東数協 中高部会

月例研レポート集

２０２１年１２月

目次

次回のリモート月例研を 12/11（土）の 2:30 ～ 5:00 に実施します。その後は、3/19 です（第何土曜日と固定するのではなく、第 1,1,2,3,4,4,3,2,1,1,2,3 と順繰りにします）。1 月は新春講座が 1/23（日）に開催し、2 月は全国春の研究大会が 2/6（日）にあるので、月例研は行いません。ただ、月例研レポート集は、1 月号は休んで 2 月号、3 月号と出していきたいと思います。まとめて 3 月の月例研での発表になります。

また、長崎県ではオンライン県大会が 1/16（日）に行います。以前、添付ファイルでお送りました。

2021 年はオンラインで全国大会を行いましたが、2022 年は 8/6（土）～ 8/8（月）に盛岡の岩手大学を会場として行う計画が動き出しました。新型コロナの状況によってはオンラインになるかも知れませんが、来年は対面での大会を行おうと動き出しました。

こちらでメールアドレスを把握していない方には、リモート月例研の案内が出来ません。そこで、郵送で『月例研レポート集』を送っている方は、草彅にメールアドレスを教えていただけませんでしょうか。
＜ k_kusanagi@ac.cyberhome.ne.jp ＞に空メールを送って下さい。

この 12 月の『月例研レポート集』を見て、ご意見などがある場合は、
＜ k_kusanagi@ac.cyberhome.ne.jp ＞に PDF 形式で送って下さい。それを次回のレポート集に掲載致します。e-mail をお持ち出ない方は郵便でも構いません。

次回のレポートを募集します。締め切りは 1/31（月）とし、レポート集は 2 月 7 日（月）までに配信します。

『近代の数学』の要約（「数学は変貌する」遠山啓著　国土社より）

デカルトと『方法序説』

　数学の中で本当の近代的な考え方が明瞭に打ち出されたのは、デカルト（フランス、1596~1650）からです。もちろん、そういった一人の人間が出し抜けに偉いことをしたのではなく、デカルト以前にたくさんの人がいろいろな準備をして、そこから新しい人がはっきりとそういうことを述べるという形をとりました。それがデカルトであり、デカルトで新しい数学の考え方が生まれてきました。

　デカルトの数学は『幾何学』（きかがく。図形の性質を研究する学問）という名前をもっています。これは１７世紀の始まりに出ました。この本はデカルトの『方法序説』という本の付録として書かれたものです。学問の歴史の中では極めて重要なものです。また哲学の歴史の中でも近代の哲学の開祖のようなものです。

　この「方法」というのは学問の研究方法です。当時の哲学というのは、あらゆる学問、自然科学も数学もふくんだ学問を研究する、一般的方法を研究するという建前でした。当時の哲学は科学とたいへん密着していたのです。デカルトもそうです。デカルトは近代の哲学の開祖であると同時に第一流の数学者でもありました。

　この「方法序説」の中に４つの研究の方法というものを挙げています。

　第一は、「今までいろんな本が書かれ、偉い人といわれている人がいろんなことを言っているが、それは全部疑ってかかれ、それはウソかもしれない、まず、第一に疑え」ということが書いてあります。つまり自分が正しいと納得できないことは何も信ずるな、ということが第一に書いてある。
簡単にいえば、すべてをまず疑ってかかれということです。

　第二は、「難しいことでも、それを解決するために多数の小部分に分割することである」。簡単にいうと、分析することです。

　第三は、分析と反対の総合です。「小さい部分に分解したものを適当な方法で秩序立てて、結び付けてゆく」。簡単にいうと、総合していくことです。

第四は、「そして最後に全般にわたって、自分のやったことをもう一回見落としがないかと見ることである」。簡単にいうと、再検討です。
以上四つの法則を立てています。

そう考えると真理というものは当たり前のことで、特別難しいことではありません。しかし、普通の人はそのことになかなか気が付かないのです。確かに言われて見ると、なるほどと気が付くけれども、デカルトにこうはっきり言われるまではぼんやりとしか気が付いていないのです。普通の人がだれでも日常経験してしまうことでありながら、だれかがはっきり言うまでは意識しないような、こういうことを発見するのは、やはりデカルトのようなずば抜けた天才でないと出来ないのです。こういう考え方を数学に適用したのがデカルトの幾何学です。

座標と分析・総合

デカルトは、座標を考えだして、幾何学の考え方を一変しました。その点ではユークリッド（紀元前 300 年頃）の研究の仕方とはたいへん違います。ユークリッドは、ギリシア人が考えた幾何学の学問体系を作りました。その幾何学の考え方は、一般法則から特殊な事実を導き出す方法と運動をしりぞけ、動かないもの、静止しているものを研究する方法です。ユークリッドには座標はありませんが、デカルトは座標を使いました。それは大きな違いです。デカルト自身が、自分は自分の新しい幾何学を打ち立てるのにユークリッドからはほとんど何一つ借りてこなかったと言っています。デカルトの幾何学は解析幾何学とよばれ、ユークリッドの幾何学とは方法がまるで違います。

前に述べたように、できるだけ物事を小さい部分に分けるということも、解析幾何学では見事に実現しています。たとえば、平面上の点が、ｘ座標・ｙ座標二つの数の組で表せる、つまり縦と横に分けます。すなわち、できるだけ細かい部分に分けるという分析の方法が使われています。解析という言葉は普通の言葉でいうと「分析」です。

このように解析幾何学は点の位置から出発します。図形の中で最も簡単なのは点ですから、その点の位置を決めることから出発します。このように、

点の位置を縦と横に分けます。縦と横は数で表されます。ｘとｙというのは数で表されます。だから点の位置というものが二つの数の組で表されるから、幾何学が数の世界と結びつくのです。数の計算によって図形の性質を研究することが可能になりました。ユークリッドでは計算と言う手段はあんまり使いません。幾何は幾何としてやるほかはないのですが、デカルトになると、図形の研究が計算というたいへん強力な手段によって研究できるようになりました。

デカルトは、自分のやったことは代数（数の性質、数の関係、数の計算法則を研究する学問）で幾何をやることができるようにしたと言っています。幾何は目で見えて見通しはたいへんいいのですが、あまり細かいことはできません。逆に代数は、あまり見通しはよくないけれども、計算というたいへん精密な手段が使えます。つまり両方の長所と欠点を補うようにしたというようなことを言っています。つまり、そうすることによって代数と幾何が同じようなものになりました。二つのバラバラに離れていた学問の分野を結びつけました。これがデカルトのやったたいへん大きな功績であり、これが近代の数学の始まりとなりました。

変化と運動

もう一つ大事なことは、解析幾何学は座標を使うことによって、運動するもの、変化するものを実に見事にとらえることができます。たとえば、いろいろなものが変化するということは、グラフによっていちばんよくつかまえることができます。ユークリッドの幾何学ではそういうことはなかなかできませんでした。すなわちデカルトの幾何学が登場する以前は、運動と変化というものをしっかりと科学的につかまえることがなかなかできませんでした。だから物理学でも、あるいは力学でも静止しているものはある程度できましたが、運動するものは手がつきませんでした。力学でも静力学まではいったけれども、動力学、つまり動いているものの法則をつかまえるところまではゆきませんでした。ところがデカルトの幾何学によってそれが一挙に可能になりました。これが近代数学です。つまり近代数学は、中世の数学が静的であったのに対して動的になったということがいえます。これは大きな違いで

す。これは、数学の歴史とは限らず、もっと広くいって科学の中で画期的なことでした。それがまず何とつながっているかというと、それはいわゆるニュートン力学といわれているものを作り出す大きな支えになりました。

天動説から地動説へ

人間が世界を認識してゆく歴史の中でたいへん大きな事件は地動説です。人間が地球のごく狭いところで考えている間は、地球というものは動かないで、太陽が動いていると考えていました。これが天動説です。これは人間の素朴な感覚からいうと当然です。だれも、感覚的には、地面が動いているということはとらえられません。見た感じでは、太陽が動いているとしか思えません。それをひっくり返して、動かないと思っていた山も川もみんなたいへんな速度で動いているというのです。これはショッキングなことです。こういう地動説が人間の認識の中にはいってきたことは、大事件だったと思います。

われわれは子どものときから、こういうことは教わっているからあまり驚かないけれども、中世の人にとってはたいへんなショックであったと思います。だからこの地動説を唱えたコペルニクス（ポーランド、1473~1543）は、こういうことを公表するととんでもない目に逢うことがあるというので、恐れて、地動説を書いた自分の本は、自分が死んでから出版するように遺言しました。死んでからだと死刑にならないからです。ところが、コペルニクスのあとになって、これを堂々と唱えたジョルダーノ・ブルーノ（1548~1600）という人は焼き殺されました。けしからんことを言う奴だということです。

これは単なる天文学上の学説ではなくて、当時の中世の人たち全体の世界観を転覆することだったのです。このくらい常識に反しているショッキングなことはありません。こういうことになると当然、バイブル（聖書）の権威をそこなうことになるのです。

ガリレオと地動説

ブルーノが死んだあとで、ガリレオ（イタリア、1564~1642）が緻密な論理で地動説を展開しました。これは現在『天文対話』（岩波文庫）という本になっています。ガリレオという人は物理学者でしたが、文学的才能もありま

した。彼は天動説を唱えている人をあまりひどくやっつけたために、当時の人たちを怒らせたようです。ガリレオは宗教裁判にかけられました。その裁判では自分は間違っていたと言わざるをえませんでした。ガリレオは死刑にはなりませんでしたが、一生涯、自由に歩き回れないで、故郷の町から自由に出られないものとされました。しかし、ガリレオは、その時期を利用して、今度は『新科学対話』（岩波文庫）という本を書きました。これは、今日のニュートン力学の原則をはっきりと、見事に書いた本です。つまり、このことは地動説が中世の人の与えたショックが、いかに大きかったかということを表しています。

コペルニクスからブルーノ、ガリレオと、たくさんの人がたいへんな犠牲を払って作り上げた地動説を完成したのがニュートン（イギリス、1643~1727）です。ガリレオと、ドイツの天文学者で数学者であったケプラー（1571~1630）の二人の仕事を見事に統一して、ニュートン力学というものを作ったのです。ガリレオが『新科学対話』の中で展開したのは、地球上の物体の運動法則でしたが、これに対してケプラーのは、天体の運動法則でした。この二つを同一の原理によって統一したのがニュートンでした。

ガリレオが手製の望遠鏡で初めて月をのぞいて見たとき、たいへん驚きました。アリストテレス（紀元前 382~322）は地上の物質は雑多で汚らしいが、月から上にある天体はまるで違った上等の物質からできていると主張していましたし、誰もこの主張を疑う人はいませんでした。ところが望遠鏡で見ると月もやはり山あり谷ありで、地球と同じ状態らしいとガリレオは知りました。そこで、ガリレオは月も、あるいは宇宙全体も同じような物質でできているらしいと覚りました。この発見は、人間の世界認識の歴史において、まさに画期的な出来事でした。これはアポロの月面着陸などよりはるかに大きな意義を持っていたと言えます。しかし、さすがのガリレオも、地上の物体と天体とが同じ法則に支配されているというところまでは到達できませんでした。それを成し遂げたのがニュートンでした。そしてニュートンの武器となったのは微分積分という新しい数学でした。

ニュートン力学は、地動説がほとんど反論の余地がないほど完全に証明し

ました。ニュートンが太陽系の運動法則を証明するのに使ったのがここにいう微分積分学です。微分積分学は、ニュートンの力学を証明する手段として生まれてきたと言っても過言ではないくらい物理学や力学と密接な関係を持っていたのです。

微分と積分

微分積分というのは何か？簡単に言いますと、その方法はデカルトの四つの法則の中の、二番目と三番目にあたります。つまり二番目の法則は、複雑なものを研究するときには、できるだけ細かい部分に分けると物事は簡単になると言っています。これは分析です。もう一回読んでみますと、「難しいことでも、それを解決するために多数の小部分に分割することである」。これが微分にあたります。微分という言葉そのものが、字の通り細かく分けるということです。

次の第三の法則が、積分にあたります。いったん細かく分けたものをもう一度つなぎ合わせることです。微分は分析にあたり、積分は総合にあたります。積分という言葉も分けたものを積み重ねるという意味ですから、たいへん上手い言葉です。

たとえば、曲線があるとします。このまま見れば曲がっていますが、細かく分けて一部分だけ見ますと次第に真直ぐに近くなります。細かく分ければ分けるほど直線に近くなります。曲線はたいへん複雑で難しいですが、直線だとたいへん簡単です。細かく分ければ分けるほど、簡単な直線に近づくというアイデアが微分のもとです。曲線を仮に一部分だけ虫めがねで見ると真直ぐに近くなります。さらに顕微鏡のような倍率の高いもので見るとさらに真直ぐに近くなります。電子顕微鏡みたいなもので見るとなお直線に近くなります。このように曲線を細かく分けて、その一部分を直線とみて、取り扱う考え方です。

