

## ●優秀賞

# 数学における表現力の 育成を目指した 問題解決学習のあり方

長野県長野市立柳町中学校 あら い 新井 ひとし 仁



## 要 約

本研究の目的は、生徒の表現力を育てるための問題解決学習のあり方を検討することにある。問題解決学習では、事象を式やグラフなどに表して考えることが多く、これも表現力の1つだが、数学の問題を解いて終わるとしたら「狭義の表現力」に留まると考える。一方、現実事象を数学的に分析し、結論を得て持論を主張する学習によれば、数学の枠を超えた「広義の表現力」の育成につながるのではないかと考えた。そこで、平成4年以降の7・8月の日照時間と、翌年のスギ花粉飛散量との関係に基づき、平成24年のスギ花粉飛散量を予測して花粉症対策を考える授業を試みた。生徒は、資料を使って平成24年のスギ花粉飛散量を予測し、この結果に基づいて平成24年の花粉症対策について持論をまとめ、主張し合った。このような生徒の姿から、数学的活動の充実を図りながら、生徒の表現力の育成を目指した問題解決学習のあり方に関する私見を示すことができた。

キーワード：問題解決学習、表現力、数学的モデリング、グラフ関数電卓

## 1 研究の目的・方法

新学習指導要領には、「事象を数理的に考察し表現する能力を高めること」の重要性が示さ

れ、さらに「表現する能力」として、「根拠を明らかにして筋道立てて説明したり、自分の思いや考えを伝え合い、それらを共有したり質的に高めたりすることが重要」と述べられている。数学の問題の解き方を解釈し、正しく説明するようなことが含まれるだろうが、これは「狭義の表現力」だと考える。本来、解決する対象は数学の問題に留まらず、生活経験上解決が必要となるものでありたい。そして、その解決のために数学を使い、新たな数学を獲得しながら、最終的には数学の枠を超えた問題に対する結論を、使った数学を根拠にして主張できるようにしたい。これを「広義の表現力」と考える。

そこで、長野市における過去の7・8月の日照時間とスギ花粉飛散量との関係に基づき、平成24年のスギ花粉飛散量を予測して花粉症対策を考える授業を試みた。データを散布図に表し、事象を何らかの関数と見て考えることが要求されるので、統計資料の数学的モデリングが含まれる。また、これを可能にするためにグラフ関数電卓を導入した。授業を行った学級の生徒は、これまでにグラフ関数電卓の使用経験がなく、事前に簡単な操作説明を行っただけの中学校3年生である。このような生徒を対象とした授業における生徒の反応や、ワークシートへの記述を分析することによって、数学の授業におけるグラフ関数電卓の可能性について私見を述べるとともに、数学的活動の充実を図りながら生徒

の表現力の育成を目指した問題解決学習のあり方について考察する。

## 2 教材の概要

### (1) 素材とその分析

#### ① 日照時間とスギ花粉飛散量に関する資料

スギ花粉飛散量は、スギの雄花の成長具合によって左右される。そしてスギの雄花の成長は、前年夏期の気象状況から大きな影響を受け、新聞記事では特に前年夏期（7・8月）の日照時間とスギ花粉飛散量は比例すると紹介されている（図1）。

また、長野市におけるスギ花粉飛散量の調査は平成4年から開始され、平成22年まで行われた。数値は毎年1月～5月の5ヶ月間において、1cm<sup>2</sup>あたりの平面に付着したスギ花粉飛散量の個数の合計として記録されている。

