を求めよ。

(1)　$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

(2)　$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

例題 3　方程式 $y^2-4x-4y=0$ の表す図形は放物線であることを示し，その焦点と準線を求めよ。

解

問 17　次の放物線の焦点と準線を求めよ。

(1)　$y^2+4x-2y=0$

(2)　$y^2+y=x$

例題 4 次の方程式はどのような図形を表すか。また，その概形をかけ。

(1) $9x^2+4y^2+18x-16y-11=0$

(2) $x^2-2y^2-4y=10$

解

問 18 次の方程式はどのような図形を表すか。また，その概形をかけ。

(1) $4x^2+9y^2=24x$

(2) $5x^2-4y^2+10x+16y=-9$

5 2 次曲線と直線

（教科書 p.20）

例題 5 楕円 $4x^2+y^2=8$ と直線 $y=2x+k$ の共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

解

問 19 放物線 $y^2=-8x$ と直線 $y=-2x+k$ の共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

教科書 20 ページの例題 5 において，$D=0$ のとき共有点は 1 個で，これは $D>0$ のときの 2 個の共有点が重なったものと考えることができる。このとき，直線は楕円に（㉔　　　　　　）といい，その直線を楕円の（㉕　　　　　　），接線と楕円の共有点を（㉖　　　　　　）という。

例題 6 双曲線 $3x^2 - y^2 = -6$ と直線 $y = -x + k$ が接するように，定数 k の値を定めよ。

解

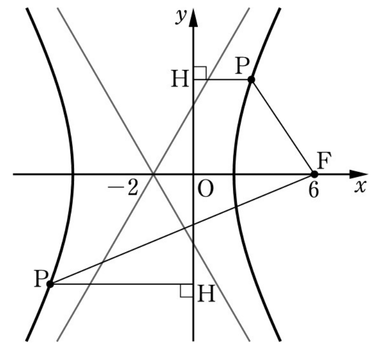
問 20 楕円 $2x^2 + y^2 = 2$ と直線 $y = mx + 2$ が接するように，定数 m の値を定めよ。

6 2 次曲線と離心率

（教科書 p.22）

例 10 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，定点 $\mathrm{F}(6,\ 0)$ からの距離 PF と y 軸からの距離 PH の比の値を $e = \frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ とおく。

$e = 2$ のときの点 P の軌跡を求めてみよう。



PF =

PH =

PF = 2PH より

（　　　　　　　　　　　　　　　　）

両辺を 2 乗して

$(x-6)^2 + y^2 = 4x^2$

整理して変形すると

（　　　　　　　　　　　　）　　…… ①

これは，双曲線

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$　　…… ②

を x 軸方向に（　　　　　）だけ平行移動した双曲線を表している。

また，双曲線②の焦点は $(8,\ 0)$，$(-8,\ 0)$ であるから，双曲線①の焦点は

（　　　　　　　　　　　　）である。

問 21 例 10 において，次の場合の点Pの軌跡を求めよ。

(1)　$e = \frac{1}{2}$

⑵　$e=1$

一般に，定点 F からの距離 PF と定直線 l からの距離 PH の比の値 e が一定である点 P の軌跡は，F を 1 つの焦点とする 2 次曲線であり

$0<e<1$ のとき　　楕円

$e=1$ のとき　　放物線

$e>1$ のとき　　双曲線

であることが知られている。この e の値を，2 次曲線の（㉗　　　　　　）といい，直線 l を（㉘　　　　　　）という。

例11 点 F(3, 0) からの距離と y 軸からの距離の比の値が e である点を P$(x,\ y)$ とするとき，e の値によって点 P の軌跡がどのようになるかを調べてみよう。

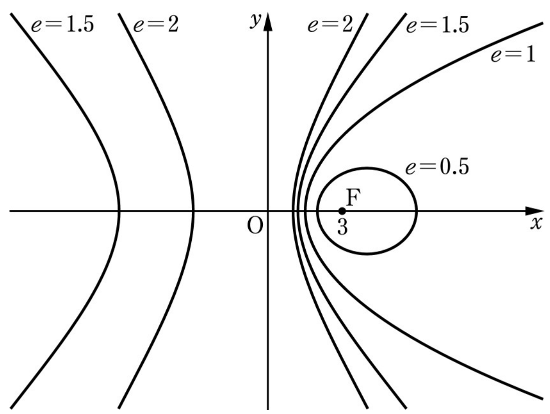
条件より　　　　（　　　　　　　　　　　）

両辺を 2 乗して　　$(x-3)^2+y^2=e^2x^2$

これを整理すると

（　　　　　　　　　　　　　）　…… ①

①に，$e=0.5$，$e=1$，$e=1.5$，$e=2$ を代入し，それぞれの表す 2 次曲線の概形をかくと，下の図のようになる。



問22 点 (0, 1) からの距離と直線 $y=4$ からの距離の比の値が 2 である点 P の軌跡を求めよ。

参 考　円錐曲線

（教科書 p.24）

1つの直線 l と1点Oで交わる直線 l' が l のまわりに空間内で回転するとき，l' のえがく面を円錐面という。l をその円錐面の（㉙　　　　　），Oを（㉚　　　　　），l' を（㉛　　　　　）という。

2次曲線は平面による円錐面の切り口としても現れることが知られている。そのため，2次曲線は（㉜　　　　　　　）ともよばれる。

参 考　2次曲線の接線の方程式

（教科書 p.25）

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ は楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上にあるから，$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}$ の式の右辺は1に等しい。

よって，求める接線の方程式は　（㉝　　　　　　　　　）

この式は $y_1=0$ のときにも成り立つ。

同様にして，曲線上の点 $(x_1,\ y_1)$ における

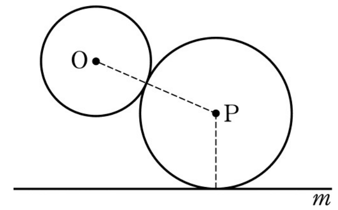
双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ の接線の方程式は　（㉞　　　　　　　　　）

放物線 $y^2=4px$ の接線の方程式は　（㉟　　　　　　　　　）

問 題

（教科書 p.26）

1　定円Oと，この円に交わらない定直線 m がある。円Oに外接し，直線 m に接する円の中心Pの軌跡は放物線であることを示せ。



2　次の条件を満たす楕円の方程式を求めよ。

(1)　2 点 $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$ からの距離の和が 10 である。

(2)　焦点が $(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$ で，点 $(3,\ 0)$ を通る。

(3)　焦点が $\left(\sqrt{2},\ 0\right)$, $\left(-\sqrt{2},\ 0\right)$ で，点 $\left(\sqrt{3},\ \sqrt{2}\right)$ を通る。