ただ、顕微鏡は倍率を高くしていくと一部分はたいへん精密に見えますけれども、今度は逆に視野が狭くなるという欠陥がでてきます。ごく一部分しか見えなくなり、見える範囲が狭くなります。これを補うためには、今度は一部分ごとに見たものをつなぎ合わせてみないと、全体が見えなくなります。

そのつなぎ合わせることを積分と考えるのです。

ニュートンとライプニッツの論争

歴史的にいうと微分積分を発見したのは、ニュートンとライプニッツ（ドイツ、1646~1716）といわれています。二人とも１７世紀の中頃に生まれて、１８世紀の初め頃に亡くなりました。微分積分学はこの時代に作られました。この二人が、微分積分学をどっちが先に発見したかということで、大喧嘩をしました。これは数学の歴史の中でたいへん有名な事件ですが、時間的にはニュートンの方が先に発見したことは疑う余地はありません。

ライプニッツはニュートンよりも年が若くて、数学を勉強したのもだいぶ遅れていました。おそらく十何年か後にライプニッツも独立に発見したのですが、ニュートンの側では、ライプニッツはニュートンの発見を盗んだ、と文句をつけました。ライプニッツも腹を立てて反論しました。最初のうちは、この二人は仲がよくて、ニュートンは、俺と君だけが微分積分を発見したということを、やり取りしていた手紙の中で書いています。なぜこのようなことになったかというと、二人とも微分積分学はあたり前のことで、大した発見だと思っていませんでした。だから俺が発見したとか、お前が発見したなどと別にやかましくいう必要はないと考えていました。そのためにニュートンは「ライプニッツも発見した」という自分に不利な証拠を残しています。ニュートンは発見しながら、長い間発表しなかったから、このような争いが起きました。

ところが、後になって次第にこの学問が発展してくると、これはたいへんな理論だということに二人とも気がついたのではないかと思われます。そこで惜しくなって、俺が発見したのだと言いたくなったのではないかと思われます。

微分・積分の効用

ある意味では微分積分ぐらい簡単な考え方はありません。しかも、このくらい威力のある考え方もありません。おそらく数学の中でこのくらい役に立つ考え方はありません。微分積分学がなかったとしたら、現在の数学は三分の一ぐらいまでしか発達していないと思われます。現在の天文学でも物理学

でも、微分積分学を使わないと自然の研究でほとんど何もできないと思われます。しかも、もとの考え方は簡単です。デカルトの四つの法則のうちの、第二と第三を見事に適用したにすぎません。

簡単に言うと、微分積分は、われわれのいろいろな現象を見るさいの精巧なカメラのようなものと考えられます。曲がっているものでも、微分という**めがね**で覗くと直線に近くなります。そして、積分という**めがね**でつなぎ合わせて、曲がったものを理解します。細かく分けて、つなぎ合わせる、これだけのことでいろいろなことが分かります。これがなかったら、太陽のまわりを多くの遊星が、どんな回り方をするかという太陽系の運動の研究はできませんでした。ニュートンは、当時の一番大きな問題であったところの太陽系の運動法則を解明するために、その手段として微分積分学を考え出しました。

関数とは何か

近代の数学が生み出した最も重要な概念は、「関数」という考えです。

関数という言葉は、日本では日用語ではなく、数学だけで使う言葉です。ヨーロッパでは function（ファンクション）という日用語です。function を辞書で引いてみると、「機能」という訳語が出てきます。これなら日本でも日用語です。

「胃は消化の機能をもっている」と言えば誰にも通用します。ところが、それを「関数」という特別な言葉を作ったので、分かりにくい感じを与えています。機能とは、簡単にいうと働きです。ライプニッツが初めてファンクションという言葉を使いました。これを日本では、「関数」という言葉にしました。「関数」は簡単にいうと「働き」です。

たとえば、駅にある切符の自動販売機を考えてみましょう。お金を 200 円入れると、200 円の切符が出てきます。これは、お金 200 円を 200 円の切符に換える働きです。その働きを物体化したものが自動販売機です。だから、自動販売機を見たら、ここに関数があると考えればいいのです。人間も関数と考えられます。人間は食べ物を入れて、エネルギーを出します。食べ物をエネルギーに換える働きです。

数学では、入れるものを「ｘ」とし、出てくるものを「ｙ」とします。例えば、１を入れると、２が出てくる。２を入れると、４が出てくる。３を入れると、６が出てくる。これは、入ってきた数字を２倍にして出すという働きです。これを　$y=2x$　と表します。

新しいめがね

工場は、原料を加工して製品を作る働きを持っています。だから、工場は、原料を入れて、製品を出す関数といえます。このように、関数なるものは、ライプニッツ以前にもいくらでもあったのです。ライプニッツが関数という**めがね**でいろいろな現象を見ることを初めて教えてくれました。ライプニッツがそういう考えを出してから、人々がそういう角度で物事を見るようになりました。これは大きな違いです。物事が変わったわけではないですけれども、見方が変わってきました。例えば、$y=x^2$　では単なる等式です。そう見てもいいのですが、これを　x　を入れて、それを二乗して出すという働きという見方をするということです。そういう見方でこの式を見るということが関数的な見方なのです。つまり何かを二乗する働きというものを特に取り出して考える、そういう見方がライプニッツによって初めて出されたのです。

だから大昔からそういう目で見れば関数はいくらでもあったわけですけれども、そういう見方をすることが新しいのです。数学というのはそういう点では、絵とか文学とそう変わらないものです。例えば、芭蕉の「閑かさや岩にしみ入る蝉の声」という俳句が作られる前にも、岩にセミがとまって鳴いているという風景はどこでも起こっていたのです。あの俳句を作る前は、ただ単に、岩でセミが鳴いていただけだったのです。ところがああいう俳句を作ってからは、人々があれは静かさを表しているという見方で見るようになってきました。絵でいえば、ゴッホがひまわりを画きました。ひまわりなどごくありふれた花で、大昔からあったのですが、あの絵を見てからは、ひまわりを見る一つの角度が人間に与えられました。同じように関数という一種の**めがね**をかけて世の中のいろいろな現象を見るようになってきました。関数という新しい**めがね**を一度手に入れ、その**めがね**で見ることによって、いろいろな現象が非常に深いところまで見えるようになりました。

皆さんは、いろんな教科を学ぶことにより、それぞれの新しい**めがね**を手に入れ、その**めがね**で見ることによって、多角的、多面的に物事を見ることができるようになります。多角的、多面的に物事を見ることによって、物事を深く、正しく見ることができるようになります。そのような**めがね**を手に入れるように学んでいってほしいと思います。

微分と積分　　　　　　　　　　＿＿年＿＿組＿＿＿番氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

『近代の数学』のまとめ

1　デカルトと『方法序説』

＿＿＿＿＿＿の数学は＿＿＿＿＿　という名前を持っており、＿＿＿＿
という本の　＿＿＿＿として＿＿世紀に書かれました。

『＿＿＿＿＿＿＿』の４つの研究方法は何か、簡潔に述べて下さい。

第１は、＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

第２は、＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

第３は、＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

第４は、＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

こういう考え方を数学に適用したのが＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿です。

2　座標と分析・総合

デカルトは、＿＿＿＿を考えだして、＿＿＿＿＿の考え方を一変しました。

平面上の点を＿＿＿＿＿、＿＿＿＿＿の二つの数の組で表しました。

デカルトは、＿＿＿＿で＿＿＿＿をやることができるようにしました。
これがデカルトの　やった大きな＿＿＿＿であり、これが＿＿＿＿＿＿＿＿
の始まりとなりました。

3　変化と運動

解析幾何学は＿＿＿＿を使うことによって、＿＿＿＿するもの、＿＿＿＿
するものを実に見事にとらえることができます。

中世の数学が＿＿＿＿であったのに対して近代の数学は＿＿＿＿になりました。

これは＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿といわれているものを作り出す大きな支えになりました。

4　天動説から地動説

天動説は、＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

地動説を唱えたのは、＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿です。

5　ガリレオと地動説

ガリレオが展開したのは、＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

でした。

これに対してケプラーのは＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

でした。

この二つを同一の原理によって統一したのが＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿でした。

ニュートンの武器となったのは＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿という新しい数学でした。

6　微分と積分

微分と積分は、デカルトの四つの法則の＿＿＿＿番目と＿＿＿＿番目にあたり、

微分は＿＿＿＿＿のこと、積分は＿＿＿＿＿のことです。

曲線は、細かく分けるほど、＿＿＿＿＿に近づくというアイデアが＿＿＿＿＿のもとです。

7　ニュートンとライプニッツの論争

微分積分を発見したのは、＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿と＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿といわれています。

時間的には、＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿の方が先に発見したことは疑う余地はありません。

8　微分・積分の効用

ニュートンは、＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿を解明するために、

その手段として＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿を考え出しました。

9　関数とは何か

近代の数学が生み出した最も重要な概念は、＿＿＿＿＿＿＿という考えです。

「関数」は簡単にいうと「＿＿＿＿＿」です。

１０　新しいめがね

$y = x^2$　では＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿です。これを　x　を入れて、それを二乗して出すという働きという見方をするということが、＿＿＿＿＿＿＿な見方なのです。

そういう見方が＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿によって初めて出されたのです。

中学１年「１次方程式」の課題

オリジナルのディオファントスの墓標問題づくり

自由の森学園中学・高校　松元大地

中１の最後の単元である１次方程式を終えたあと、私はグループでの問題作りを課題としている。ご存じの方もいらっしゃるとは思うが、自由の森学園では期末テストの点数による成績評価を行わない。（もちろん単元ごとに確認テストは作るが、はっきり言って緊張感はない・・・。）

期末テストのような達成感を感じられて、なおかつ制作過程でグループ内の対話があり、単元の習熟にもつながる。そして、何より**楽しい！**と感じられるもの。そんな課題を目指している。

<u>グループ課題について</u>

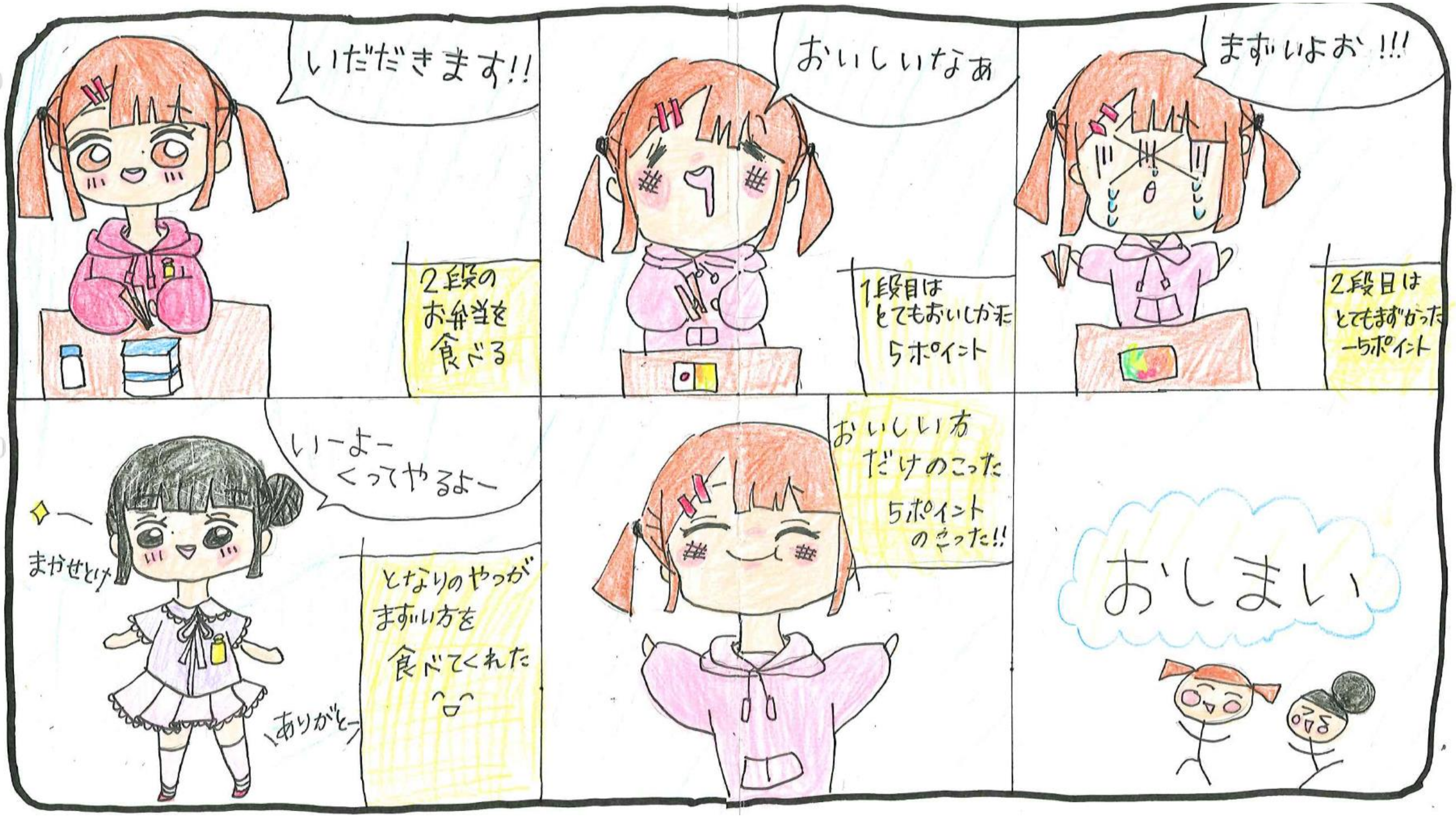
共同学習やグループ学習には、以前から本校の数学科では可能性を感じ、積極的に取り入れている私は今回のような課題作成にもグループ活動が活かせると感じている。