そこで、平成3年（平成4年の前年）以降の7・8月の日照時間と、平成4年以降のスギ花粉飛散量を調べると、次の通りであった（表1）。

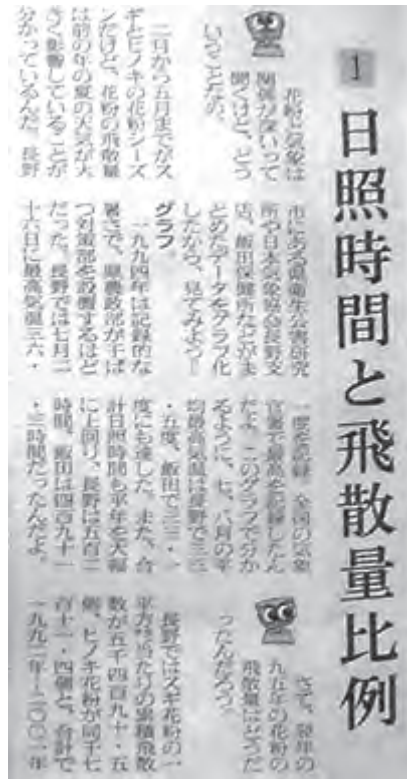


図1 平成14年4月5日 信濃毎日新聞

西暦	平成	前年7・8月日照時間 (時間)	スギ花粉飛散量 (個/cm <sup>2</sup> )	西暦	平成	前年7・8月日照時間 (時間)	スギ花粉飛散量 (個/cm <sup>2</sup> )
1992	平成4	332.9	567.8	2002	平成14	473.8	2622.1
1993	平成5	387.6	2733.4	2003	平成15	419.9	1988.4
1994	平成6	246.0	468.6	2004	平成16	264.8	348.8
1995	平成7	504.6	5490.5	2005	平成17	434.5	4272.4
1996	平成8	375.0	237.5	2006	平成18	300.9	339.3
1997	平成9	417.2	2323.5	2007	平成19	364.6	1107.6
1998	平成10	371.5	814.3	2008	平成20	342.5	2404.1
1999	平成11	287.4	928.8	2009	平成21	396.0	3748.2
2000	平成12	378.6	3919.6	2010	平成22	265.2	570.7
2001	平成13	458.9	3380.7				

表1 日照時間とスギ花粉飛散量

## ② 日照時間とスギ花粉飛散量の関係の分析

日照時間とスギ花粉飛散量の関係をとらえるために、表1の資料に示した数値をグラフ関数電卓に入力して散布図に表すと、図2・図3のようになる。散布図の点の散布状況から、前年7・8月の日照時間が多いと、スギ花粉飛散量も多くなる傾向にあることが読み取れる。したがって、数学的に比例だと断定することは難しいが、およそ右上がりの直線のグラフで回帰してよさそうだと考えられる。

このような考えに基づき、1次回帰グラフとその式を求めると図4・図5のようになり、グラフは右上がりの直線、式はおよそ

$$y = 16.8x - 4198$$

となることがわかる。相関係数は約0.78なので、比較的正の相関が高く、1次回帰グラフを求めることの妥当性も認められる。

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	HOUR	COUNT		
16	364.6	1107.6		
17	342.6	2404.1		
18	396	3748.2		
19	285.2	570.7		
				570.7