3　長さ 2 の線分 PQ があり，点 P が x 軸上，点 Q が y 軸上を動くとき，PQ を 3 : 5 に外分する点 R の軌跡を求めよ。

4　原点を中心とし，x 軸または y 軸を主軸とする双曲線のうち，次の条件を満たすものの方程式を求めよ。

(1)　2 点 $\left(\sqrt{2},\ 2\right)$, $\left(-\sqrt{5},\ -4\right)$ を通る。

(2)　点 $(0,\ -2)$ を頂点とし，$y = x$を漸近線とする。

5 次の 2 次曲線を x 軸方向に -1, y 軸方向に 2 だけ平行移動した曲線の方程式を求めよ。また，焦点を求めよ。

(1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

(2) $y^2=6x$

(3) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=-1$

6 次の方程式で表される 2 次曲線の概形をかき，焦点を求めよ。

(1) $2(x-1)^2+(y+1)^2=2$

(2) $x^2-y^2+4y+5=0$

⑶　$y^2-2x-2y=3$

7　双曲線 $x^2-3y^2=3$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

1節 2次曲線

1 放物線

（教科書 p.6）

平面上で，“定点 F からの距離と，F を通らない定直線 l からの距離が等しい点 P の軌跡”を（① 放物線 ）といい，点 F を（② 焦点 ），直線 l を（③ 準線 ）という。

放物線の方程式

（教科書 p.6）

$$y^2 = 4px \quad \cdots\cdots ①$$

①を放物線の方程式の（④ 標準形 ）という。

一般に，放物線において，焦点を通り準線に垂直な直線を放物線の（⑤ 軸 ）といい，軸と放物線との交点を放物線の（⑥ 頂点 ）という。

放物線の性質	
放物線 $y^2 = 4px$ について	
焦点は $(p,\ 0)$	準線は $x = -p$
頂点は原点 $(0,\ 0)$	軸は x 軸 $(y = 0)$

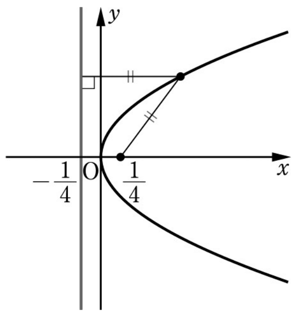
例 1 放物線 $y^2 = x$ は

（ $y^2 = 4\cdot\frac{1}{4}x$ ）

と表すことができるから，

焦点は（ $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$ ），準線は（ $x = -\frac{1}{4}$ ）

である。



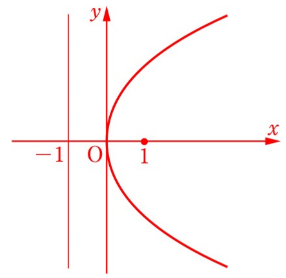
問 1 次の放物線の焦点と準線を求め，その概形をかけ。

(1) $y^2 = 4x$

放物線 $y^2 = 4x$ は

$y^2 = 4\cdot 1x$

と表すことができるから，焦点は $(\mathbf{1},\ \mathbf{0})$，準線は $x = -1$ である。

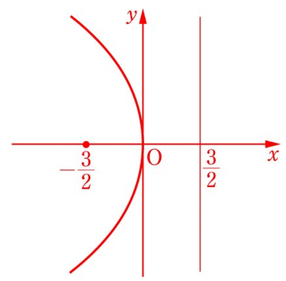


(2) $y^2 = -6x$

放物線 $y^2 = -6x$ は

$$y^2 = 4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x$$

と表すことができるから，焦点は $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$，準線は $x = \frac{3}{2}$ である。

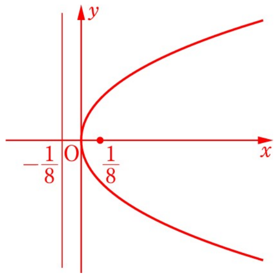


(3)　$2y^2 = x$

放物線 $2y^2 = x$ は

$$y^2 = 4 \cdot \frac{1}{8} x$$

と表すことができるから，焦点は $\left(\frac{1}{8},\ 0\right)$，準線は $x = -\frac{1}{8}$ である。



例 2　焦点が $(2,\ 0)$，準線が $x = -2$ である放物線の方程式は

（　$y^2 = 4 \cdot 2x$　）　すなわち　（　$y^2 = 8x$　）

問 2　焦点が $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$，準線が $x = -\frac{5}{2}$ である放物線の方程式を求めよ。

$y^2 = 4 \cdot \frac{5}{2} x$　すなわち　$\boldsymbol{y^2 = 10x}$

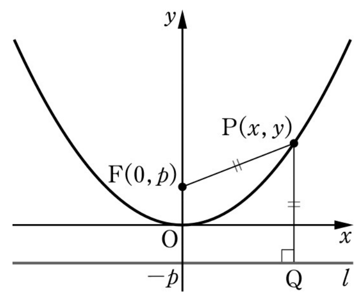
y 軸上に焦点をもつ放物線

（教科書 p.7）

教科書 6 ページの放物線の方程式①において，x と y を入れかえて得られる方程式

（⑦　$\boldsymbol{x^2 = 4py}$　）

が表す図形は，右の図のような放物線である。



問 3　次の放物線の焦点と準線を求めよ。

(1)　$x^2 = 8y$

焦点 $(0,\ 2)$，準線 $y = -2$

(2)　$x^2 = -12y$

焦点 $(0,\ -3)$，準線 $y = 3$

(3)　$y = x^2$

焦点 $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$，準線 $y = -\frac{1}{4}$

問 4　次の放物線の方程式を求めよ。

(1)　焦点 $(0,\ 4)$，準線 $y = -4$

$\boldsymbol{x^2 = 16y}$

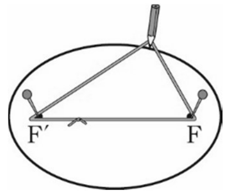
(2)　頂点 $(0,\ 0)$，準線 $y = \frac{3}{8}$

$\boldsymbol{x^2 = -\frac{3}{2}y}$

2 楕円

（教科書 p.8）

平面上で，“2 定点 F, F′ からの距離の和が一定である点 P の軌跡”を（⑧　楕円　）といい，点 F, F′ をその（⑨　焦点　）という。



楕円の方程式

（教科書 p.8）

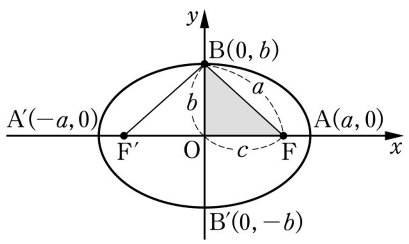
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

①を楕円の方程式の（⑩　標準形　）という。楕円①と x 軸，y 軸の交点

$A(a,\ 0)$，　$A'(-a,\ 0)$，　$B(0,\ b)$，　$B'(0,\ -b)$

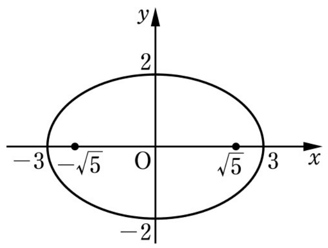
を楕円の（⑪　頂点　）といい，線分 AA′ を（⑫　長軸　），線分 BB′ を（⑬　短軸　）という。

また，楕円①は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称である。この O を楕円の（⑭　中心　）という。



楕円の性質
楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ について 長軸の長さは　$2a$，　短軸の長さは　$2b$ 焦点　$F(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，$F'(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ 楕円上の点 P について　　$PF+PF'=2a$