ちなみに前期末では

0−(−5)　または　(−5)×(−4)　が成り立つ場面の登場する物語を作ろう。

という課題を設定している。（これは個人で作成）

0−(−5)の例




1
お肉が5個
野菜が5個
やったーお肉だ
野菜やだよ(涙)
2
野菜欲しいな〜
友人
野菜もらってもいい?
3
えっ!? マジで…全然いーよー
ラッキー
4
ラッキー…おいしー〜〜
友人

0−(−5)の例


1
宿題しろよー
勉強やだよ〜(涙)
2
プリントの山
やる気ZERO
5枚で束
ここは…はかせの変声器で…
コロンくーん
3
一束消えた
二束消えた
三束消えた
四束消えた
5
あいかわらず…
あれ宿題ない!?
やった〜

(−5)×(−4)の例

その半年後の課題がコレ

特別問題 有名なディオファントスの墓標の問題

ディオファントスの少年時代は一生の$\frac{1}{6}$、青年時代は一生の$\frac{1}{12}$、その後一生の$\frac{1}{7}$を独身で過ごし、結婚して５年後に子供が産まれた。子供は父の一生の$\frac{1}{2}$を生きて、子供が死んだ４年後、ディオファントスはこの世を去った。

さて、ディオファントスは何歳まで生きたでしょうか？

このような問題を、自分の好きな歴史上の人物、有名人、タレントでつくりましょう。

（存命中の人物でもかまいません。その場合、現在の年齢を当てる問題に変えましょう）

さてどんな作品ができたでしょう・・・

問題　明智光秀の一生

メンバー
・飯塚　蕾美
・富山　美羽

光秀の赤ちゃん時代は、一生の$\frac{1}{27}$で少年時代は、一生の$\frac{1}{6}$、そして青年時代が$\frac{1}{3}$で、それから4年後に城を攻められ、そして一生の$\frac{8}{27}$がすぎて滋賀郡の領地をもらい、その後一生の$\frac{5}{27}$が過ぎたときに光秀より一年早く妻が亡くなった。

手塚治虫は人生の$\frac{1}{15}$の時、父が亡くなる。$\frac{1}{15}$で学校でガヂャボイとあだ名を付けられる。11年後、初の単行本、新宝島を出版。$\frac{1}{20}$で作品ジャングル大帝を連載。$\frac{1}{15}$で引越しをする。$\frac{1}{12}$で結婚。$\frac{1}{5}$で社長を退陣。$\frac{1}{5}$を過ごした後、母文子死去。そしてその$\frac{1}{12}$を過ごした後、亡くなった。

奥平千敬 西脇こはる

清水駿人 櫻田晴大

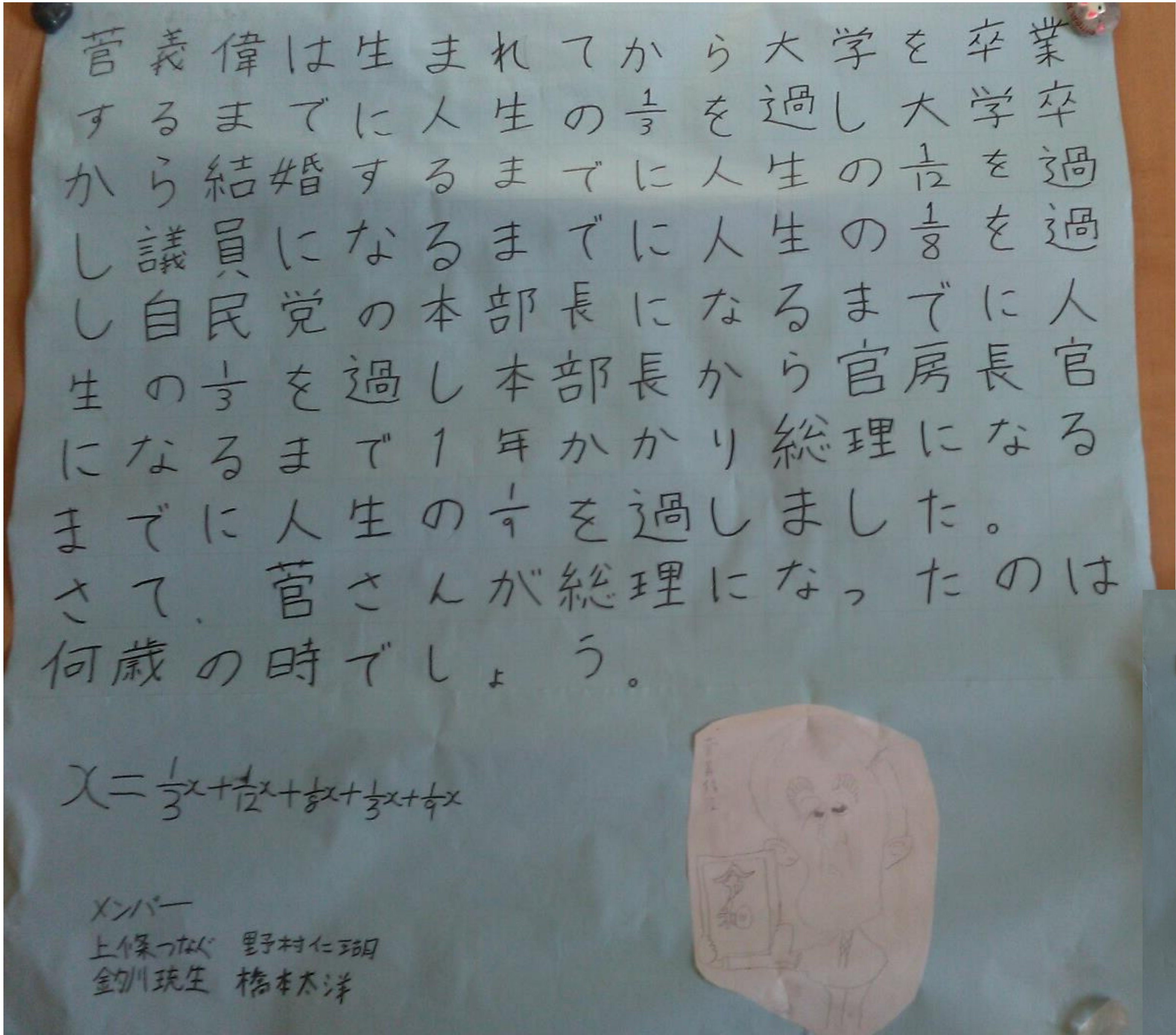
(大竹さくら)

$$x = \frac{1}{15}x + \frac{1}{15}x + 11 + \frac{1}{20}x + \frac{1}{15}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}x + 5$$

ベートーヴェンは一生の$\frac{1}{14}$の
時をすごした後ピアノを初め、
その後、$\frac{1}{8}$の時をすごし、小学校を
退学する。その後、一生の$\frac{2}{28}$の時を
すごし、ピアノの教師になる。一生の
$\frac{1}{4}$の時をすごし「ピアノ・ソナタ8番悲愴」
を出版、一生の$\frac{1}{28}$をすごし、耳がきこえなく
なる。9年後、好きな女性にふられる。一生の$\frac{1}{7}$を
すごし、耳の病気が悪化する。その後一生の$\frac{2}{14}$を
すごし、息を引き取る。彼は何才の時に死んだでしょう

$$x = \frac{1}{14}x + \frac{1}{8}x + \frac{2}{28}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{28}x + 9 + \frac{1}{7}x + \frac{2}{14}x$$

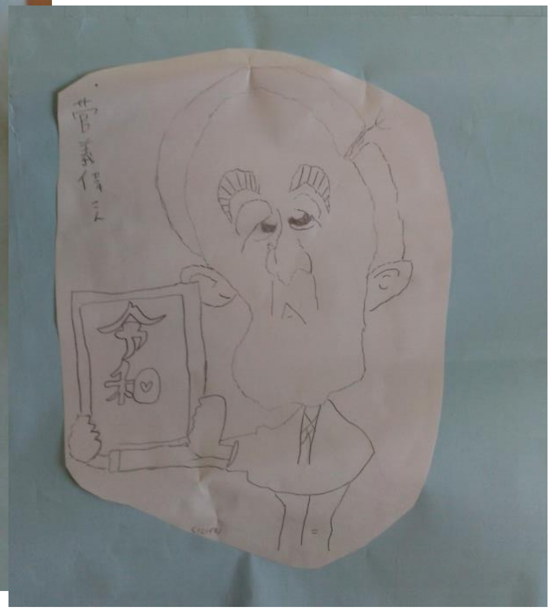
ウルフ　そら



菅義偉は生まれてから大学を卒業するまでに人生の$\frac{1}{3}$を過し大学卒から結婚するまでに人生の$\frac{1}{12}$を過し議員になるまでに人生の$\frac{1}{8}$を過し自民党の本部長になるまでに人生の$\frac{1}{3}$を過し本部長から官房長官になるまで1年かかり総理になるまでに人生の$\frac{1}{9}$を過しました。
さて、菅さんが総理になったのは何歳の時でしょう。

$$x=\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}x$$

メンバー
上條つなぐ　野村仁瑚
釼川珖生　橋本太洋



菅義偉が何歳で総理になったかを、彼の議員人生をなぞって描いた作品。

時事問題を題材にするセンスが楽しい！

エジソンの一生

エジソンの少年時代は一生の$\frac{1}{6}$、青年時代は一生の$\frac{1}{12}$を過ごし、その3年後に1度目の結婚をした。
その後一生の$\frac{5}{14}$の時が経ち、蓄音機を発明する。
そこから一生の$\frac{1}{7}$の時が経ち、キネトスコープを発明した。発明した年から一生の$\frac{20}{21}$が経った時には、ゴムの研究をした。その後エジソンは、たくさんの発明品を残し、一生の$\frac{1}{21}$がたち亡なった。

Q　亡くなったのはいくつの時？

式　$x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + 3 + \frac{5}{14}x + \frac{1}{7}x + \frac{20}{21}x + \frac{1}{21}x$