図2 数値を入力した様子

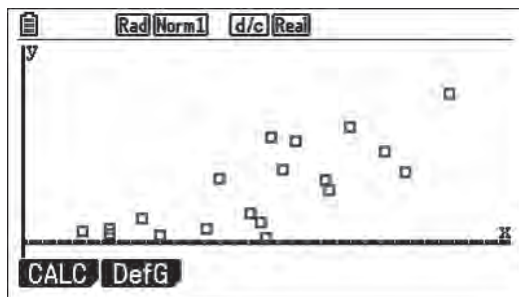


図3 散布図

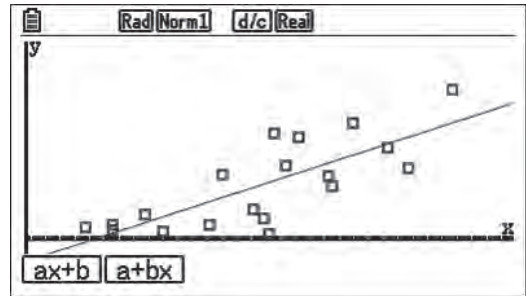


図4 1次回帰グラフ

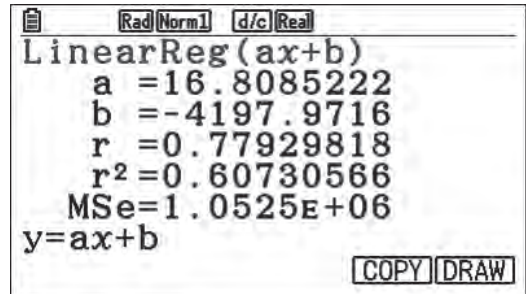


図5 1次回帰グラフの式

## (2) 素材の教材化

### ① 授業の背景

授業は、横浜国立大学附属横浜中学校の3年生を対象に行った。したがって、できれば横浜市の資料を使ったかったが、スギ花粉飛散量の統計資料が得られなかったため、長野市の資料を使った。地域は違っても数学の内容として大切にしたいことは変わりなく、追究ができない要因ともならないので、長野市の資料を使うことには特に問題ないと考えた。

また、授業は平成23年8月2日で、7・8月の日照時間は得られていない時期だったので、7月の日照時間を2倍して提供することとした。7月の日照時間は193.8時間だったので、約194時間としてこれを2倍し、388時間として考えた。ちなみに、8月末に確認したところ、8月の長野市の日照時間は182時間で、実際には375.8時間だったので、それほど大きな差はなかったものと受け止めている。

### ② 平成24年のスギ花粉飛散量の予測

表1の資料から得られた1次回帰グラフにおいて、 $x = 388$ のときの $y$ の値が平成24年のスギ

花粉飛散量の予測値になる。これは、1次回帰グラフ上の点の座標を読み取ることや、1次回帰式 $y=16.8x-4198$ に $x=388$ を代入して計算することで得られる。1次回帰グラフ上の該当する点の座標を読み取ると、予測値は約2324個/cm<sup>2</sup>になる(図6)。また、 $y=16.8x-4198$ に $x=388$ を代入すれば、約2320個/cm<sup>2</sup>になり、両者には大差ない。

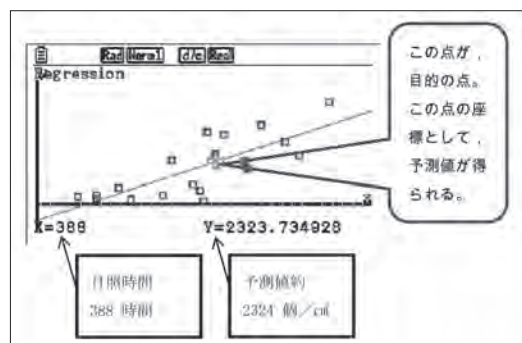


図6 1次回帰グラフ上の座標から予測

### ③ 「広義の表現力」の育成を目指した教材化

生徒に数学の有用性を認識させるためには、生徒自身が追究を通して「数学を使うと、こんなにいいことがあるのだな」と実感できる授業を行うことが必要である。そのためには、数学を数学の枠の中だけで終わらせるのではなく、数学の枠を超えたところに目的をおき、その目的を果たすために数学が使われるような授業にしたいと考える。

平成24年のスギ花粉飛散量を予測するだけでも数学的手法を学ぶ機会となるが、これだけでは「何のためにスギ花粉飛散量を予測するのか」ということが不明確である。そこで、「来年の花粉症対策」として、過去の統計資料(表1)を参考に平成24年のスギ花粉飛散量を予測するとともに、得られた予測値と過去のスギ花粉飛散量を比較して、平成24年のスギ花粉飛散量はこれまでに比べて多いのか少ないのかを判断し、その判断に基づいて平成24年の花粉症対策を考え、主張する授業を構想した。生徒は、現実場面から得られた資料に基づいて、数学を使って数学的結論を得て終わるのではなく、再

度現実場面に立ち返って考え、持論をまとめて主張することになる。つまりこれは、数学的モデリングの1つの形をとっており、数学を使いながらも数学以外のことで論議が展開する。その結果、数学の問題を解いて終わるのではなく、数学の枠を超えた「広義の表現力」の育成につながるものと考えた。