例 3 楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ の頂点は（　$(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$　）で，長軸の長さは（　6　），短軸の長さは（　4　）である。
また，$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$より，焦点は（　$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$　）であるから，その概形は右の図のようになる。

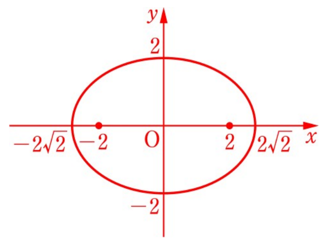


問 5 次の楕円の頂点と焦点を求め，その概形をかけ。

(1)　$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$

楕円 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ の頂点は $(2\sqrt{2},\ 0)$，$(-2\sqrt{2},\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$ である。

また，$\sqrt{8-4}=2$ より，焦点は$(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ であるから，その概形は次の図のようになる。

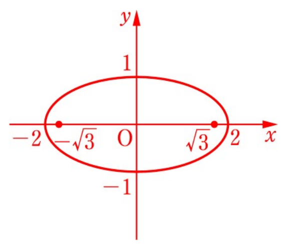


(2)　$x^2+4y^2=4$

$x^2+4y^2=4$ より　　$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

楕円 $x^2+4y^2=4$ の頂点は $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$ である。

また，$\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ より，焦点は$(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$ であるから，その概形は次の図のようになる。



例 4 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とし，2 点からの距離の和が 10 である楕円の方程式を求めてみよう。

求める方程式を $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ とおくと　（　$2a=10$，$\sqrt{a^2-b^2}=4$　）

よって，（　$a=5$，$b=3$　）であるから，その方程式は　（　$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　）

問 6 2 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を焦点とし，2 点からの距離の和が 6 である楕円の方程式を求めよ。

求める方程式を $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$とおくと

$2a=6,\qquad \sqrt{a^2-b^2}=2$

よって，$a=3$，$b=\sqrt{5}$ であるから，その方程式は

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1}$$

y 軸上に焦点をもつ楕円

（教科書 p.10）

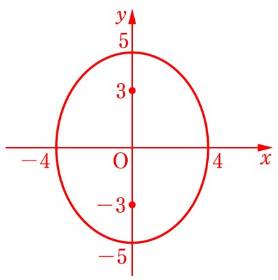
問 7 次の楕円の頂点，焦点を求め，その概形をかけ。また，長軸，短軸の長さを求めよ。

(1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ の頂点は $(\mathbf{4},\ \mathbf{0})$，$(\mathbf{-4},\ \mathbf{0})$，$(\mathbf{0},\ \mathbf{5})$，$(\mathbf{0},\ \mathbf{-5})$である。

$\sqrt{25-16}=3$ より，焦点は $(\mathbf{0},\ \mathbf{3})$，$(\mathbf{0},\ \mathbf{-3})$

長軸の長さは 10，短軸の長さは 8

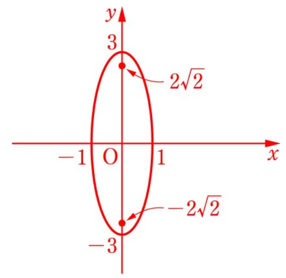


(2) $x^2+\frac{y^2}{9}=1$

楕円 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ の頂点は $(\mathbf{1},\ \mathbf{0})$，$(\mathbf{-1},\ \mathbf{0})$，$(\mathbf{0},\ \mathbf{3})$，$(\mathbf{0},\ \mathbf{-3})$ である。

$\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$ より，焦点は $\left(\mathbf{0},\ \mathbf{2\sqrt{2}}\right)$，$\left(\mathbf{0},\ \mathbf{-2\sqrt{2}}\right)$

長軸の長さは 6，短軸の長さは 2



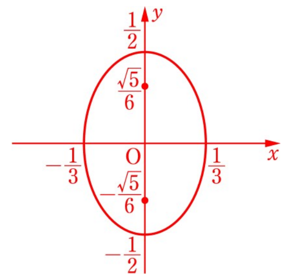
(3) $9x^2+4y^2=1$

$9x^2+4y^2=1$ より $\quad \frac{x^2}{\frac{1}{9}}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$

楕円 $9x^2+4y^2=1$ の頂点は $\left(\mathbf{\frac{1}{3}},\ \mathbf{0}\right)$，$\left(\mathbf{-\frac{1}{3}},\ \mathbf{0}\right)$，$\left(\mathbf{0},\ \mathbf{\frac{1}{2}}\right)$，$\left(\mathbf{0},\ \mathbf{-\frac{1}{2}}\right)$ である。

$\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{6}$ より，焦点は $\left(\mathbf{0},\ \mathbf{\frac{\sqrt{5}}{6}}\right)$，$\left(\mathbf{0},\ \mathbf{-\frac{\sqrt{5}}{6}}\right)$

長軸の長さは 1，短軸の長さは $\frac{2}{3}$



円と楕円

（教科書 p.10）

例題 1　円 $x^2+y^2=25$ を x 軸を基準にして y 軸方向に $\frac{3}{5}$ 倍して得られる図形は，どのような曲線か。

解　円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $\mathrm{P}(u,\ v)$ が点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ に移るとする。

$$x=u,\qquad y=\frac{3}{5}v$$

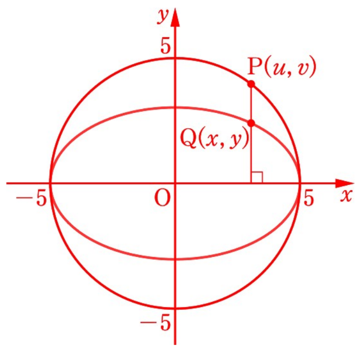
よって　$u=x,\ v=\frac{5}{3}y$

$u^2+v^2=25$ であるから

$$x^2+\left(\frac{5}{3}y\right)^2=25$$

すなわち　$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

ゆえに，求める曲線は，楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ である。



問 8　円 $x^2+y^2=36$ を x 軸を基準にして y 軸方向に $\frac{2}{3}$ 倍して得られる図形は，どのような曲線か。

円 $x^2+y^2=36$ 上の点 $\mathrm{P}(u,\ v)$ が点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$に移るとする。