蓄音機

山村　直輝　　石田　爽楽
長谷川　七海　　森　水輝

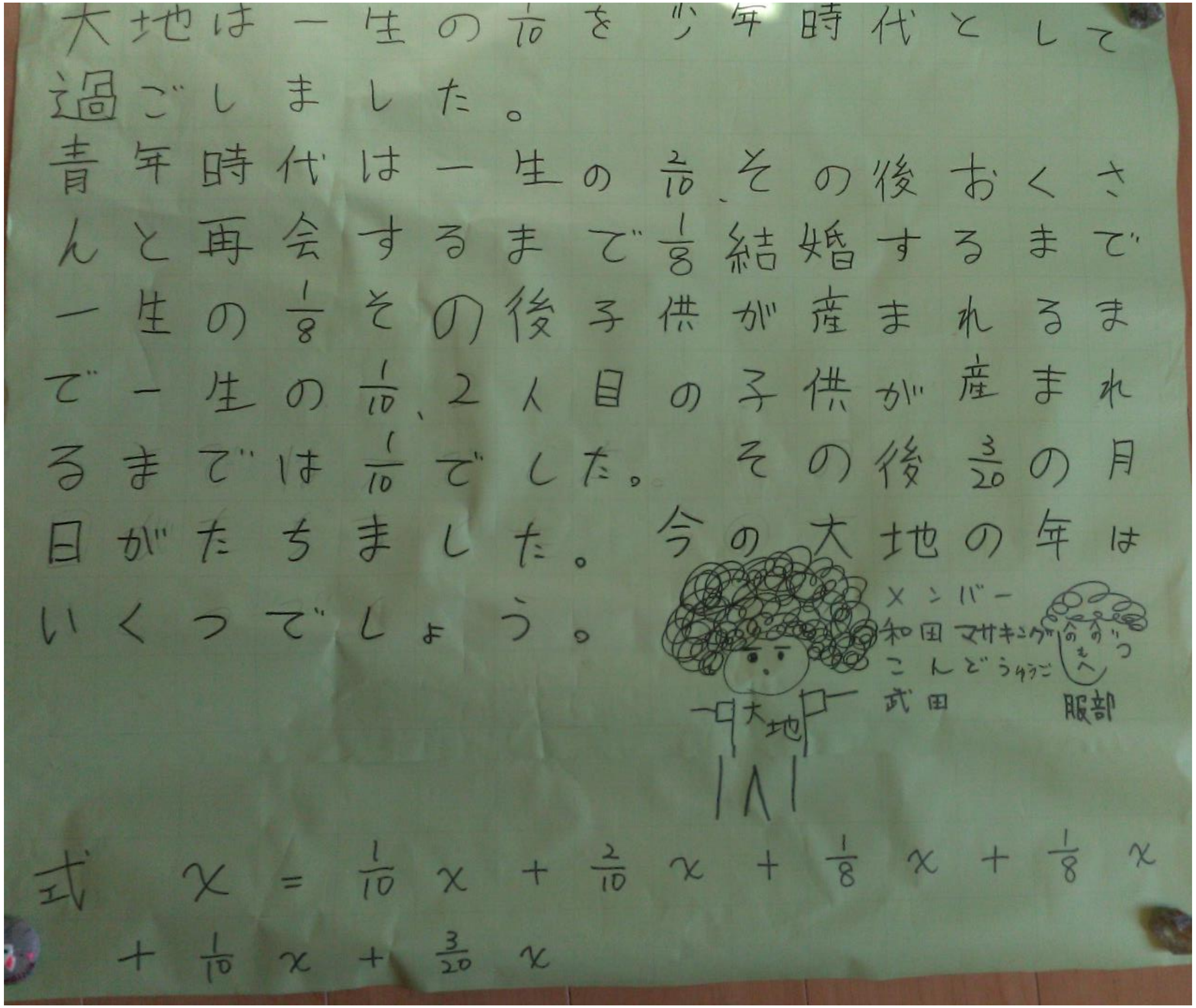
三浦春馬は児童劇団に一生の$\frac{2}{15}$で所属し、一生の$\frac{1}{15}$でドラマに初出演さらにドラマ5本も一生の$\frac{2}{15}$で出演する。その後一生の$\frac{1}{6}$ではドラマ3本CM1本に出演し、一生の$\frac{1}{6}$には、ゲストとしてファッションショーに出演。その後一生の$\frac{1}{3}$で死んだ。

三浦春馬は何才の時に死んだでしょうか。

式 $x = \frac{2}{15}x + \frac{1}{15}x + \frac{2}{15}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x$

メンバー

大竹 さくら　古家颯太郎　黙王 沼



これは私の年齢を当てる問題ですね。

発表も大事

発表会の風景の映像もお見せできます

　これらの作品は、完成後に教室でグループ毎の発表をする。そして年度末の学習発表会で展示し、さらに製作者が展示作品を保護者の前で解説する。という最終的な目標も設定している。

「もし保護者から細かいところを質問されても、製作者は答えられるようにしておいてね」というプレッシャーもかけておく（笑）　「え～イヤダよ～」とは言いつつも、せっかく作った作品なので誰かに観て欲しいという気持ちはある。　何より、誰かに観てもらう事を意識してこその「作品」であるはずだ。

　昨年中はコロナ禍にあり、本校も沢山の行事を中止し、保護者参観もほぼ行われずじまいだった。しかし奇跡的に２月末頃に状況が良くなり、保護者を学年毎に時間をずらしながら来校してもらい、学習発表会を開催することができた。（保護者が来校できたのは、入学式、卒業式とこの学習発表会のみ・・・）

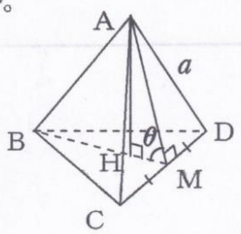
　私は個人としては、保護者を唯一招くことができたのが、体育祭、学園祭や合唱祭ではなく、学習発表会だったことが実は一番嬉しかった。（ここに数学教師のエゴがどうしても出てしまいますね・・・笑）

　この学習発表会は、生徒のための場であるのはもちろんである。（作品課題が発表されてようやく完結される場でもあり、その準備期間は学習の習熟の場である）　しかし、保護者のための場としても機能している。それは「ウチの子がちゃんと勉強していて安心した」という単純なものではなく（その面もあっていいが･･･）数学を含めた「学び」が「楽しい」「修行なんかではない」と大人にも再発見してもらう場になるから。

三角形の五心と四面体の五心？　　2021.12.11　塩沢

問題1　1辺の長さが$\boldsymbol{a}$の正４面体について、次のものを求めなさい。

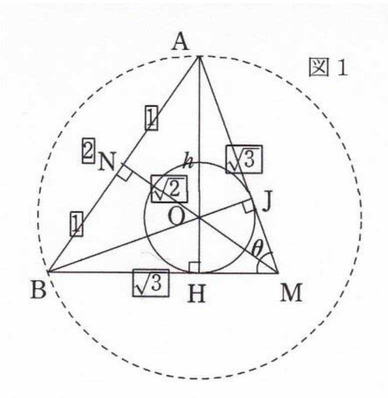
（1）高さh　　　　（2）2つの面のなす角を$\boldsymbol{\theta}$とするとき、cos$\boldsymbol{\theta}$の値

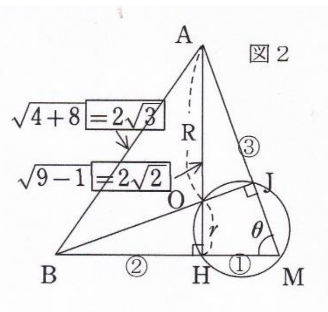


（3）内接する球の半径r　　　　（4）外接する球の半径R

（5）底面積S　　　　（6）体積V

解説・解答





(!)図1　AH・BM=2・△ABM =AB　・　MN　$AH=\frac{AB\cdot MN}{BM}=\frac{a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{6}}{3}a(=0.816\ldots a)$

$(AM=BM=\frac{\sqrt{3}}{2}a(=0.866\ldots a)$

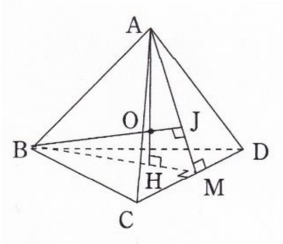
(2)図2 点Hは△BCDの重心、を使うと　$\cos\theta=\frac{1}{3}$、$AH=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

(3)図 2 円の方べきの定理より AO×AH=AJ×AM、$AO=\frac{AJ\times AM}{AH}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{6}}{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{4}a$、$r=OH=AH-AO=\frac{\sqrt{6}}{3}a-\frac{\sqrt{6}}{4}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a$　点Oは正4面体の重心､を使うと$r=OH=\frac{1}{4}\times AH=$

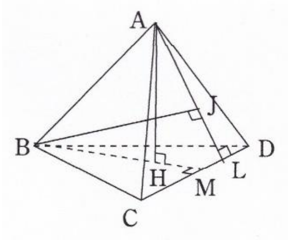
(4)R=AH—r=$\frac{\sqrt{6}}{4}a$　(5) S=$\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$　(6) V=$\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

重心　$\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$　？　　傍心

垂心　AB⊥CD のとき　BM⊥CD と合わせて　　　~~AB⊥CD~~のとき　AH,BJ は交点なし。



△ABM⊥CD
垂線 AH,BJ は
△ABM の上にある。
したがって、
AH,BJ は交わる。

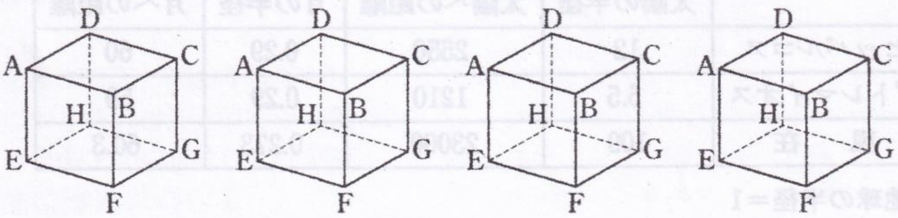


① AB⊥CD⇔$AD^2+BC^2=AC^2+BD^2$
② AC⊥DB⇔$AB^2+CD^2=BC^2+DA^2$
③ AD⊥BC⇔$AC^2+BD^2=AB^2+CD^2$

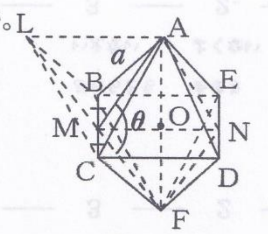
3つの等式の内2つが成り立てば、他の一つは成り立つ。このときだけ、垂心が存在する。
(この四面体を垂心四面体(直稜四面体)という)

問題２　切り口の形を，次の㋔，㋕，㋖，㋗で示した図形にするには，それぞれどんな平面で切ればよいでしょうか。切り口を下の図にかき入れてみましょう。

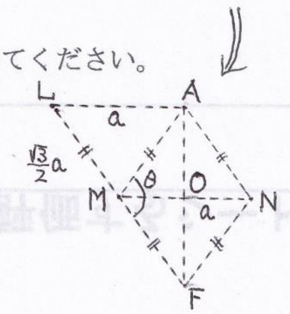
㋔ 正方形　㋕ ひし形　㋖ 五角形　㋗ 正六角形



問題３　１辺の長さaの正８面体について、次のものを求めなさい。
(１)cosθの値(ＡＦは正方形ＡＢＦＤの対角線である)　(２)体積Ｖ(正方形ＢＣＤＥを底面とみる)



問題４　今日の授業で学んだこと、疑問、感想、意見などを書いてください。



作問の背景（狙いと遊び）

２０２１年１１月６日（土）東数協月例研
広島女学院中学高等学校　中原克芳

数学教師である以上、定期テストや授業での演習等、問題作成は不可欠である。しかしただ単に問題を作るのではなく、目的をもって作成しているはずである。問題作成の最大の目的は生徒の授業内容理解の確認であろうが、場合によっては基本事項の確認だけでなく、自主学習の程度や応用に考えが及ぶかを見たいこともあるだろう。そのため単に問題集から選んだり、数値を少し変更するだけでなく、目的に合うような問題を自作したい。と言っても、定期テストだけで年５回以上、日頃の演習問題まで入れると出題数は膨大になる。すべての問題は無理でも、毎回１問くらいは自分なりに工夫した問題を作成したいものである。ここではそのような問題を紹介したい。

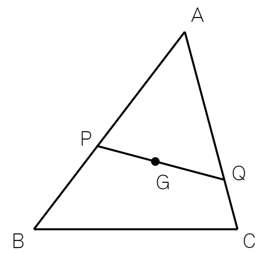
特に今回の主題は［問題３］である。この問題の作成意図は３つあるが、３番目の意図は解いてみないとわからないと思う。ぜひとも例会までに解いてみて、また可能であれば類似の問題の作成にまで挑戦していただきたい。

［問題１］クレープ、ミルフィーユ、あんころ餅、わた菓子、せんべい の５種類のお菓子が１つずつある。これらを次のように配る方法は何通りあるか。（問に現れる人物名は実在の人物とは関係がありません。）

（１）小林さん、小田さん、吉田さんの３人に１つずつ配る。

（２）國岡君１人に３つ配る。

［問題２］△ＡＢＣの重心Ｇを通る直線と２辺ＡＢ，ＡＣとの交点をそれぞれＰ，Ｑとする。ＡＱ：ＱＣ＝３：１のとき、ＡＰ：ＰＢ を求めよ。



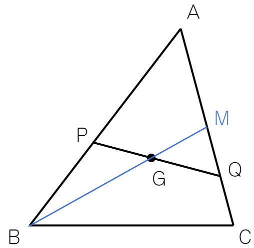
［問題３］２本の対角線の長さがそれぞれ１２㎝、３４㎝である菱形の１辺の長さを求めよ。

[解答と解説]

[問題１] クレープ、ミルフィーユ、あんころ餅、わた菓子、せんべい の５種類のお菓子が１つずつある。これらを次のように配る方法は何通りあるか。
（１）小林さん、小田さん、吉田さんの３人に１つずつ配る。
（２）國岡君１人に３つ配る。
[解答]（１）${}_5P_3=60$．　　（２）${}_5C_3=10$．
[解説] 順列・組合せの授業をして、生徒から出る最も多い質問は、Ｐ（順列）とＣ（組合せ）の区別がつかない、どちらを使って良いかわからない、というものです。そこでその違いをはっきりさせるために、同じ設定の下でＰとＣを用いて解く２つの問題を考えました。生徒にはこの問題で、その区別がつくようになってほしいと思います。

なお、問題に現れる人名は今年同じ学年を担当している数学科の先生で、数学には直接関係がないけれどもこのような遊びを入れると生徒も喜んでくれるので、問題作成の際にはこのような遊びも必要だと考えています。（お菓子の名前にも数学に直接関係のない遊びを入れていますが、こちらはわかりますか？）