### 3 授業の実際

- (1) 領域 関数領域(「関数 $y=ax^2$ 」未習の3年生対象)
- (2) 題材「来年の花粉症対策」
- (3) 授業実施日 平成23年8月2日
- (4) 授業実施校・学級 横浜国立大学附属横浜中学校・3年B組(45名)
- (5) 本時の目標

日照時間とスギ花粉飛散量の関係を散布図で表すことにより、前年7・8月の日照時間とスギ花粉飛散量には正の相関がありそうだと考え、1次回帰グラフや式を求めて来年のスギ花粉飛散量を予測して花粉症対策を考えるとともに、数学の有用性を実感する。

- (6) 本時の展開(次ページ)

#### (7) 授業の様子

- ① どのような関数と見ることが妥当か検討した様子

統計資料(表1)に基づいて散布図を求めた後、多くの生徒は1次回帰グラフを求めた。しかし、N生は点の散布状況からどのようなグラフ(関数)と見て考えることが妥当なのかについて悩み、グラフ関数電卓に複数の回帰グラフを表示して観察していた。そこで、N生が使っていたグラフ関数電卓の画面を投影して、学級全体に問いかけた(図7)。

つまり、点が散布している部分では、いずれの関数で回帰しても見かけ上グラフには大差ないため、どれを使っても予測値はそれほど変わらないことが推察される。何気なく直線で考えて終わるのではなく、より適切なモデルはどれなのかを考えた姿である。

主な学習活動と予想される生徒の反応	指導上の留意点
<p>1 花粉症の話聞きながらスギ花粉飛散量に興味をもち、課題を把握する。</p>	<p>◇スギ花粉がもたらす花粉症や、花粉症の対策などについて説明する。</p>
<p>来年のスギ花粉飛散量を予測して、花粉症対策を考えよう。</p>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>夏が暑いと、スギの雄花がよく成長するから、花粉がたくさん作られるのだろう。</li> <li>でも、これまでのある程度長い期間の資料がないと、スギ花粉飛散量を予測することは難しい。</li> <li>過去の日照時間とスギ花粉飛散量のグラフをかけば、傾向がわかって予測できそうだ。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◇新聞記事(図1)を示しながら、スギの雄花の成長具合によって、花粉の飛散量が変わることを伝える。</li> <li>◇長野市の過去の日照時間とスギ花粉飛散量の資料を提示する。</li> <li>◇グラフ関数電卓を準備する。</li> </ul>
<p>2 日照時間とスギ花粉飛散量の資料に基づいてグラフや式を求め、スギ花粉飛散量を予測する。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>それぞれのデータを入力し、日照時間を横軸(x)、スギ花粉飛散量を縦軸(y)として散布図にすると、正の相関関係が認められそうだ。</li> <li>1次回帰グラフの式は、およそ<math>y = 16.8x - 4198</math>になっている。</li> <li>今年の7月の日照時間は約194時間なので、これを2倍して<math>x = 388</math>となり、これを<math>y = 16.8x - 4198</math>に代入して、およそ2324になる。だから、来年のスギ花粉飛散量は2324個/cm<sup>2</sup>程度だと予測できる。</li> <li>昨年のスギ花粉飛散量は約570個/cm<sup>2</sup>だったから、2000個/cm<sup>2</sup>ともなると前年の約4倍にもなるということだ。</li> <li>自分は花粉症がひどいから、早めに対策を考えておかないと辛くなりそうだ。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◇グラフ関数電卓の使い方は、状況に応じて適宜教える。</li> <li>◇「散布図」「相関関係」「回帰グラフ」などの意味は、適宜教えながら進める。</li> <li>◇散布図の点の散布状況を観察させながら、「前年7・8月の日照時間が長いと、スギ花粉飛散量はどのようにになっていると考えられるか。」と問い、正の相関関係がありそうだと認めさせる。</li> <li>◇1次回帰グラフの式(<math>y = 16.8x - 4198</math>)が導き出された後、<math>x = 388</math>のときのyの値を求めさせる。</li> <li>◇スギ花粉飛散量の予測値について、過去の実測値と比較させ、これまでと比べて多いのか少ないのか、具体的な根拠を取り上げて判断させる。</li> <li>◇これまでの各自の花粉症はどのような様子だったか、振り返りながら花粉症対策を考えるように促す。</li> </ul>
<p>3 花粉症対策について考える。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>来年のスギ花粉飛散量は、これまでの平均値よりも若干多そうだから、花粉症がひどい人は早めに薬を準備するなどしておいたほうがよさそうだ。</li> <li>昨年に比べればかなり多そうで、私は昨年花粉症で辛かったから、油断しないで早めに対策を考えたい。</li> <li>日照時間以外にも、色々な要因が影響して飛散量が変わるのだな。複数の要因を使って考えれば、一層正確な予測ができそうだ。</li> <li>数学は身近なところで有効に使われているのだな。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>◇過去の経験に基づき、花粉症対策としてどのような準備をしておけばよさそうか、各自の考えをまとめさせる。</li> <li>◇日照時間以外にも、降水量などが飛散量に影響を及ぼすことを紹介する。</li> <li>◇現実事象のモデル化を行って近未来を予測し、結論をまとめた今回の学習について、感想をまとめさせる。</li> </ul>