$$x=u,\qquad y=\frac{2}{3}v$$

よって　$u=x,\ v=\frac{3}{2}y$

$u^2+v^2=36$ であるから

$$x^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2=36$$

すなわち　$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

ゆえに，求める曲線は，**楕円 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$** である。

軌跡と楕円

（教科書 p.11）

応用例題 2　長さ 7 の線分 PQ がある。点 P が x 軸上，点 Q が y 軸上を動くとき，PQ を 3 : 4 に内分する点 R の軌跡を求めよ。

解　2 点 P，Q の座標をそれぞれ $(u,\ 0)$，$(0,\ v)$ とする。

PQ = 7 より

$u^2+v^2=7^2$　……①

点 R の座標を $(x,\ y)$ とすると R は線分 PQ を 3 : 4 に内分するから

$$x=\frac{4}{7}u,\qquad y=\frac{3}{7}v$$

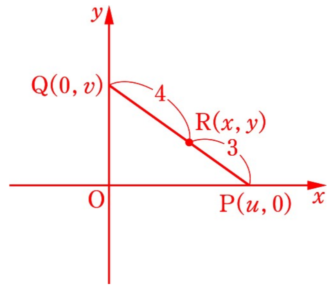
よって　$u=\frac{7}{4}x,\ v=\frac{7}{3}y$

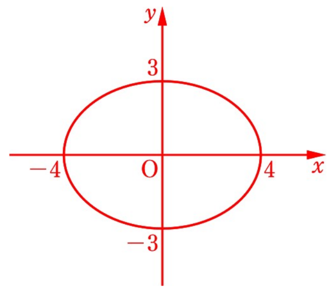
これらを①に代入して整理すると

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

したがって，点 R の軌跡は

楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ である。





問 9　長さ 5 の線分 PQ がある。点 P が x 軸上，点 Q が y 軸上を動くとき，PQ を 3 : 2 に内分する点 R の軌跡を求めよ。

2 点 P，Q の座標をそれぞれ $(u,\ 0)$，$(0,\ v)$とする。PQ = 5 より

$u^2+v^2=5^2$　……①

点 R の座標を $(x,\ y)$ とするとR は線分 PQ を 3 : 2 に内分するから

$x=\frac{2}{5}u,\ y=\frac{3}{5}v$

よって　$u=\frac{5}{2}x,\ v=\frac{5}{3}y$

これらを①に代入して整理すると

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

したがって，点 R の軌跡は

楕円 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$である。

3 双曲線

（教科書 p.12）

平面上で，“2 定点 F，F′ からの距離の差が一定である点 P の軌跡” を（⑮　双曲線　）といい，点 F，F′ をその（⑯　焦点　）という。

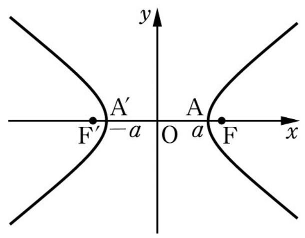
双曲線の方程式

（教科書 p.12）

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

①を双曲線の方程式の（⑰　標準形　）という。

双曲線①と x 軸との 2 つの交点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{A}'(-a,\ 0)$ を双曲線の（⑱　頂点　）といい，直線 AA′ を（⑲　主軸　）という。また，双曲線①は x 軸，y 軸，原点 O に関して対称である。この O を双曲線の（⑳　中心　）という。



双曲線の性質

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ について

焦点　$\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$，$\mathrm{F}'\left(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$

双曲線上の点 P について　$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF}'|=2a$

例 5 双曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ の頂点と焦点を求めてみよう。

頂点は（　$(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$　）で，$\sqrt{16+9}=5$ より，

焦点は（　$(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$　）である。

問 10 次の双曲線の頂点と焦点を求めよ。

(1) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

頂点は $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ で，$\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ より，焦点は $(\sqrt{13},\ 0)$，$(-\sqrt{13},\ 0)$ である。

(2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

頂点は $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$ で，$\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$ より，焦点は $(\sqrt{41},\ 0)$，$(-\sqrt{41},\ 0)$ である。

例 6 2 点 $(4,\ 0)$，$(-4,\ 0)$ を焦点とし，2 点からの距離の差が 6 である双曲線の方程式を求めてみよう。

求める方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ とおくと

（　$2a=6,\ \sqrt{a^2+b^2}=4$　）

よって，（　$a=3,\ b=\sqrt{7}$　）であるから，その方程式は（　$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$　）

問 11 2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ からの距離の差が 4 である双曲線の方程式を求めよ。

求める方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$とおくと　$2a=4,\ \sqrt{a^2+b^2}=3$

よって，$a=2,\ b=\sqrt{5}$であるから，その方程式は　$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

問 12 焦点が $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$，頂点間の距離が 8 である双曲線の方程式を求めよ。

求める方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$とおくと　$2a=8,\ \sqrt{a^2+b^2}=5$

よって，$a=4,\ b=3$ であるから，その方程式は　$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

漸近線

（教科書 p.14）

双曲線

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$　　…… ①

に対して，2 直線 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$ を双曲線①の（㉑　　漸近線　　）という。

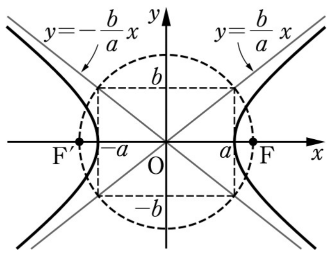
双曲線の漸近線

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$(a>0,\ b>0)$

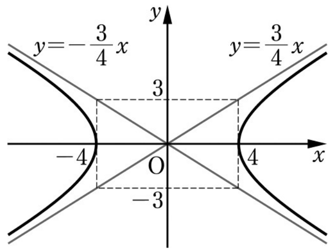
の漸近線は

$\boldsymbol{y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x}$



例 7 教科書 13 ページの例 5 の双曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ について，漸近線は

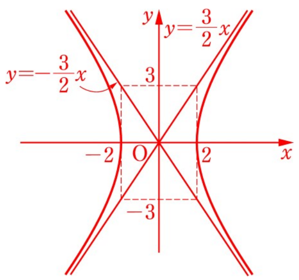
（　$y=\frac{3}{4}x,\ y=-\frac{3}{4}x$　）であり，その概形は右の図のようになる。



問 13 次の双曲線について，漸近線を求め，その概形をかけ。

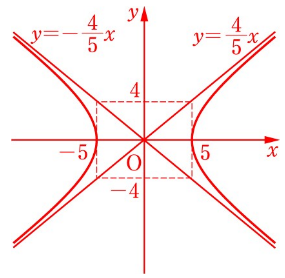
(1)　$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

漸近線は $\boldsymbol{y=\pm\frac{3}{2}x}$ であり，その概形は次の図のようになる。



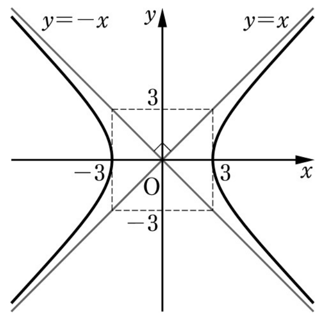
(2)　$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

漸近線は $\boldsymbol{y=\pm\frac{4}{5}x}$ であり，その概形は次の図のようになる。



双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ において，$a=b$ ならば，2 つの漸近線は $y=x$, $y=-x$ となり，これらは直交する。2 つの漸近線が直交する双曲線を（㉒　　直角双曲線　　）という。

例 8 双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ は（　　直角双曲線　　）である。



問 14 2 点 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$ を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ。

求める直角双曲線の方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$

$(a>0)$ とおくと　　$\sqrt{a^2+a^2}=4$

よって，$a=2\sqrt{2}$ であるから，その方程式は

$\boldsymbol{\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1}$

y 軸上に焦点をもつ双曲線

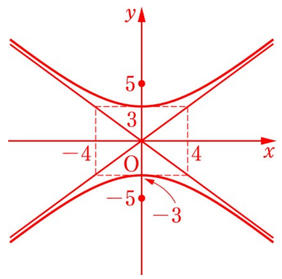
（教科書 p.16）

問 15 次の双曲線の頂点と焦点および漸近線を求め，その概形をかけ。

(1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$

頂点は $(\mathbf{0},\ \mathbf{3})$，$(\mathbf{0},\ -\mathbf{3})$ で，$\sqrt{16+9}=5$ より，焦点は $(\mathbf{0},\ \mathbf{5})$，$(\mathbf{0},\ -\mathbf{5})$ である。