[問題２] △ＡＢＣの重心Ｇを通る直線と２辺ＡＢ，ＡＣとの交点をそれぞれＰ，Ｑとする。ＡＱ：ＱＣ＝３：１のとき、ＡＰ：ＰＢ を求めよ。

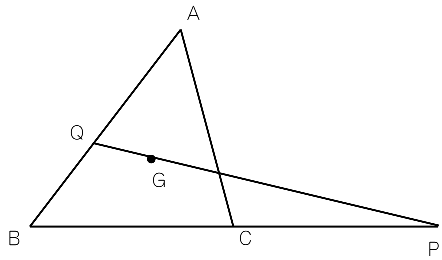


[解答] 中線ＡＭを引く。メネラウスの定理より、

$$\frac{AQ}{QM}\cdot\frac{MG}{GB}\cdot\frac{BP}{PA}=\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{BP}{PA}=1,$$

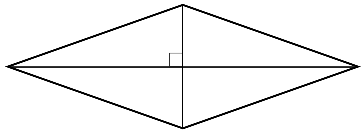
∴ＡＰ：ＰＢ＝２：３．
（このとき、ＰＧ：ＧＱ＝４：５ もわかる。）
[解説] 重心の授業を行う際には、最初に必ず定義「３本の中線の交点」と定理（性質）「重心は中線を２：１に内分する」を確認しています。逆に重心を理解させるには、その両方が利用される問題を出題したいものです。この問題の特徴は、まず（１）設定がこれ以上はないというほど簡素であることが挙げられます。次にこの問題を解くためには、（２）重心の定義と定理の両方が必要になること、（３）補助線を引く必要があること、（４）補助線の引き方によって別解がいろいろ考えられること、またそのために（５）メネラウスの定理を正確に理解する必要があること（元の△ＡＢＣに対してではなく、別の三角形に対して定理を適用する）、等があります。といろいろ書きましたが、応用として手頃な難易度と思いますので、ぜひ演習・テスト等に使ってください。

なお、最初に考えた問題は、さらに欲張って外分の理解まで要求した、「△ＡＢＣの重心をＧ、ＢＣを ２：１に外分する点をＰ、直線ＰＧと辺ＡＢとの交点をＱとするとき、ＡＱ：ＱＢを求めよ」というものでした。



［問題３］ ２本の対角線の長さがそれぞれ１２㎝、３４㎝である菱形の辺の長さを求めよ。
［解答］ 辺の長さを x ㎝とすると、三平方の定理より、

$$x^2 = 6^2 + 17^2 = 325,\quad x = 5\sqrt{13}\ (\text{cm}).$$



［解説］ 最初に書いたように、問題の意図は３つあります。

（意図１．これは数学の内容とは直接関係のないお遊びです）２本の対角線の長さがわかりやすい。

（意図２）直角三角形が直接見えない形で三平方の定理を使わせる。数学が苦手な生徒にはこれだけでも難しくなる。他の例として、２辺が与えられた長方形の対角線、３辺が与えられた二等辺三角形の面積等がある。

以上の２点はすぐにわかると思いますが、それだけではわざわざ発表するほどではありません。（意図３）は解答の途中、３２５が２５で割り切れるように、平方根の処理までさせることにあります。これが（教師向けに）この問題で最も主張したい点です。

と言ってもピンと来ない方も多いでしょう。それでは、このような数の組で別の例を探してみてください。問題を一般化して再設定すれば、

「２整数 x，y が互いに素であるとき、$x^2 + y^2$ が平方数で割り切れるようにしたい。ただし商も平方数では Pythagoras 数なので、商は平方数でないようにする。このような整数の組の例を求めよ」

となります。意外なことに、少し探しただけではなかなか見つけられません。それでも何とか頑張れば、

$$(x,\ y) = (1,\ 7),\ (2,\ 11),\ (9,\ 13)$$

等が見つかります。そんなに見つけにくいものであれば、十分に考える価値のある問題になるのではないでしょうか。ただしこうなると図形から離れて整数問題ですね。

この問題を解くために、平方和についての知識を総動員して考えました。その結果、高校教科書（数学Ⅱ）にも書かれている Lagrange（ラグランジュ）の恒等式

$$\text{(L)}\quad (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

に到達しました。この恒等式を使えば、a，b が Pythagoras 数のとき、求める解が得られます。具体的には、$a = 3$，$b = 4$ のとき、

$$5^2(x^2 + y^2) = (3x + 4y)^2 + (3y - 4x)^2$$

となるので、x，y に適当な値を代入すれば様々な値が得られます。例えば $x = 1$，$y = 2$ のとき、（L）は $5^2 \cdot 5 = 11^2 + 2^2$（上記解答の２番目）となるという仕組みです。別の Pythagoras 数、例えば $a = 5$，$b = 12$ を使えば、13^2 がくくり出されますが、さすがに 13^2 を見つけろというのは教育的ではなく、単なる意地悪でしょう。

このように生徒向けの問題を作る際に少し数値に工夫を入れようとしたことで、予想以上の問題に発展し、思いもかけず有名な恒等式まで出現しました。数学の深さを実感するとともに、数学を楽しむことができました。

11月6日月例研の感想です。　　黒田俊郎

市橋さんの話

（1）　ハノイの塔の問題で「1が何回動くか，2が何回動くか，…」という話は初めて知りました。「なるほど」と思いました。

（2）　私は以前，斜面を使った実験装置を作ったことがあります。

斜面にすると重力の加速度が減るので，実験装置が小さくても（私の場合は30㎝×40㎝ぐらい）実験ができます。

中原さんの話

ラグランジュの恒等式の話のところで，私が

$(a^2-b^2)(c^2-d^2)=○^2-□^2$

になるという話をしましたが，インターネットを見てみたら，なんと

$(a^2+nb^2)(c^2+nd^2)=○^2+n□^2$

が成り立つということが書いてありました。びっくりしました。

nは整数でも，実数でも，複素数でもいいと思います。

松本さんの話

（1）12ページに「$1m^2$の正方形の上に12トンの空気がのっている」と書いてありますが，標準気圧は101325パスカルということなので，約10トンという数値が現実に近いのではないでしょうか。

（2）空気の重さということでは，「この教室の空気は全部でどのくらいあるだろうか」と聞いてみるのも面白いと思います。

選択肢は

①１ｋｇ

②１０ｋｇ

③１００ｋｇ

④それ以上

としたらどうでしょうか。

教室が　縦８ｍ　横６ｍ　高さ3mとすると容積は$144m^3$　となります。

空気は大体1モルで29gとして，標準状態で1モルの気体は22.4リットルですから計算すると約190㎏になります。

人間が1日に摂取する酸素の量も計算してみたいです。

（積分計算とは直接の関係はありませんが）

小森さんの話

複素数の最後の目標として何を考えるか，という問題提起は面白いと思います。

① ガモフの宝探しの問題

② 正 n 角形の一つの頂点と，他の（n―１）個の頂点を線分で結ぶとき、この（n―１）本の線分の長さの積は n である。

はともに面白いと思いました。

もう一つ，こういう問題はどうでしょうか。

「n 次方程式 $f(x)=0$ の解を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ とする。

複素平面上にこれらの点を取り，線分で結んで，面積最大の多角形を作る。

（いくつかの解はこの多角形の内部に入る場合がある)。

次にこの方程式の左辺を微分して，次の方程式を考える。

$$f'(x)=0$$

この方程式の解はすべて上の多角形の中にある」

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ がすべて実数であれば（多角形はぺちゃんこになりますが） $f'(x)=0$ の解もすべて実数で， $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ の最大値と最小値の間にあることは 直観的に明らかですが， $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ の中のいくつかが（または全部が）複素数である場合は，

「 $f'(x)=0$ の解は元の方程式からできた多角形の中にある」

ということが成り立つということです。

高校生にはむつかしいかもしれませんが，一つの到達目標と考えられると思います。

（いくつかの例を作ってみて，この事実が正しいことを確認することは，高校生にもできると思います。）

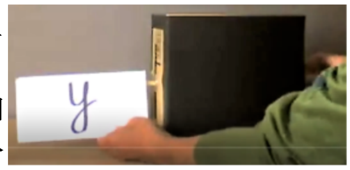
秋の基礎講座＋11月の月例研　参加記　中高分科会編

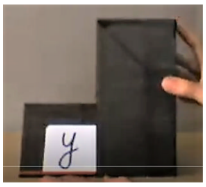
（１１月６日実施：１８人参加）

＜秋の基礎講座＞　「思いついたら. やってみる 作って見る」： 市橋公生氏

基礎講座として引き受けましたが、どうやら、趣味の講座みたくなりました。こんなことをやってみたら、こんな風になりました、という話しをしていきます。

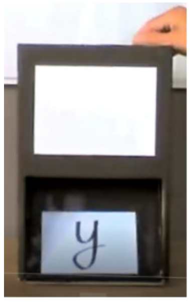
まずは、ブラックボックスの話しです。
第１代目のブラックボックスは、右から入れて左から出てきます。こうすると、$y = ax + b$　という式に繋がると思い、横の移動にしました。この仕組みは、中にカードを入れる薄い箱があり、その箱に右からカードを入れて、レバーで半回転させて、左からカードを取り出すようになっています。





これは、手でカードを回転させて取りだしているので、それを自動に出来ないかと考えて、作りました。それが左図です。カードを手で回転させなくていいように、右上からカードを入れて、左下からカードが出るようになっています。

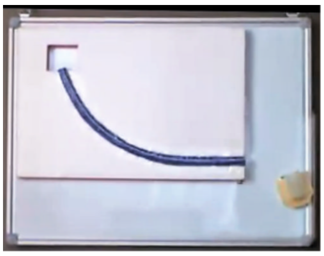
次のブラックボックスは、今皆さんが使っているような上からカードを入れたら下からカードが出るようなブラックボックスです(右図)。仕組みは簡単で、入れたカードが中の出っ張りにひっかかって、裏返しになって下から出てくるのですが、それが生徒に説明できるように、前面を取り外せるようにしました。



そして、４つ目がサイコロブラックボックスです。カードではなくサイコロを上から入れて、下からサイコロが出てくるのですが、違った面が現れるようになっています(左図)。サイコロの 6 面を使って、「私は」を入れたら「市」が出てきて、「市」を入れたら「橋」が出てきて、「橋」を入れたら「公」が出てきて、きます。さらに、「生」が出てきて、「です」がでてきました。どうやら、サイコロの見せた面の上の面が出るようになっていて、「生」まではいきますが、1 周してしまうので、最後の 2 つは、そう出るように入れているようです。サイコロの 6 面を上手く使っています。

最後に、4 つのタイプのブラックボックスを並べました。

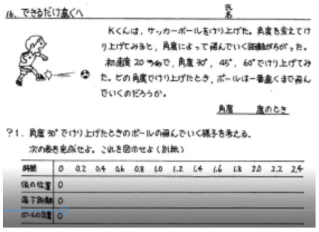
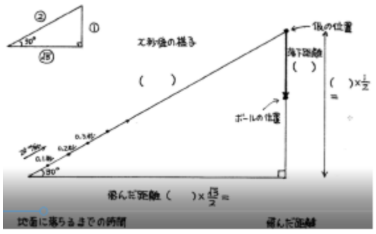
次は、『飛び出し＋遠くに飛ばす』です。かなり前の交通事故で、中央高速でバスが転落をしてしまい、その直後に運転手が自殺をしてしまったという悲惨な事故がありました。その新聞記事を紹介して、飛び出しのイメージをハッキリさせるために、簡単な実験を行います。発射機とでもいうのでしょうか、発泡スチロールの板に左上からパチンコ玉を入れて、なめらかなスロープを作って最後は水平になるようにしたものを作りました。パチンコ玉が水平に飛び出てから、どのような動きをするかを見ます。出てきたパチンコ玉を受け止めるコップをホワイトボードに取り付けて発射させます。このホワイトボードが狭いので、どんな動きがするかは分かりづらいですが、黒板で行えば、その動きはハッキリします。そして、バス事故のバスの動きを書き込めるプリントを配り、0.5 秒ごとのバスの位置を計算していきます。バスの速度は 100(km/h)だったので秒速に直すと、28(m/ｓ)で、水平方向にはその速さで等速度運動をして、鉛直方向には自由落下と同じ等加速度運動をするので、(落ちる距離(m))＝５×(落ちた時間(秒))^2 として、バスの動きを書いていき、30 mの崖だったので、約 5 秒後に崖から 70m のところに落下することがわかりました。