このようなやりとりを通して、日照時間とスギ花粉飛散量の関係を1次関数と見て考えてよさそうだということを確認し、改めて個人追究を続けた。

## ② 平成24年のスギ花粉飛散量の予測と判断

線型モデルの妥当性を認めた生徒は、平成24年のスギ花粉飛散量の予測を行った。1次回帰グラフの座標を読み取ることから、予測値を約2320個/cm<sup>2</sup>と予測したO生は、近くにいたM生と次のように会話をした(図9)。

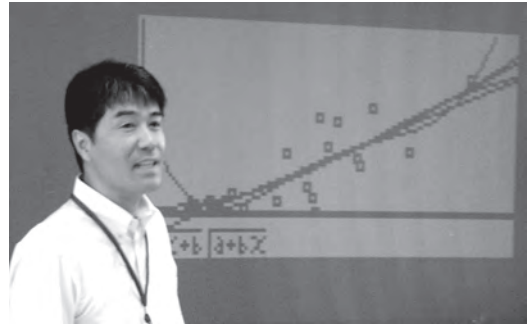


図7 N生のグラフ関数電卓の投影と問いかけ

教師1	<p>この複数のグラフは、Nさんが表示したものです。皆さんが表示したグラフと違うものもありますね。Nさんは、「直線でいいのかな」と悩んでいるのです。色々な関数のグラフを表示できるので、いくつか出てきたのですが、これを見て、皆さんどう思いますか？（散布する点を黄色チョークで囲みながら／図8）点はおよそこの辺りに散布していて、（囲んだ枠の中に赤色チョークで直線をかきながら／図8）直線のグラフであれば、だいたいこのような感じにグラフがなるだろうと考えて求めた人がほとんどだと思いますが、本当にこれでよいのでしょうか。</p>
生徒1	<p><math>y = ax</math>のグラフだと原点を通るはずだけど、直線でも原点は通っていません。他のグラフは直線ではないけれど、枠の中はだいたい同じような感じになっています。</p>
教師2	<p>ここにかけられているグラフは、何本に見えますか？ 3本？ 4本？</p>
生徒2	<p>（グラフを見て）よくわかりません。</p>
教師3	<p>皆さんに気づいてほしいことは、そのことなのです。（生徒のつぶやきを拾って）Aさん、気づいたことを話してください。</p>
生徒3 [A生]	<p>グラフは、直線であっても曲線であっても、点が散布している辺りではグラフがほとんど重なっているから、何本のグラフなのかよくわかりません。</p>
教師4	<p>そうですね。どの関数と見て回帰グラフをかいても、点が散布している辺りは直線、またはほぼ直線に近い曲線になっているのですね。</p>