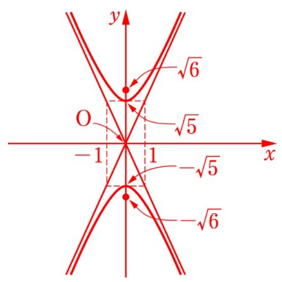
漸近線は $\boldsymbol{y=\pm\frac{3}{4}x}$ であり，その概形は次の図のようになる。



(2) $x^2-\frac{y^2}{5}=-1$

頂点は $(\mathbf{0},\ \sqrt{\mathbf{5}})$，$(\mathbf{0},\ -\sqrt{\mathbf{5}})$ で，$\sqrt{1+5}=\sqrt{6}$ より，焦点は $(\mathbf{0},\ \sqrt{\mathbf{6}})$，$(\mathbf{0},\ -\sqrt{\mathbf{6}})$ である。

漸近線は $\boldsymbol{y=\pm\sqrt{5}x}$ であり，その概形は次の図のようになる。

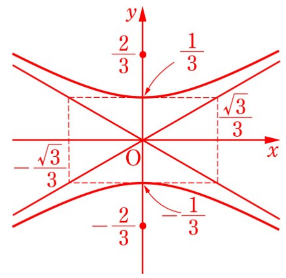


(3) $3x^2-9y^2=-1$

$3x^2-9y^2=-1$ より $\frac{x^2}{\frac{1}{3}}-\frac{y^2}{\frac{1}{9}}=-1$

頂点は $\left(\mathbf{0},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$，$\left(\mathbf{0},\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$ で，$\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}$ より，焦点は $\left(\mathbf{0},\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$，$\left(\mathbf{0},\ -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)$ である。

漸近線は $\boldsymbol{y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x}$ であり，その概形は次の図のようになる。



双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$ は，いずれも x，y についての 2 次方程式で表されている。これらの曲線をまとめて（㉓　**2 次曲線**　）という。

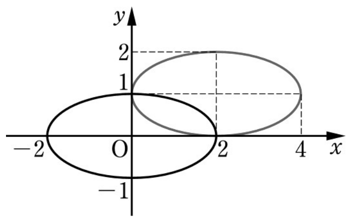
4　2 次曲線の平行移動　　　　（教科書 p.17）

曲線の平行移動
曲線 $f(x,\ y)=0$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して得られる曲線の方程式は $\boldsymbol{f(x-p,\ y-q)=0}$

例 9　楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$　…… ①

を x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した楕円の方程式は

（ $\dfrac{(x-2)^2}{4}+(y-1)^2=1$ ）…… ②



また，$\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ より，楕円①の焦点は
（ $(\sqrt{3},\ 0),\ (-\sqrt{3},\ 0)$ ）であるから，楕円②の焦点は，楕円①の焦点を x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ移動した（ $(2+\sqrt{3},\ 1),\ (2-\sqrt{3},\ 1)$ ）である。

問 16　次の曲線を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した曲線の方程式を求めよ。また，その焦点を求めよ。

(1)　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ ……①を x 軸方向に1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した楕円の方程式は

$\boldsymbol{\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{5}=1}$　……②

また，$\sqrt{9-5}=2$ より，楕円①の焦点は$(2,\ 0),\ (-2,\ 0)$ であるから，楕円②の焦点は，楕円①の焦点を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ移動した $\boldsymbol{(3,\ -2)},\boldsymbol{(-1,\ -2)}$である。

(2)　$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$ ……①を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した双曲線の方程式は

$\boldsymbol{\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=1}$　……②

また，$\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ より，双曲線①の焦点は $(\sqrt{13},\ 0),\ (-\sqrt{13},\ 0)$ であるから，双曲線②の焦点は，双曲線①の焦点を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ移動した$\boldsymbol{(1+\sqrt{13},\ -2)}$，$\boldsymbol{(1-\sqrt{13},\ -2)}$ である。

例題 3　方程式 $y^2-4x-4y=0$ の表す図形は放物線であることを示し，その焦点と準線を求めよ。

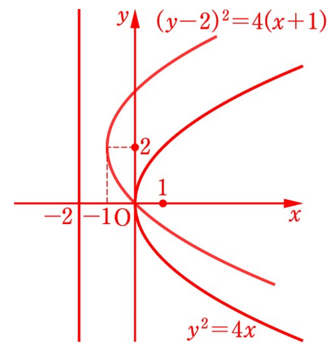
解　この方程式は

$(y-2)^2=4(x+1)$ …… ①

と変形される。

よって，この方程式は放物線 $y^2=4x$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線を表す。

また，放物線 $y^2=4x$ の焦点は $(1,\ 0)$，準線は $x=-1$ であるから，放物線①の焦点は $(0,\ 2)$，準線は $x=-2$ である。



問 17　次の放物線の焦点と準線を求めよ。

(1)　$y^2+4x-2y=0$

方程式 $y^2+4x-2y=0$ は

$(y-1)^2=-4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$　……①

と変形される。

よって，この方程式は放物線 $y^2=-4x$ を x 軸方向に $\frac{1}{4}$，y 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線を表す。

また，放物線 $y^2=-4x$ の焦点は $(-1,\ 0)$，準線は $x=1$ であるから，放物線①の

焦点は $\left(-\frac{3}{4},\ 1\right)$，準線は $x=\frac{5}{4}$

である。

(2)　$y^2+y=x$

方程式 $y^2+y=x$ は

$\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=x+\dfrac{1}{4}$　……①

と変形される。

よって，この方程式は放物線 $y^2=x$ を x軸方向に $-\frac{1}{4}$，y 軸方向に $-\frac{1}{2}$ だけ平行移動した放物線を表す。

また，放物線 $y^2=x$ の焦点は $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$，準線は $x=-\frac{1}{4}$ であるから，放物線①の

焦点は $\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$，準線は $x=-\frac{1}{2}$

である。

例題 4　次の方程式はどのような図形を表すか。また，その概形をかけ。

(1)　$9x^2+4y^2+18x-16y-11=0$

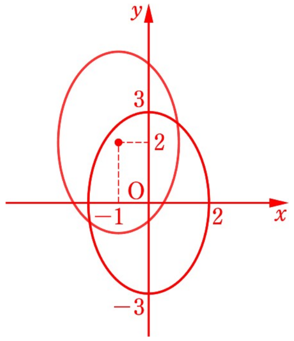
(2)　$x^2-2y^2-4y=10$

解　(1)　方程式を変形すると

$$9(x+1)^2+4(y-2)^2=36$$

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

よって，この方程式は楕円 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した楕円を表す。
その概形は右の図のようになる。