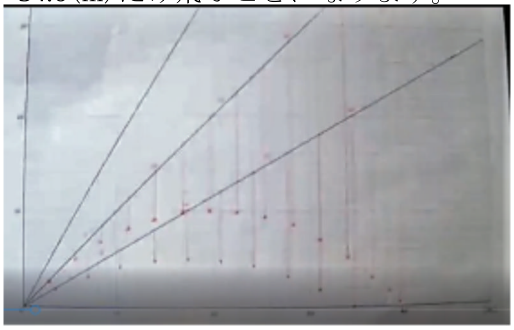
これをやっていたときに、生徒から「サッカーボールを遠くに飛ばすにはどうしたらいいの？」と聞かれたので、「遠くに飛ばす」ということをやりました。初速度 20(m/s)で、角度 30°、45°、60°の場合で行ってみました。プリントには、角度 30°で蹴り上げた場合を書き込むようになっています。初速度 20(m/s)で 30°の角度だから、鉛直方向は 10(m/s)なので、仮の位置というのは、その 10(m/s)で上に上がっていく分のことです。落

下距離というのは、5 ×（落下時間（秒））²で落ちていく自然落下の分のことです。その差をとって、ボールの位置を求めているので、表を埋めていくと、2 秒後に地面に落ちるので、水平方向の速度は、$10\sqrt{3}\ (m/s)$ なので、$10\sqrt{3}\ (m/s) \times 2(s) = 20\sqrt{3}\ (m)$ 、つまり、34.6（m）だけ飛ぶことになります。

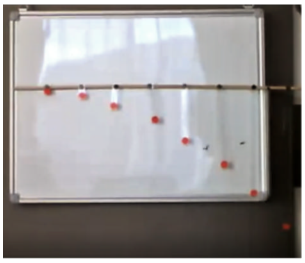
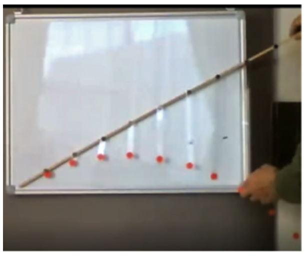
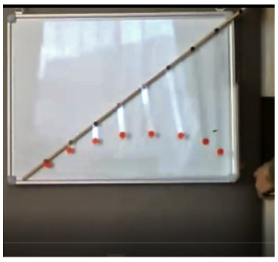
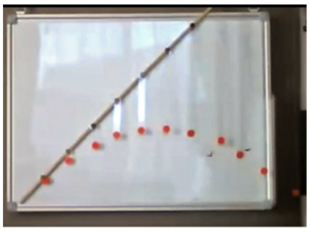
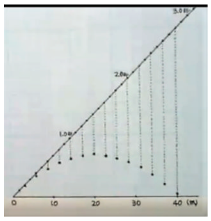
時間（秒）	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
仮の位置（m）	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
落下距離（m）	0	0.2	0.8	1.8	3.2	5	7.2	9.8	12.8	16.2	20
ボールの位置（m）	0	1.8	3.2	4.2	4.8	5	4.8	4.2	3.2	1.8	0

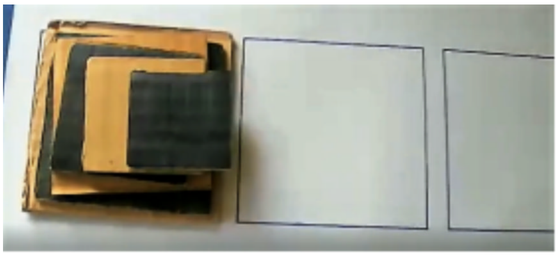



これらを 1 つに表したのが右図です。



このことの教具を作りました。細長い角材に、薄いアクリル板（プラバンでも可）を細長く切った物を上を画鋲で留め、下にボールのつもりで赤く丸いシールを貼りました。長さは、落下距離の分だけの長さにします。それを、0.1 秒後、0.2 秒後、0.3 秒後、･･･の分としてつくります。細い角材を水平に置けば、水平飛び出しを表すし、傾ければ、斜めに投げ蹴り上げた分になります。この教具は生徒にうけました。



3 つ目は『ハノイの塔』です。ハノイの塔を生徒にやって貰うように、生徒分あった方がいいので、厚めの段ボールを切って、作りました（左図）。

そして、生徒にやらせたら、考え方が 3 つ出てきました。1 つは、回数の増え方が 2 倍になっているという<考え方 1>と、もう 1 つは、前の回数を 2 倍して 1 を足すという<考え方 2>というのが出てきました。これらの考え方だと順々にしないと求まらないけど、いきなり「10 枚ならどうか」というと求めるのが大変なので、<考え方 3>も出てきました。


ハノイの塔 解決編

?1．次の板の枚数の場合について，移動の最小回数を求めて表をうめよ。

板の枚数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
移動の最小回数	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	…

(考え方 1)

+2 +4 +8 +16 +32 +64 +128 +256 +512

×2 ×2 ×2 ×2 ×2 ×2 ×2 ×2 ×2

板の枚数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
移動の最小回数	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	…

×2+1 ×2+1 ×2+1 ×2+1 ×2+1 ×2+1 ×2+1 ×2+1 ×2+1

(考え方 2)

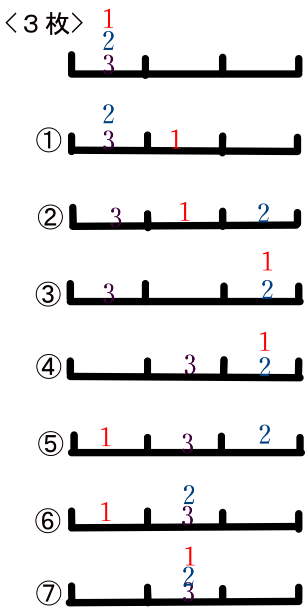
(1),(2)の方法だと，前の回数がわからないと計算できない。次々に計算していかなければならない。

板の枚数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
移動の最小回数	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	…

(考え方 3) 2^1-1 2^2-1 2^3-1 2^4-1 2^5-1 2^6-1 2^7-1 2^8-1 2^9-1 $2^{10}-1$

つまり，$2^{\square}-1$ ←板の枚数 となる。

この方法だと 枚数がわかれば 計算式が立てられる。



移動の回数

1 → 4 回

2 → 2 回

3 → 1 回

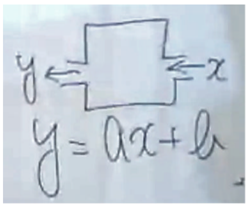
7 回

また、ハノイの塔の道具を使わないでやったら、面白いことが分かりました。どうするかというと、プリントに数字だけ書いて行います。1 枚の場合は、それを動かすだけだから 1 回で済みます。2 枚なら、上に 1 下に 2 と書いて、最初に 1 を動かして、次に 2 を他の所に動かして、次に 2 の上に 1 を動かして、3 回で済みます。3 枚の場合は、左図の様になり、1 を動かした回数は 4 回、2 を動かした回数は 2 回、3 を動かした回数は 1 回で、合計 7 回になります。4 枚なら、8 ＋ 4 ＋ 2 ＋ 1 で 15 回になり、5 枚なら 16 ＋ 8 ＋ 4 ＋ 2 ＋ 1 ＝ 31 回になります。6 枚なら 32 ＋ 16 ＋ 8 ＋ 4 ＋ 2 ＋ 1 ＝ 61 回、･･･ということになります。1 の数字は 1 回おきに動いているのがよく分かります。

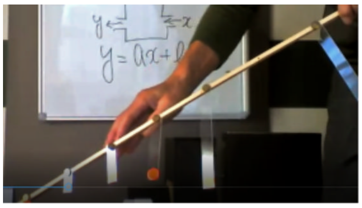
こんな風に、道具がなくてもハノイの塔は行えます。

参加者から質問や意見を伺いました。

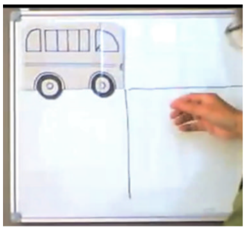
Ｋｒ氏：横型のブラックボックスを縦型に変えたのは、秋田の和田先生です。右から左でも左から右でもいいというと、原因と結果がハッキリしないが、上から入れると下から出てくる縦型のブラックボックスの方が原因と結果がハッキリするのでいい、と主張をされていました。しかも、関数表(対応表)も上がｘで下がｙです。それとも一致するので、縦型のブラックボックスの方が横型のよりいいと主張をされていました。それ以降、縦型が多くなってきました。縦型がいいのか横型がいいのか、一つのテーマですね。　→　私は、最初の頃、式とイメージを一致させるということがありました(右図)。だから、右から入れて左から出すというものを作りました。縦型のブラックボックスを知ったのは、修善寺大会のお土産として、三川先生が考案された折りたたみ式のブラックボックスです。それから縦型のブラックボックスを作るようになりました。私は、人が持っていて、いいなと思うと、自分で作りたくなるのです。　→　秋田の和田先生が作ったのは何年か忘れましたが、その時、ブラックボックスの上から入れて下から出てくる、そして、ブラックボックスを上下逆さまにすると、また上から入れて下から出てきて、『逆関数』にもなっていました。どんな仕組みなのかと驚きました。



Ｔｋ氏：どこまで飛ぶかという教具をもう一度見せて下さい。止めるところと落下地点のところはどうなっていますか。シールなどを貼っているのですか。　→　透明な薄いアクリルの板を細長く切り、上は画鋲で細長い角材に止めて、下は赤い丸いシールを貼っています。片付けるときは画鋲だから、アクリルの板ははずしています。細長い角材には、等間隔で印を付けてあります。　→　画鋲の自由度が良くって、赤いシールの所に錘などが付いていたら、真っ直ぐ下に向き、手で動かさなくても済むのかなとも思いました。



市橋氏：先ほど自動車が落ちたという事故の話しをしましたが、自動車を作りました。「自動車が時速 100km で走って、崖から落ちて 30m も先に行ったのなら、車の前の部分は潰れている筈だ。」という生徒が現れ、悔しくって、次の時間までに潰れる自動車を作りました。これはおおうけでした。



初速度 v_o で、角度 θ で、蹴り出したとき、

t 秒後の位置 (x, y) は

$$x = v_o \cos\theta\, t$$

$$y = v_o \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

となり、再び地面に着くので $y=0$ とおくと

$$0 = v_o \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 = t(v_o \sin\theta) - \frac{1}{2} g t$$

$$0 = v_o \sin\theta - \frac{1}{2} g t \quad \therefore t = \frac{2 v_o \sin\theta}{g}$$

これを代入して

$$x = \frac{2 v_o^2 \sin\theta \cos\theta}{g} = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g}$$

となるので、$\theta = 45^\circ$ の時が最大になる

Ｋｏ氏：私も、何処まで飛ぶのかという教具を作ったことがあるのですが、吊すのを糸でおこなったので、絡まってしまい、やりづらかったです。市橋先生のを見ていると、あのくらい動きづらい方が逆にやりやすいと思いました。　→　糸も考えました。糸は落ちる距離が見えるのでいいかとも思いました。簾のようになって見えます。でも、それがない方が飛んでいくという感じがすると思いました。　→　これは、高校の二次関数でやったのですか。　→　中学の二次関数でやりました。二次関数の終わりに、バスの飛び出しを扱ったので、その延長上として、やりました。

Ｔｋ氏：関数の教え方で、ブラックボックスから始める人と、物理現象で、等速度運動なら電車を走らせるとか、二次関数ならビー玉を転がすとかがあります。北海道でも関数の発表になると、ブラックボックス派と運動派とがいて、議論になりますが、結論は出ません。こちらでは、関数指導の典型というものがあるのでしょうか。どんな議論をしていますか。　→　私の周りでも同じ議論があります。好き嫌いというと語弊があるかも知れませんが、好き嫌いがあるようです。私は、両方やります。最初にどちらをやるかは、生徒の顔を見て決めています。今年は、中 1、中 2 の関数はブラックボックスで入りました。中 3 の二次関数は、ブラックボックスを見せながら、カーテンレールでやりました。高校 1 年生の二次関数は、振り子と雨樋をつくる(断面積を最大にする)から入りましたが、ブラックボックスをいつも黒板に貼付けていました。関数の授業の時は、いつも黒板の左上に縦型のブラックボックスを貼付けています。生徒が困ったようなときに、ブラックボックスの余分のカードを用意しておいて、「今やっているのは、何が入ったら何が出てくるんだ」と説明するようにしています。一番最初は、ブラックボックスでなぞなぞから始まって、関数を定義して、具体的な話しをします。振り子もカーテンレールも落体もやります。落体では、紙一枚とテニスボールを落として、「どちらが早い」とやると、もちろんボールのが早いですが、クシャクシャッと紙を丸めると、ほとんど同時に落ちます。教卓の上に机を重ねて、ほとんど天上から落としても、ほとんど同時に落ちます。　→　量に基づく･･･が好きな方は物理とか速さとかで行い、現代化･･･が好きな方は、写像の概念が大事だとうことでブラックボックスから、数と数との関係で関数に入ってい

ます。議論をしても、いつも結論は出ません。

＜月例研＞

1. 作問の背景 ： 中原克芳氏

数学の教師は問題を作りますが、問題集の問題の数値をただ変えるだけでなく、何らかのネライみたいのがあると思います。ただ、毎回そうしたら大変だから、定期テストの時に 1 問だけ作るとしたら大変ではないと思います。そうしたら、面白い問題が貯まっていくので、その幾つかを紹介します。