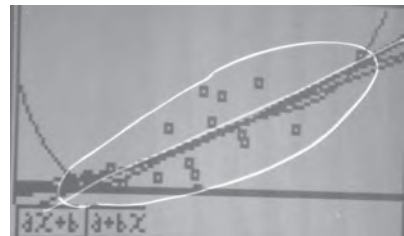


図8 投影したグラフへの加筆

生徒4 [O生]	予測値は約2320個/cm <sup>2</sup> になったよね。
生徒5 [M生]	過去のスギ花粉飛散量を見れば、約4000個/cm <sup>2</sup> 、約5000個/cm <sup>2</sup> などがあるから、少なめだよ。
生徒6 [O生]	え？ そうなの？ 多かった年と比べればそうかも知れないけれど、約300個/cm <sup>2</sup> 、約400個/cm <sup>2</sup> などの年もあるから、これらと比べれば多いということになるよ。
生徒7 [M生]	平均値を求めて比べてみないとはっきりしたことはわからないということか…。



図9 O生とM生の会話の様子

この後、2人はこれまでのスギ花粉飛散量の平均値を求めたところ約2013個/cm<sup>2</sup>となった。多かった年と比べると来年は少なめだといえるが、平均値と比べれば若干多いということになり、O生はワークシートに次のように記述した(図10)。

またK生は、予測値約2320個/cm<sup>2</sup>は昨年より多いが、過去20年間の数値に含めると9番目の多さなので標準的だと、順位を取り上げて判断している(図11)。

スギ花粉飛散量の平均と比べると来年は平均的9位といえる。  
→ 来年は例年通り、その対策も…

図10 O生の記述

予想結果より、来年は二十年中で9位なので、昨年よりは多いが、標準的だと思う。

図11 K生の記述

### ③ 平成24年の花粉症対策の主張

それぞれが予測値を求めて例年と比較して量の多少を判断した後、来年の花粉症対策をまとめた。そして、学級全体で来年の花粉症対策について語り合った。

生徒8 [T生]	予測値は約2320個/cm <sup>2</sup> で、これまでのスギ花粉飛散量と比較するとだいたい真ん中ぐらいなので、花粉症の人はマスクを準備すればよいと思うけれど、少ないわけではないので、花粉症がひどい人は薬を準備しておいたほうが良いと思います。
生徒9 [K生]	来年のスギ花粉飛散量は、ほぼ昨年並みだから、マスクは数多く準備しておいたほうが良いと思います。
教師5	2人が発言してくれた内容は、昨年並みだからマスクは準備しておいたほうが良いということは共通していて、ほぼ同じですね。自分のこれまでの様子を振り返りながら、自分のこととして考えた人はいますか？
生徒10	私は花粉に敏感なので、マスクとメガネを準備しておこうと思います。できれば早めに病院に行って、薬をもらっておくなど予防策を考えておけば、より良いと思います。

## 4 授業の考察

### (1) 授業における生徒の様子から

図1の新聞記事と散布図の点の散布状況から、1次回帰グラフ（線型モデル）になることを暗黙の了解として考えがちだが、散布図の点の散布状況から、線形回帰すればよさそうであることは容易に思いつくからこそ線形回帰の妥当性を考える必要がある。N生が複数のグラフで回帰したことは、結果として線型モデルの妥当性を認めることにつながった。これはモデルの修正のきっかけになることであり、このような追究はグラフ関数電卓を使うからこそ可能になることだと考える。

なお、前述の通り本学級の生徒はグラフ関数電卓の使用経験がほとんどない状況であっても、グラフ関数電卓を自由に使い、追究できる事実を示している（図12）。

O生とM生は、いずれも同じ予測値を得ながらも、量の多少の判断が異なった。M生は過去の多かった年を基準に考え（生徒5）、O生は過去の少なかった年を基準に考えたためである（生徒6）。そして、数値に対する感覚の違いに気づき、過去のスギ花粉飛散量の平均値を求める考えに至った。一方、K生は、順位という観点でとらえている。同じ事象から、同じ数値が得られているにもかかわらず、何を根拠にして考えるかによって、数値に対する感覚も異なる様子がうかがえる。