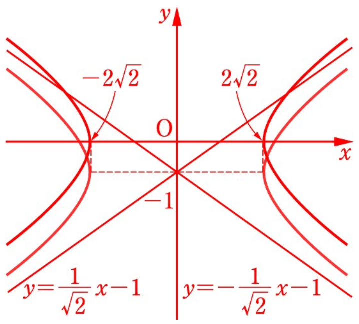
(2)　方程式を変形すると

$$x^2-2(y+1)^2=8$$

$$\frac{x^2}{8}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

よって，この方程式は双曲線 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$ を y 軸方向に -1 だけ平行移動した双曲線を表す。

この双曲線の漸近線は $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x-1$ で，その概形は右の図のようになる。



問 18　次の方程式はどのような図形を表すか。また，その概形をかけ。

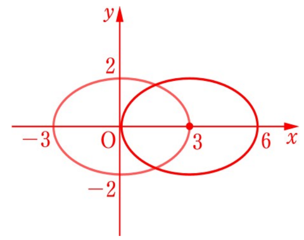
(1)　$4x^2+9y^2=24x$

方程式 $4x^2+9y^2=24x$ を変形すると

$$4(x-3)^2+9y^2=36$$

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

よって，この方程式は楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ をx 軸方向に 3 だけ平行移動した楕円を表す。
その概形は次の図のようになる。



(2)　$5x^2-4y^2+10x+16y=-9$

方程式 $5x^2-4y^2+10x+16y=-9$を変形すると

$$5(x+1)^2-4(y-2)^2=-20$$

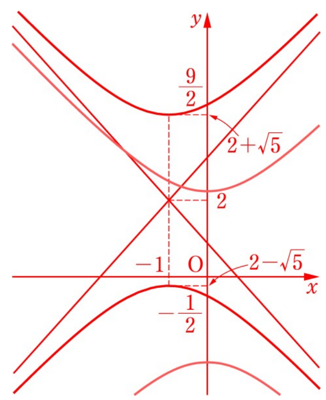
$$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{5}=-1$$

よって，この方程式は双曲線$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=-1$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線を表す。
この双曲線の漸近線は

$$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2}+2,$$

$$y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x-\frac{\sqrt{5}}{2}+2$$

で，その概形は次の図のようになる。



5　2 次曲線と直線

（教科書 p.20）

例題 5　楕円 $4x^2+y^2=8$ と直線 $y=2x+k$ の共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

解　楕円と直線の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} 4x^2+y^2=8 & \cdots\cdots ① \\ y=2x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

の実数解であるから，その個数を調べればよい。

①，②から y を消去して

$$4x^2+(2x+k)^2=8$$

ゆえに　$8x^2+4kx+k^2-8=0$　…… ③

2 次方程式③の実数解が楕円と直線の共有点の x 座標である。

③の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-8(k^2-8)=-4(k^2-16)$$

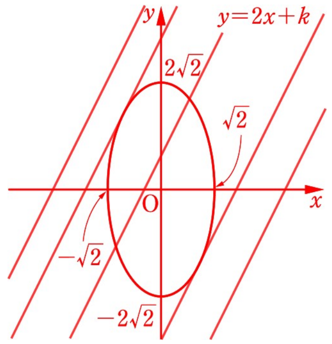
$$=-4(k+4)(k-4)$$

共有点の個数は，③の異なる実数解の個数と一致するから

$D>0$　すなわち　$-4<k<4$ のとき　　共有点は 2 個

$D=0$　すなわち　$k=\pm4$ のとき　　共有点は 1 個

$D<0$　すなわち　$k<-4,\ 4<k$ のとき　　共有点なし



問 19　放物線 $y^2=-8x$ と直線 $y=-2x+k$ の共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

放物線と直線の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y^2=-8x & \cdots\cdots ① \\ y=-2x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

の実数解であるから，その個数を調べればよい。

①，②から y を消去して

$$(-2x+k)^2=-8x$$

ゆえに　$4x^2-4(k-2)x+k^2=0$　……③

2 次方程式③の実数解が放物線と直線の共有点の x 座標である。

③の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=4(k-2)^2-4k^2$$

$$=-16(k-1)$$

共有点の個数は，③の異なる実数解の個数と一致するから

$D>0$ すなわち $\boldsymbol{k<1}$ **のとき　共有点は 2 個**

$D=0$ すなわち $\boldsymbol{k=1}$ **のとき　共有点は 1 個**

$D<0$ すなわち $\boldsymbol{k>1}$ **のとき　共有点なし**

〔別解〕①，②から x を消去して

$$y^2-4y+4k=0$$

この y についての 2 次方程式の判別式を調べてもよい。

教科書 20 ページの例題 5 において，$D=0$ のとき共有点は 1 個で，これは $D>0$ のときの 2 個の共有点が重なったものと考えることができる。このとき，直線は楕円に（[24]　接する　）といい，その直線を楕円の（[25]　接線　），接線と楕円の共有点を（[26]　接点　）という。

例題 6　双曲線 $3x^2-y^2=-6$ と直線 $y=-x+k$ が接するように，定数 k の値を定めよ。

解

$$\begin{cases} 3x^2-y^2=-6 & \cdots\cdots ① \\ y=-x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①，②から y を消去して

$3x^2-(-x+k)^2=-6$

よって　$2x^2+2kx-(k^2-6)=0$　$\cdots\cdots$ ③

双曲線①と直線②が接するのは，2 次方程式③の判別式を D とすると，$D=0$ のときであるから

$\dfrac{D}{4}=k^2+2(k^2-6)=3(k^2-4)=0$

ゆえに　$k=\pm 2$

問 20　楕円 $2x^2+y^2=2$ と直線 $y=mx+2$ が接するように，定数 m の値を定めよ。

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=2 & \cdots\cdots ① \\ y=mx+2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①，②から y を消去して

$2x^2+(mx+2)^2=2$

よって　$(m^2+2)x^2+4mx+2=0$　$\cdots\cdots$③

楕円①と直線②が接するのは，2 次方程式③の判別式を D とすると，$D=0$ のときであるから

$\dfrac{D}{4}=4m^2-2(m^2+2)$

$=2(m^2-2)=0$

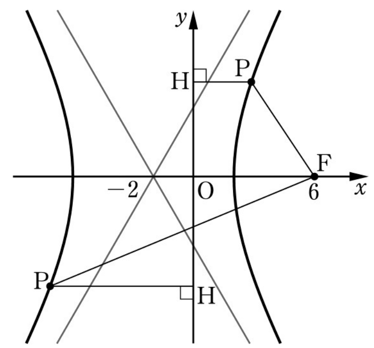
ゆえに　$\boldsymbol{m=\pm\sqrt{2}}$

6　2 次曲線と離心率

（教科書 p.22）

例 10　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，定点 $\mathrm{F}(6,\ 0)$ からの距離 PF と y 軸からの距離 PH の比の値を $e=\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PH}}$ とおく。

$e=2$ のときの点 P の軌跡を求めてみよう。



$\mathrm{PF}=$　$\sqrt{(x-6)^2+y^2}$

$\mathrm{PH}=$　$|x|$

$\mathrm{PF}=2\mathrm{PH}$ より

（　$\sqrt{(x-6)^2+y^2}=2|x|$　）

両辺を 2 乗して

$(x-6)^2+y^2=4x^2$

整理して変形すると

（　$\frac{(x+2)^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$　）　$\cdots\cdots$ ①