〔問題 1〕は、前回組合せの話をしたので、持ってきました。組合せと順列の違いがよく分かるようにと作りました。「3 人に 1 つづつ配る」から順列で、「1 人に 3 つ配る」から組合せです。1 つの設定で、C と P の問題を出すというのがネライです。また、ここに出てくる 3 人の名前は、その学年を担当されている先生の名前で、また、5 つのお菓子の名前も先頭の文字を取り出せば「くみあわせ」となっているというような遊びも入れています。

〔問題 2〕は、前回塩沢先生が重心の話しをされたので、持ってきました。PG : BG も求めることが出来ます。補助線として BG を引き、その延長線が AC と交わる点を M とすると、M は AC の中点だから、AM : MQ : QC ＝ 2 : 1 : 1 になり、BG : GM ＝ 2 : 1 なので、△ ABM でメネラウスの定理を使えば、AP : PB は求まります。

今回、話しをしたいのは〔問題 3〕です。数値も 1,2,3,4 と並べてみました。これは遊びです。この問題のネライは 3 つあります。おの 1 つは、今の線分の長さの数値です。2 つ目は、三平方の定理を使いますが、直角三角形が見えないようにしてあります。これと同じようなことは二等辺三角形の二辺が与えられたときの高さを求める問題もそうです。3 つ目は、平方の処理のことで、ルートの中が小さくなります。それは、整数ｍとｎが互いに素の時、m^2+n^2は平方数で割りきれることです。ただ、商は平方数でない方がいいです。こような数は、他に、1 と 7、2 と 11、9 と 13」、1 と 18 などがあり、これはラグランジュの恒等式を使うと作れます(このことは、後日中原先生から解説が送られてきたので、レポート集 12 月号に掲載します)。

参加者から質問や意見を伺いました。
Ｋｒ氏：問題を作るのは面白いし、教師の勉強にもなります。勉強になるのなら、是非とも生徒にも問題を作らせたい。そうしたら、生徒も問題作りの楽しさを味わえるのじゃないか。例えば、問題 1 のような問題をやったら、生徒に問題 1 のような問題を作りなさいと言うと喜んで作るんじゃないか。生徒に問題を作って貰うようにしてから、生徒に新しい知恵を貰うことが何回もあって、勉強になりました。先生が問題作りを楽しんでいることが十分に分かったので、今度生徒に問題作りをさせたらいかがですか。　→　今度作らせてみます。

Ｉｍ氏：教師を目指している学生です。問題作りの所で、ただ数値を変えることしかやってこなかったので、ラグランジェの式を使ったりして問題を作ることなど、参考になった。　→　あれは最初から思いついたのではなくて、最初は、互いに平方数の和で平方数が出てくるようにするにはどうしたらいいかを考えていたときに、ラグランジェの恒等式があったことを思い出しました。考えたら今まで習ってきたことが使えるなと気づきました。

Ｋｍ氏：問題を解いていて面白かったです。問題 1 の 5 つのお菓子が 1 つずつでしたが、3 個以上と増やしてもいいかなと思いました。また、問題 2 では、自分で最初やったときは、PQ と BC を延長して交点を出して、メネラウスの定理を 2 回使いました。そんな補助線を引いた生徒はいませんか。　→　実は、この問題ではなく違う問題を生徒にやらせました。それは、外分点をやらせたく、外分点ならもっと要らない点が沢山出てくるので、それを生徒にやらせて、ここではもっと単純な問題にしました。　→　この問題、面白いと思って、今度使わせて貰おうと思います。この問題、いろいろな補助線が引けて、いりいろな解き方ができます。BG を結ぶ方が綺麗ですが、PQ と BC の延長線の交点をまず考えました。その方がメネラウスの定理が使いやすかった。生徒にやらせたら、いろいろな補助線を考えて面白いなと思います。　→　重心を教えるときに、定義の「3 中線の交点」だということと、性質の「重心は中線を 2 : 1 に内分する」ということ、これを覚えておきなさいと言っていますが、その 2 つとも使うので気に入っています。

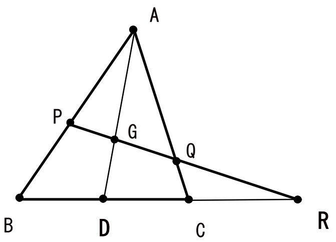
草薙：僕もＫｍ氏のように、PQ と BC の延長線を引いて考えましたが、中原先生からそんな難しくしなくても出来るよと言われて驚きました。
Ｋｍ氏：メネラウスを 2 回使えば出来るよね。
草薙：僕は、交点をＲ、BC の中点を D として、BD : DC : CR ＝ 1 : 1 : αとして、連立方程式にしました。

Ｋｒ氏：ラグランジェの恒等式の話しがありましたが、それは、ａ²＋ｂ²という数を ２ つ掛け合わせると、それもａ²＋ｂ²という形で表せるという意味ですね。これと同じようなことですが、ａ²－ｂ²という数を ２ つ掛け合わせると、それもａ²－ｂ²という形になるかというとなるんです。このことも生徒に問題を作らせたときに知りました。

因みに、草膀の解答を紹介します。
問題 1
(1)　まず、５つのお菓子から３種類のお菓子を選ぶのは、${}_5C_3$ 通りあり、その選んだ３種類のお菓子を３人に配るので、配り方は、3! 通りあります。
従って、積の法則により、${}_5C_3 \times 3! = {}_5P_3 = 5\times4\times3 = 60$ (通り)あります。

(2)　國岡君に配るお菓子を５つの中から３つを選べばいいから、${}_5C_3 = \dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 20$ (通り)あります。

問題 2



BC の中点を D、PQ の延長線が BC の延長線と交わる点を R Rとし、BD：DC：CR＝1：1：α とすると、△ ABD でメネラウスの定理から

$$\frac{AP}{RB}\times\frac{BR}{RD}\times\frac{DG}{GA}=1 \text{ より、} \frac{AP}{RB}\times\frac{2+\alpha}{1+\alpha}\times\frac{1}{2}=1 \quad \cdots\text{①}$$

△ ABC でメネラウスの定理から、

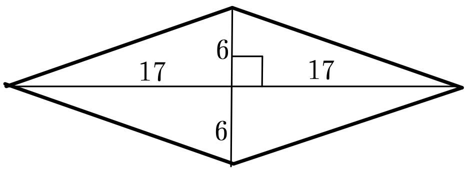
$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BR}{RC}\times\frac{CQ}{QA}=1 \text{ より、} \frac{AP}{PB}\times\frac{2+\alpha}{\alpha}\times\frac{1}{3}=1 \quad \cdots\text{②}$$

①と②の辺々をわり算して、

$$\frac{\frac{AP}{PB}\cdot\frac{2+\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{AP}{PB}\cdot\frac{2+\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{1}{1} \qquad \frac{\frac{1}{2+2\alpha}}{\frac{1}{3\alpha}}=1 \qquad \frac{3\alpha}{2+2\alpha}=1 \qquad 3\alpha=2+2\alpha \qquad \therefore\ \alpha=2$$

これを①に代入して、 $\dfrac{AP}{RB}\times\dfrac{2+2}{1+2}\times\dfrac{1}{2}=1 \qquad \dfrac{AP}{RB}\times\dfrac{2}{3}=1 \qquad \therefore AP:PB=3:2$

問題 3



ピタゴラスの定理より、

$$6^2+17^2=x^2 \qquad x^2=36+289=325 \qquad x=\sqrt{325}=5\sqrt{13}$$

従って、菱形の辺の長さは、$20\sqrt{13}$

2. ずっとやりたかった「微分・積分」授業記録 ： 松元大地氏

今年、教員になって 10 年目ですが、この話しは昨年のもので、教員になって 9 年目で始めて高 2 を担当して、微積分の授業をしました。微積分の授業では、あんなことをしよう、こんなこともしたいと思い続けていたので、それを出し尽くそうと、9 年間の集大成だと思っていました。カリキュラムをかなりいじっていて、高 2 の中で、二項定理や数列や関数の復習などを入れて、教科書と近づけるようにはしていますが、微分積分が大きなテーマになっています。先ほどのブラックボックスの話しでも出ていましたが、微積分の中で物理現象なども取り入れてやっていきたいと思っています。

授業をやった後で、振り返るために生徒に配ったプリントです。微分は、少しだけ話します。加速するビー玉の瞬間速度を求めるということでスタートしました。この前に中学の関数のグラフを描くなどの復習もしています。また、高いビルからビー玉を落としたらどうなるだろうという仮想の実験から二次関数に拡張をしています。ビー玉の実験は、黒板にカーテンレールを置いて行っています。
だんだん早くなっていくので、本当の秒速なんて計れないよね、という生徒もいます。では、平均の速さにしようと言うと、生徒は納得できなくって、区間を短くしていくというようにして、進めていきました。すると、時間 0、距離 0 で 0 ÷ 0 になって、この答えは何でもいいよということを、前回の月例研で名雪先生のレポートで、話しをしたのが、H2 数学 No.11 の右側部分です。このことはずっと忘れないで、いつか話しをしようと思っていました。

積分は、自然数の和、2 乗の和、3 乗の和ということを先にやっておいて、 $y=x^2$ のグラフの x 軸と

$x=1$ で囲まれる部分の面積を求めようと、区分求積法で行い、その確認として、生徒にグラフを切り取って貰ったもので、上手く切れていそうな 3 人の分を選んで、面積天秤で行いました。 $y=x^3$ のグラフは自分が切った物を使いました。積分の習熟ということで、H42 数学 No.42 追加のプリントにあるようなグラフの面積が求められることくらいでいいだろうと思います。回転体の体積もあるのでしょうが、それは扱わないで･･･

No.43 のプリントに入り、その当時、新型コロナのはやり初めだったので、それを教材としました。全世界の新規感染者のグラフ(2020 年 1/1 ～ 2021 年 2/1)を二次関数のグラフに近似して、そのグラフの面積が累積感染者の総数になることを確認して計算をしました。2021 年の 1/15 には 1 日に約 76 万人の感染者が出ていて、2020 年 1/1 からの様子が、およそ $y=5.7x^2$ のグラフの形になります。2021 年 1/27 までの計算ではおよそ 1 億人になりました。さらに、No.43 では、その計算は、実際と合っていたことを示して、累積感染者数が 2 億人になるのを予想をしています。実は 2021 年の 1/7 をピークにして感染者数は減少に転じています。

次に、テーマとしたのは、「空気に重さってあるの？」という問いかけから始まります。高校生でも、空気の重さはないと思っている子もいるし、重さはあると知っているけど、本当は重さはないんでしょという子もいます。いろいろ議論した後で、じゃやってみようと、ガスボンベの重さを量ってから、空気入れでガスボンベに空気を沢山入れて、もう一度重さを量ってみます。確かに重くなっていることが分かります。地上での 1cm ³の立方体の空気の重さは 1.2mg になりますが、1m ³になると、1200g になります。では、地上の 1m ²の部分の上空までの空気の柱を考えると、その重さはいくらになるのかという計算をしました(No.45)。この計算は凄く大変で、ガスボンベの重さを量る辺りは、生徒がワイワイやっていましたが、この計算では静かになりました。そこで、キチンとした計算を書き込んだプリント No.46 を配りました。物理現象ということで、どうしても扱いたかったことです。

最後に、微積のまとめとして、自然落下では、落としてから x 秒後の速度は 9.8 x (m/s)になるので、そのグラフを描いた物を示して、このグラフの下の面積は何を表すか、ということを考えて貰いました。「累積距離」ということから「距離」ということに落ち着きました。このことは微分の逆をやっているのですが、生徒はそのことに気づいていません。半年以上前に瞬間速度を求めるということをやっているけど、ずっと積分をやっていて、その相互関係には気づいていません。気づかない方が面白くって、微分は積分の逆演算だと、積分は微分の逆演算ということは一切話しをしていません。そこで、次の授業で、微分の時、 $y=4.9x^2$ という距離の関数が出てきて、微分したら、 $y=9.8x$ という速度の関数がでてきました。ここで、積分は微分の逆だという話しをします。さらに、速度の関数を微分したら････加速度になるという話しをしました。こうして、微分することによって分かる法則(加速度一定)もあるし、積分することによって分かる法則もあるということで、ケプラーの第二法則(面積速度一定)の話しをしました。文系の子がドンドン離れていくのが分かりました。

最後の課題として、トルストイの『戦争と平和』の中に「積分」の記述があり(AMI の誰かのプリントにありました)、その部分をプリントして黙読して貰い、トルストイは「歴史とは積分である」といっているが、そのことについて、「なぜならば･･･」と文章でもイラストでもいいから書いて下さいとしました。
歴史の年表などは折れ線グラフみたいで、そのグラフの下の面積を解明しないと歴史が分からない、とか、戦争でも、将軍の下の名もなき兵士のことを描かないと書けないとトルストイは長い小説の中で書いている。兵士や農民がいて歴史が作られているというようなことを多くの生徒が書いています。選挙も同じです。一人一人の 1 票がないと成り立ちません。