最終的な「来年の花粉症対策」としては、「平年並みだからマスクを準備しておけばよい」（生徒8・9）、「花粉症がひどい人は、薬を準備しておくべき」（生徒9）、「自分は（予防のための）メガネも準備し、できれば診察を受ける」（生徒10）など多岐にわたった。これらは思いつきで語られたことではなく、統計資料に基づいて数学的処理を行い、数学的モデリングを通して数学的結論を得た上でまとめたことである。したがって、生徒は数学を使って結論を導き、問題解決を行っているため、数学の有用性が認識

されたことと考えられる。



図12 グラフ関数電卓を使った追究

### (2) ワークシートへの生徒の記述から

#### ① 問題解決学習のとらえ

数学の問題を解くことそのものを問題解決の対象とするのではなく、数学の枠を超えたところに本来の目的を据えた。その結果、生徒はグラフ関数電卓を使いながら数学的結論を得て、これに基づいて本来の目的に対する持論をまとめた。

S生の記述（図13）のように、数学を使いながら数学以外のことを語り、まとめている様子は、問題解決学習として大切にしたい側面を示している。このような学習を可能にするには、問題解決学習を広義にとらえ、問題の設定の仕方を検討することが必要である（図14）。

#### ② 表現力の育成

平成24年のスギ花粉飛散量を予測した生徒は、マスクの準備が必要だとか、人によっては薬を準備したほうがよいなどと自分の考えをまとめ、主張した。これは、豊かな表現力の具体的な表れの1つであろう。

なかでもY生は、「時期が来る前に耳鼻科に行って…」と記述し（図15）、W生は「例年の自分の症状を考えながら…」と記述している（図16）。これらは解決の対象とした問題について、これまでの自分自身を振り返りながら、自分について語っている姿である。