これは，双曲線

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$　$\cdots\cdots$ ②

を x 軸方向に（　-2　）だけ平行移動した双曲線を表している。

また，双曲線②の焦点は $(8,\ 0)$，$(-8,\ 0)$ であるから，双曲線①の焦点は（　$(6,\ 0)$，$(-10,\ 0)$　）である。

問 21　例 10 において，次の場合の点Pの軌跡を求めよ。

(1)　$e=\frac{1}{2}$

$\mathrm{PF}=\frac{1}{2}\mathrm{PH}$ より

$\sqrt{(x-6)^2+y^2}=\dfrac{1}{2}|x|$

両辺を 2 乗して

$(x-6)^2+y^2=\dfrac{1}{4}x^2$

整理して変形すると

$\dfrac{(x-8)^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$

これは，楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ を x 軸方向に 8だけ平行移動した楕円を表している。

⑵　$e=1$

PF = PH より

$\sqrt{(x-6)^2+y^2}=|x|$

両辺を 2 乗して

$(x-6)^2+y^2=x^2$

整理して変形すると

$y^2=12(x-3)$

これは，放物線 $y^2=12x$ を x 軸方向に3 だけ平行移動した放物線を表している。

一般に，定点 F からの距離 PF と定直線 l からの距離 PH の比の値 e が一定である点 P の軌跡は，F を 1 つの焦点とする 2 次曲線であり

$0<e<1$ のとき　　楕円

$e=1$ のとき　　放物線

$e>1$ のとき　　双曲線

であることが知られている。この e の値を，2 次曲線の（㉗　離心率　）といい，直線 l を（㉘　準線　）という。

例 11 点 F(3, 0) からの距離と y 軸からの距離の比の値が e である点を P(x, y) とするとき，e の値によって点 P の軌跡がどのようになるかを調べてみよう。

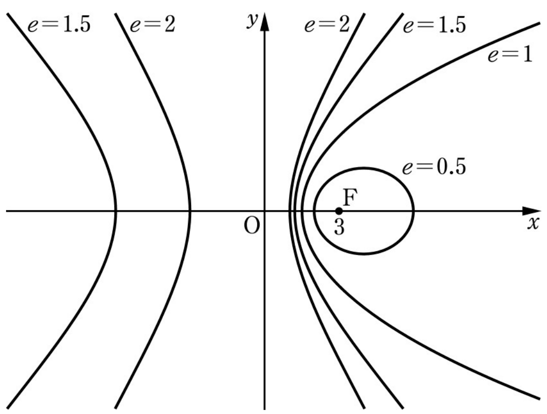
条件より　　（ $\sqrt{(x-3)^2+y^2}=e|x|$ ）

両辺を 2 乗して　　$(x-3)^2+y^2=e^2x^2$

これを整理すると

（ $y^2=(e^2-1)x^2+6x-9$ ）　…… ①

①に，$e=0.5$，$e=1$，$e=1.5$，$e=2$ を代入し，それぞれの表す 2 次曲線の概形をかくと，下の図のようになる。



問 22 点 (0, 1) からの距離と直線 $y=4$ からの距離の比の値が 2 である点 P の軌跡を求めよ。

点 P の座標を (x, y) とする。

条件より　$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2|y-4|$

両辺を 2 乗して

$x^2+(y-1)^2=4(y-4)^2$

これを整理すると

$\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{(y-5)^2}{4}=-1$

これは，双曲線 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=-1$ を y 軸方向に5 だけ平行移動した双曲線を表す。

参 考　円錐曲線

（教科書 p.24）

1 つの直線 l と 1 点 O で交わる直線 l' が l のまわりに空間内で回転するとき，l' のえがく面を円錐面という。l をその円錐面の（㉙　軸　），O を（㉚　頂点　），l' を（㉛　母線　）という。

2 次曲線は平面による円錐面の切り口としても現れることが知られている。そのため，2 次曲線は（㉜　円錐曲線　）ともよばれる。

参 考　2 次曲線の接線の方程式

（教科書 p.25）

点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ は楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上にあるから，$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}$ の式の右辺は 1 に等しい。

よって，求める接線の方程式は　（㉝　$\boldsymbol{\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1}$　）

この式は $y_1=0$ のときにも成り立つ。

同様にして，曲線上の点 $(x_1,\ y_1)$ における

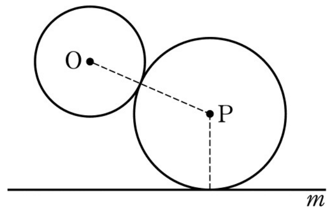
双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ の接線の方程式は　（㉞　$\boldsymbol{\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1}$　）

放物線 $y^2=4px$ の接線の方程式は　（㉟　$\boldsymbol{y_1y=2p(x+x_1)}$　）

問 題

（教科書 p.26）

1　定円 O と，この円に交わらない定直線 m がある。円 O に外接し，直線 m に接する円の中心 P の軌跡は放物線であることを示せ。

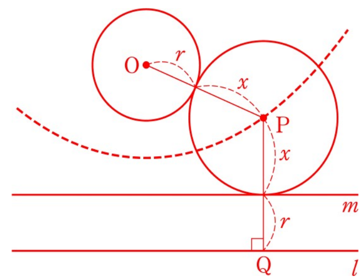


定円 O と円Pの半径をそれぞれ r，x とし，直線 m に関して円 O と反対側に m との距離が r となるように直線 l をとる。点 P を通り直線 m に垂直な直線と直線 l との交点を Q とすると

$\mathrm{PO}=x+r$，$\mathrm{PQ}=x+r$

であるから，つねに PO = PQ となる。

よって，点 P の軌跡は，点 O を焦点，直線l を準線とする放物線である。



2　次の条件を満たす楕円の方程式を求めよ。

求める楕円の方程式を$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　$(a>0,\ b>0)$とする。

(1)　2 点 $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$ からの距離の和が 10 である。

2 点 $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$ からの距離の和が一定であることから，この 2 点は楕円の焦点である。

$2b=10,\ \sqrt{b^2-a^2}=3$

よって，$a=4,\ b=5$ であるから，求める方程式は　$\boldsymbol{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1}$

(2)　焦点が $(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$ で，点 $(3,\ 0)$ を通る。

点 $(3,\ 0)$ を通るから　　$a=3$

焦点の y 座標について　　$\sqrt{b^2-a^2}=2$

よって，$a=3,\ b=\sqrt{13}$ であるから，求める方程式は　$\boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{13}=1}$

(3)　焦点が $\left(\sqrt{2},\ 0\right)$，$\left(-\sqrt{2},\ 0\right)$ で，点 $\left(\sqrt{3},\ \sqrt{2}\right)$ を通る。

点 $\left(\sqrt{3},\ \sqrt{2}\right)$ を通るから

$\frac{3}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$　　……①

焦点の x 座標について，$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$ より

$a^2=b^2+2$　　……②

②を①に代入して整理すると

$(b^2-4)(b^2+1)=0$

$b^2>0$より　　$b^2=4$

②より　　$a^2=4+2=6$

よって，$a=\sqrt{6},\ b=2$ であるから，求める方程式は　$\boldsymbol{\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1}$