参加者から質問や意見を伺いました。
Ｋｒ氏：積分の到達目標を何にするのかという話しは面白かった。トルストイの文章を始めて知りましたが、これも 1 つの到達目標でしょう。岩手の宮本先生は、独楽を作ることを到達目標にされていました。私は、重心までは難しくて、速さを積分したら距離になるという所まででした。出来れば、宮本先生のように独楽作りまでいけば、皆が楽しめるのでいいと思いますが、やはり、重心の概念はは難しいし、でも独楽作りは 1 つの到達目標だと思います。宮本先生の実践は、段ボール紙を 1 人 1 人に 3 次曲線を切って渡して、その曲線の式を示します。しかも、1 人 1 人の曲線は違っています。それで、重心の計算をして独楽を作って、計算と独楽を提出するというものだったと思います。

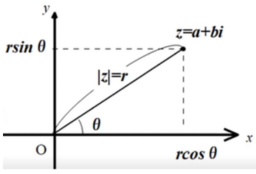
Ｋｏ氏：自由の森の授業の様子で、30 年くらい前に何回か行った公開研究会とか増島先生から伺った話から、僕が持ったイメージというのは、何か授業をするときに、教科書なども一切使わないので、事前に先生達が協議をして、今回微分の教材はこれでいこうという共通のプリントなどを用意して、誰がやっても同じような授業をするというイメージを持っていました。今の松元先生の話を聞いていると、ご自身が先行してやって、それを周りの先生方が見るという感じでした。今の自森の先生方が共有する部分はどうなっていますか。 → Ｋｒ氏がいらっしゃった時代から積み重なって、自森のカリキュラムが出来上がっているのですが、私が自森で学んだやり方より、もっと面白いものが何かあるんじゃないかと思います。僕が授業をするときは、何か新しいことをやらせて欲しいと他の教員に伝えて、やった後で報告をしています。生徒の様子を見て、次の授業を変えていくので、事前には報告は出来ません。コロナのグラフの授業も前日にパッと思いついて、プリントを作って授業をしたの

で、誰かに相談したりはしていません。だから後になって報告をしています。　→　自森の財産がある程度あるが、それにとらわれないで、自分で何か面白いことはないかと考えて実践することは、みなさんがやっているのですか。　→　それは前々から許されていることです。　→　自分たちの学校では、教科書通りにやるにしても、事前に協議などは出来ないんです。それが自森では協議できているというのがうらやましく思っていました。今は、事前に協議するようなことはないのですか。　→　1 年間が終わった後の研究会で、まとめたプリントを配っていますし、授業の様子も話したりしたり、生徒の口からも伝わっていると思います。そうしたら、次にはコレを使ってみたいという教員もいます。でも、積分はヒルベルトの無限の話しを好きな教員もいて、それで生徒達に議論を巻き起こしたいという者もいて、僕は、現象や実験でで議論を巻き起こしたいと思っています。そこは学内の議論が結構ありました。

Ｋｎ氏：累積距離という言葉が生徒から出たというのがありましたが、速度の関数でしたね。では、累積速度が距離になるという感覚が掴めれば、より正確になったと思います。　→　生徒は感覚的には掴んでいると思います。秒速とは 1 秒間に進んだ距離だから、0.1 秒間に進んだ距離を積み上げているのから、累積距離なんだという感じだと思います。

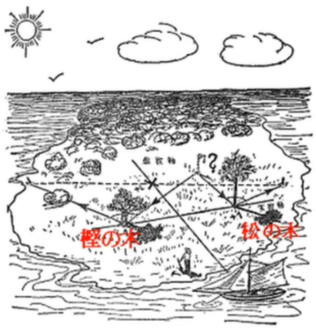
3. 1のn乗根と単位円に内接する正多角形の性質、他 ： 小森弘三氏

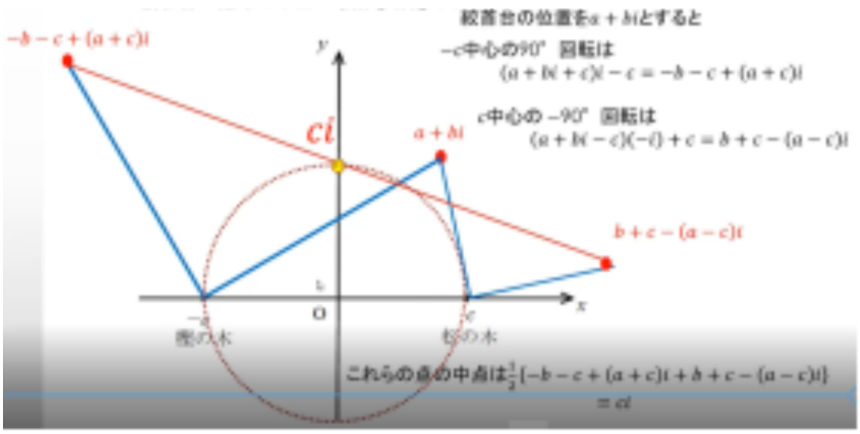
学校設定科目で、高 3 の文系で週 1 回 2 時間で数学Ⅲをやるという授業があり、ここ何年間か担当をしています。今年の 2 学期に複素数平面の内容を扱ったときの話しをします。3 回の 6 時間で複素数平面を授業したのですが、勿論、全部の内容は出来ないし、文系だから受験には関係ないので、だから、印象深く残る授業にしようとやっています。これは、3 回目の複素数平面の最後の 2 時間の授業です。かなり時間が空いたので、復習から入りました。



2 次方程式が必ず解を持つように考え出された様数ですが、複素数平面の発明によって、平面上の点として表現できるようになりました。複素数平面上のを結んで描かれた図形に、複素数ｚを掛けることによって、回転＋拡大させる能力があることが分かり、それをよく分かるように極形式があります。

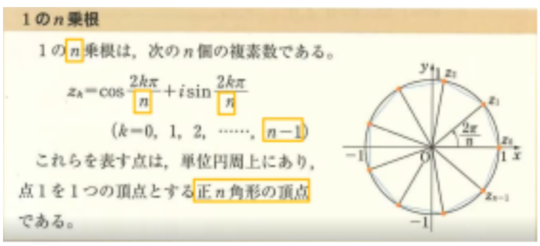
そして前回の課題としてやった問題が、ガモフの宝探しの問題です。右図は、ガモフの本にある実際のイラストです。樫の木と松の木を結ぶ直線を実軸にして、その中点から垂直にあるのを虚軸にして、絞首台の位置が分からないのでａ＋ｂｉとして、樫の木に向かって 4 歩いて、樫の木にぶつかったら、直角に右へと曲がって、同じ歩数だけ歩いて第 1 の杭を打つので、その場所は、(ａ＋ｂｉ)－(－ｃ)を 90°回転したことになるので、ｉを掛けて、(ａ＋ｂｉ＋ｃ)ｉになります。また、絞首台から松の木に向かって歩いて、ぶつかったら左に直角に曲がって、同じ歩数だけ歩いたところに第 2 の杭を打つので、その場所は、(ａ＋ｂｉ)－ｃを－90°回転したことになるので、－ｉを掛けて、(ａ＋ｂｉ－ｃ)(－ｉ)となります。宝は、この 2 つの杭の中間点にあるので、中点を計算すると、ｃｉとなり、絞首台の位置には関係がなくなります。





つまり、樫の木と松の木を結ぶ線分の中点から垂直に樫の木や松の木までの距離と同じ分だけ進めばいいことになります。

次は、ドモアブルの定理を使って、$z^n=1$ の方程式の解を考えます。最初は教科書と同じように、$z^3=1$ を考えます。計算していくと、1 の 3 乗根を複素数平面上に図示すると、正三角形の 3 頂点になります。



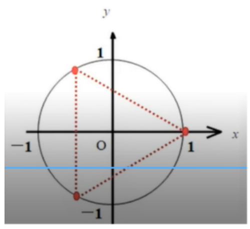
1のn乗根

1の$\boxed{n}$乗根は，次のn個の複素数である。

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{\boxed{n}}+i\sin\frac{2k\pi}{\boxed{n}}$$

$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \boxed{n-1})$

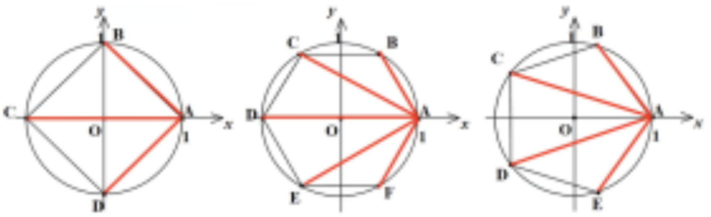
これらを表す点は，単位円周上にあり，点1を1つの頂点とする$\boxed{\text{正}n\text{角形の頂点}}$である。



さらに、1 のｎ乗根の式をまとめ、複素数平面上では、正ｎ角形の頂点になります。この後、教科書では、方程式ｚｎ＝αだとか、図形の問題がありますが、おまり面白くないし、やったからって嬉しいこともない

んじゃないかと、生徒に「これからは教科書とは違うことをやるよ」と言って、「単位円に内接する正多角形の性質を調べてみよう」としました。

単位円に内接する正三角形 ABC では、一つの頂点 A から他の 2 つの頂点を結んだ線分の長さの積 AB × AC は 3 になります。では、単位円に内接する正方形、正六角形、正五角形の場合を計算してみて、正 n 角形の場合はどうなるかを予想してみようということを行いました。



正方形では、$AB \times AC \times AD = \sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} = 4$

正六角形では、$AB \times AC \times AD \times AE \times AF$

$= 1 \times \sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{3} \times 1 = 6$

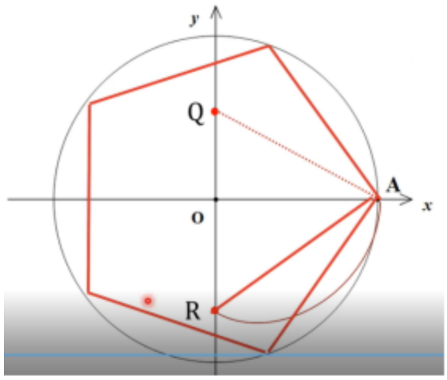
正五角形では、

$AB \times AC \times AD \times AE$

$$= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \times \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 5$$

となります。だから、正 n 角形なら n になることが予想出来ます。このことを証明するのですが、このことは、AMI の誰かから教わりましたが、一番感動しました。複素数平面をやって一番嬉しかったのは、この定理なので、複素数平面の最後に扱おうと思っていました。生徒達に証明させるのは無理なので、証明を理解しようと最後にやりました。証明の詳細は、レポートをご覧下さい。

少し時間があったので、先ほどは与えた cos72 ° の値を求め、円に内接する正五角形を定規とコンパスで作図する方法の話しをしました。教科書には一辺が与えられた時の正五角形の作図は載っているけど、円に内接するのは載っていません。まず、円を描いて、半径の中点 Q を取って、Q を中心とした半径 AQ の円を描いて y 軸との交点を R とする。AR が正五角形の一辺の長さになります。



$$AQ = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ だから } OR = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$AR^2 = AO^2 + OR^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$AR = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

先ほど、積分の目標はという話しがありましたが、複素数平面の目標は、「単位円に内接する正 n 角形の 1 つの頂点と他の全ての頂点を結んだ線分の長さの積は n になる」と僕は思います。

参加者から質問や意見を伺いました。

Ｔｋ氏：本題は多角形の所だったと思いますが、最初のガモフの問題を複素数平面を使って出来るんだと知りました。宝の位置は（０，ｃ）になりますが、初等幾何の方法で、回転の合成を使って求めたのと一致しました。

→　嘗て、黒田先生から初等幾何の方法で教えて貰いました。また、理系の生徒にやったときに、力尽くで図形で解いた生徒もいました。　→　直角だから、このくらいの計算で楽しめるけど、一般角で $\cos\theta + i \sin\theta$ でやったら凄く大変でした。

Ｋｒ氏：ガモフの問題ですが、その本には、この青年が虚数を知っていれば宝を発見できたのに、虚数を知らなかったばっかりに発見出来なかった、と書いてあり、虚数を知らないとこの問題は解けないと思っていたんだけど、何年か前に虚数を使わないで考えてみようとしたら、案外簡単でした。ここに絞首台があると考えて、樫の木まで進んで向きを変える。また、絞首台から松の木まで進んで向きを変える。斜線を引いた図形をそれぞれ回転させると、正方形が出来ます。また、回転した 2 つの図形は点対称だから、点対称の中心が求めるところで、つまり、正方形の中心が宝の位置になります。先ほどの回転の角を変えたら点対称にならないので難しいですね。