これらの生徒の姿から、表現力の育成を目指



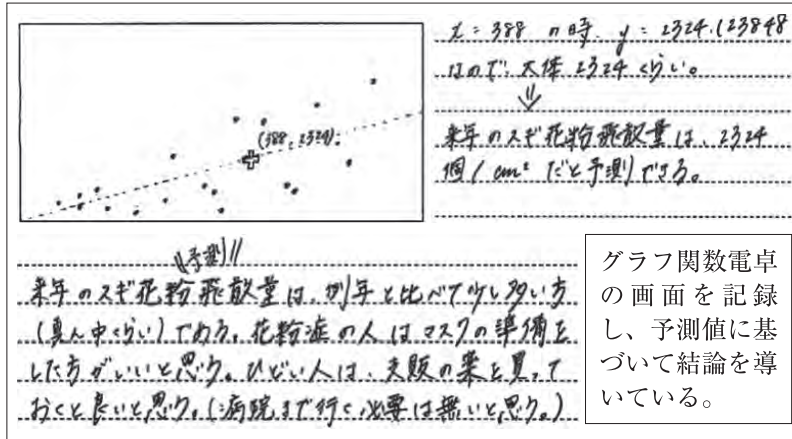


図13 S生の記述

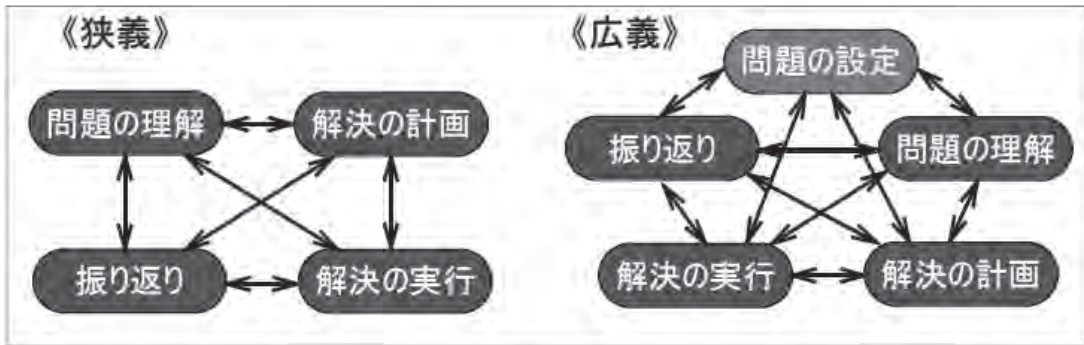


図14 問題解決のとらえの違い

した場合、問題解決を広義にとらえ、問題の設定を数学の枠を超えたところに設けた上で、問題解決学習を仕組むことが有効な手段の1つであるといえるだろう。

③ 数学の有用性の認識

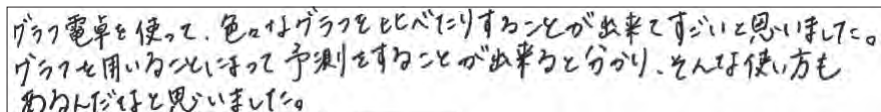
本授業の学習感想として、F生は、「グラフを用いることによって予測をすることができる分かって、そんな使い方もあるんだなと思いました。」と記述している(図17)。これは、グラフはかくことそのものが目的ではなく、何らかの問題を解決するための道具となり得ることを実感して、数学の有用性を認識したことを意味するものととらえられる。このことから、問題解決学習の意味を広義でとらえ、学習を具体化することにより、生徒は数学の有用性を認識するということが示唆された。

例年と比べて少ない。(どちらかという)  
 ↳ マスクだけでい足りないと思うので  
 時期が来る前に耳鼻科 に行つて  
 薬をもらっておく。  
 一応 箱 ティッシュも買い込んでおく

図15 Y生の記述

来年の花粉飛散量は過去のデータと比べて  
 だいぶ真ん中あたりだと思う  
 そろそろひどくなるわけではないが、軽いわけでは  
 ないので、例年の自分の症状を考えながら  
 マスクや薬などの対策を今から考えておくのが  
 良いと思う。

図16 W生の記述



グラフ電卓を使って、色んなグラフを比べたりすることが出来てすごいと思いました。  
グラフを用いたことによって予測をすることが出来ると分かり、そんな使い方も  
わかってほしいと思います。

図17 F生の記述

## 5 結語と今後の課題

現実事象を数学的に分析・解釈することを重視した授業を位置づけることにより、生徒は数学の有用性を認識することができた。特に、問題解決学習をとらえ直し、問題設定そのものを数学の枠を超えたところに設けることの有効性が示唆された。

また、問題を数学の枠を超えたところに設けることにより、生徒は数学を使い、持論をまとめて主張することを具体化し、結果として「広義の表現力」の育成につながった。これらのことから、問題解決学習を広義にとらえることは、生徒の表現力の育成にも大きな影響を与えることが示唆された。

なお、グラフ関数電卓をほとんど使ったことがない生徒を対象に授業を行っていながら、生徒が躊躇なく使って結論を導く姿は、生徒にとってテクノロジーの導入がいかに容易なことかを示している。機材を購入することに関する金銭的な制約はあるが、将来的には活用が一層活発になり、手計算ではあきらめざるを得なかったレベルの高い数学を扱う機会が多くなることを期待したい。

今後の課題として、次のことが挙げられる。

- ・問題解決学習と数学的モデリングの関連性の明確化
- ・表現力の育成を目指した問題解決学習の教材開発の充実

## 〈引用・参考文献〉

- ・新井仁（2005）『事象を読み取る力を高める関数領域の指導のあり方に関する研究－グラフを問題解決の道具として－』．日本数学教育学会誌．第87巻第5号．pp.12-19
- ・小学校算数指導資料 指導計画の作成と学習指導（1991）．pp33-35
- ・文部科学省（2008）『中学校学習指導要領解説 数学編』．（教育出版）