3　長さ 2 の線分 PQ があり，点 P が x 軸上，点 Q が y 軸上を動くとき，PQ を 3 : 5 に外分する点 R の軌跡を求めよ。

2 点P，Qの座標をそれぞれ $(u,\ 0)$，$(0,\ v)$ とする。$PQ=2$より

$u^2+v^2=2^2$　　……①

点 R の座標を $(x,\ y)$ とすると R は線分 PQ を3 : 5 に外分するから

$x=\frac{5}{2}u,\ y=-\frac{3}{2}v$

よって　　$u=\frac{2}{5}x,\ v=-\frac{2}{3}y$

これらを①に代入して整理すると

$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$

したがって，点 R の軌跡は楕円 $\boldsymbol{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1}$ である。

4　原点を中心とし，x 軸または y 軸を主軸とする双曲線のうち，次の条件を満たすものの方程式を求めよ。

(1)　2 点 $\left(\sqrt{2},\ 2\right)$，$\left(-\sqrt{5},\ -4\right)$ を通る。

求める双曲線の方程式を $Ax^2-By^2=1$とする。2 点 $\left(\sqrt{2},\ 2\right)$，$\left(-\sqrt{5},\ -4\right)$ を通るから

$2A-4B=1$，　$5A-16B=1$

よって，$A=1,\ B=\frac{1}{4}$ であるから，求める方程式は

$\boldsymbol{x^2-\frac{y^2}{4}=1}$

(2)　点 $(0,\ -2)$ を頂点とし，$y=x$を漸近線とする。

求める双曲線の方程式を $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ $(a>0,\ b>0)$ とする。

点 $(0,\ -2)$ が頂点であるから

$b=2$

また，漸近線が $y=x$ であるから

$\frac{b}{a}=1$

よって，$a=2,\ b=2$ であるから，求める方程式は

$\boldsymbol{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=-1}$

5　次の 2 次曲線を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した曲線の方程式を求めよ。また，焦点を求めよ。

（1）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$　……①

を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した楕円の方程式は

$\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$　……②

また，$\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ より，楕円①の焦点は $(0,\ \sqrt{7})$，$(0,\ -\sqrt{7})$ であるから，楕円②の焦点は，楕円①の焦点を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ移動した $(-1,\ 2+\sqrt{7})$，$(-1,\ 2-\sqrt{7})$ である。

（2）$y^2=6x$

放物線 $y^2=6x$　……①

を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線の方程式は

$(y-2)^2=6(x+1)$　……②

また，$y^2=6x=4\cdot\frac{3}{2}x$ より，放物線①の焦点は $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ であるから，放物線②の焦点は，放物線①の焦点を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ移動した $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$ である。

（3）$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=-1$

双曲線 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=-1$　……①

を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線の方程式は

$\frac{(x+1)^2}{3}-\frac{(y-2)^2}{5}=-1$　……②

また，$\sqrt{3+5}=2\sqrt{2}$ より，双曲線①の焦点は $(0,\ 2\sqrt{2})$，$(0,\ -2\sqrt{2})$ であるから，双曲線②の焦点は，双曲線①の焦点を x 軸方向に-1，y 軸方向に 2 だけ移動した

$(-1,\ 2+2\sqrt{2})$，$(-1,\ 2-2\sqrt{2})$ である。

6　次の方程式で表される 2 次曲線の概形をかき，焦点を求めよ。

（1）$2(x-1)^2+(y+1)^2=2$

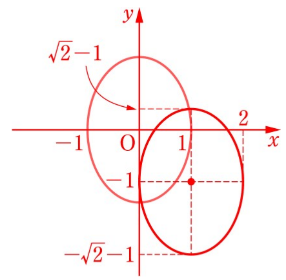
方程式を変形すると

$2(x-1)^2+(y+1)^2=2$

$(x-1)^2+\frac{(y+1)^2}{2}=1$　……①

よって，この方程式は楕円 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ ……②を x 軸方向に 1，y 軸方向に -1 だけ平行移動した楕円を表す。

また，$\sqrt{2-1}=1$ より，楕円②の焦点は$(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$ であるから，楕円①の焦点は，楕円②の焦点を x 軸方向に 1，y 軸方向に -1だけ移動した $(1,\ 0)$，$(1,\ -2)$ で，その概形は次のようになる。



（2）$x^2-y^2+4y+5=0$

方程式を変形すると

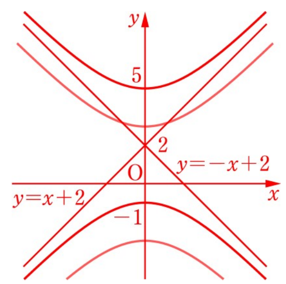
$x^2-y^2+4y+5=0$

$x^2-(y-2)^2=-9$

$\frac{x^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{9}=-1$　……①

よって，この方程式は双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=-1$ ……②を y 軸方向に 2 だけ平行移動した双曲線を表す。

また，$\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$ より，双曲線②の焦点は $(0,\ 3\sqrt{2})$，$(0,\ -3\sqrt{2})$ であるから，双曲線①の焦点は，双曲線②の焦点を y 軸方向に 2 だけ移動した $(0,\ 2+3\sqrt{2})$，$(0,\ 2-3\sqrt{2})$で，その概形は次のようになる。



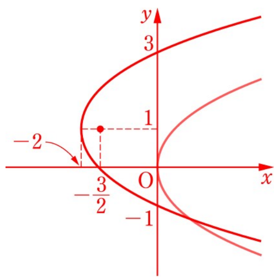
(3)　$y^2-2x-2y=3$

方程式を変形すると

$y^2-2x-2y=3$

$(y-1)^2=2(x+2)$　　……①

よって，この方程式は放物線 $y^2=2x$ ……②を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線を表す。また，$y^2=2x=4\cdot\frac{1}{2}x$より，放物線②の焦点は $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ であるから，放物線①の焦点は，放物線②の焦点を x 軸方向に-2，y 軸方向に 1 だけ移動した $\left(-\frac{3}{2},\ 1\right)$で，その概形は次のようになる。



7　双曲線 $x^2-3y^2=3$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

双曲線 $x^2-3y^2=3$ と直線 $y=x+k$ の共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} x^2-3y^2=3 & \cdots\cdots① \\ y=x+k & \cdots\cdots② \end{cases}$$

の実数解であるから，その個数を調べればよい。

②を①に代入して　　$x^2-3(x+k)^2=3$

ゆえに　$2x^2+6kx+3k^2+3=0$　……③

2 次方程式③の実数解が共有点の x 座標である。

③の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=9k^2-2(3k^2+3)=3(k^2-2)$$

共有点の個数は，③の異なる実数解の個数と一致するから

$D>0$　すなわち　$k<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<k$ のとき　**2 個**

$D=0$　すなわち　$k=\pm\sqrt{2}$ のとき　**1 個**

$D<0$　すなわち　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ のとき　なし