

● 優秀賞

作業を取り入れて考える力をのばす数学の授業 ——正四面体と正四角錐をくっつけると何面体？——

山梨大学教育人間科学部附属中学校 しみずひろゆき 清水宏幸

1 はじめに

生徒達が難しい問題にあたるとすぐあきらめたり、安易にhow toに頼ってしまう傾向があるとよく言われる。なかなか自分で模型をじっさいに作って考えてみようという発想にならないのではないかと考える。ねばり強く考え自分なりの解決策を試行錯誤の上で勝ち取っていくといった経験が少なくなっていることは言うまでもない。そこで模型を実際に作り、手にとって観察したり、模型を積み上げたり、切断してみたり、面を頭の中で移動してみたりと行ったことが可能となる本課題をあえて設定した。作業を取り入れ、立体作りをしてみるとその様相が端的に現れる。生徒にあえて混沌とした状況を与え、そこからなんとか模型を使って解決を図ろうという姿勢の大切さに気づかせたい。その際生徒が自分の課題として探求するよう課題提示が大切である。

これまで生徒は、1年生の空間図形の単元で工作用紙を使って正多面体の模型作り、ポリドロンを使って準正多面体、デルタ多面体などの形状を観察した上で工作用紙を使っての模型作りなどを行った。そしてその模型を観察して正多面体の双対性、オイラーの多面体の定理なども学習した。さらに立方体の体積を3等分する模型作りから立方体を3つの合同な四角錐に分ける模型作りを行ってきた。立体の模型作りを通して生徒達の思考の様相が観察でき、興味深い活動が展開できた。その生徒達が3年生に進級している。

本課題は三平方の定理の学習後に投げかける。この課題は一見したところ、一意的な解を求める単純な問題に見えるが、その解を説明する方法が多様に考えられる。模型作りをさせ、生徒達が考えたアイデアを自分で作った模型で説明させたいと考えているが、最終的には根拠として立体の性質を全体構造と関連させながら、平行四辺形の性質、中点連結定理、図形の移動、切断、投影そして三平方の定理を活用させたいと考える。このようにこれまで学んだことを総動員させて何とか面が平らになることを説明させたいと考える。中学校3年間の図形の学習のまとめの意味もこの課題にある。

本授業では、最初生徒は正四面体と正四角錐(五面体)を組み合わせるので、面が2つ減って7面体ではないかと予想すると思われる。その予想した図をノートにかきそして実際に模型を作って調べてみようと思っていく。模型を作って組み合わせてみると、おおかたの予想に反して組み合わせた面が平らに見える。本当に平らなのかが本時の生徒の課題となっていく。平らであることを模型をうまく使って説明できるようにと考えを深めていくのである。

2 本研究のねらい

1年生のとき、立方体を3つの合同な四角錐に分けようという課題で、生徒達は自分で作った模型を手に取り様々な思考を巡らしながら何とか課題を解決しようとする様相が見

えた。生徒が必要感を感じて作業を始めるとき、生徒達は個性がにじみ出るような一人ひとり異なった活動を始める。作業を重視することによって立体に関する認識を深めることはもちろんのこと思考の様相の一端を観察できるのではないかと考える。また、立体図形を手にとって観察したりする経験を多く与えることによってその立体の構造の理解に役立ち、構成要素の關係に着目できると考える。また、この課題は上述のように三平方の定理を学習した後に設定する。三平方の定理の応用場面として単なる計算問題の延長としてではなく、組み合わせた面がどうして平らになるかを説明する時に、三平方の定理を活用させていくことができれば、空間図形に三平方の定理を実際に応用していく場面として有効であると考ええる。また、三平方の定理の活用に限らず、面が平らになることの説明として、これまで学んだ図形の知識を総動員させることによって中学校3年間のまとめの意味もある。作業を重視した本授業での大切にしたいことは、次の4つである。

- (1) 課題に立ち向かう姿勢・意欲
- (2) これまで学習した知識を総動員すること
- (3) 空間図形を考える時、平面図形の性質をうまく使っていくこと
- (4) 模型作りを楽しむこと

3 指導計画

12モジュール(4時間)
1モジュールは15分

- (1) 導入 模型作り
本時 3モジュール(1時間)
- (2) みんなに説明できるような模型を作ろう
6モジュール(2時間)
- (3) 発表 3モジュール(1時間)

4 指導目標

- (1) 模型作りに意欲的に取り組むことができる。(関心・意欲・態度)
- (2) これまで学習した内容を総動員して、どうして面が平らになるのかを考え、自分なりの考えを得ることができる。(数学的な考え方)
- (3) 考えたことをうまく模型を使って説明することができる。(表現・処理)
- (4) 空間図形の様々な性質、三平方の定理等がうまく活用できる。(知識・理解)

5 本時の授業

- (1) 日時 平成14年11月15日(金)
1:10～1:55
- (2) 場所 山梨大学教育人間科学部附属中学校 3年2組教室 3階
- (3) 題材 課題学習
「正四面体と正四角錐で何面体？」
- (4) 目標・課題に真剣に取り組む、模型を意欲的に作ることができる。
(関心・意欲・態度)
・面と面がくっついて平らになることを模型を使って説明するよう考えることができる。
(数学的な考え方)
- (5) 指導過程(次ページの表参照)
- (6) 評価

生徒の作業中の様子は観察してメモをとり、授業中にどんなことをしているのかを明らかにする。授業後には、どうして平らになるのかの説明を模型の作品と共にレポートにして提出させた。また、生徒にどう考えたかを振り返らせるために、学習感想を書かせた。それを分析しながら、生徒の作品を分類し、生徒一人ひとりがどんな作品を作ったのかをまとめた。後述の6以下にそれらを述べている。

過程	指導内容及び学習活動	予想される生徒の反応	作業について
導入 課題の把握 5分	1 課題の提示 意図的に図を付け加えないで文章だけで提示する。 <div>課題 辺の長さがみな等しい正四角錐と辺の長さがその正四角錐の辺と等しい正四面体がある。この2つの立体を、合同な面ではり合わせると何面体になるでしょうか。</div>	・しばらく考える。	・あくまで模型を見せずに考えさせる。
予想 5分	2 予想する。 ・ほとんどの生徒は七面体 ○自分が頭で考えた立体をノートにかいてみよう。	・面が重なり合うから $4+5-2=7$ なので七面体。 ・ノートにかき出す。 ・2つの立体をくっつけた立体の見取り図をかく。 ・ノートにかいただけではよくわからない。 ・どうも七面体になりそうもない。 ・実際の模型を作ってみよう。	
作業 自力解決 10分	3 実際に模型を作る。 ○比べやすいように、みんな同じ大きさにしよう。 ・各自の作業に入る。	・すぐに作り出す。 ・ノートに見取り図をかき出す。 ・じっと考えて手がつかない。	・1辺は5cm ・まずは工作用紙で作る。
20分	4 五面体になりそうであることを認め、それをみんながわかるように説明してみよう。	・説明するための模型作りを始める。 ～生徒の反応 ○同じ図形を積み重ねていく考え。 ○図形を切断していく考え。 ○面が移動して図形ができると考える。	・中がわからないので透明なプラ板で作ってもよい。
発表 5分	5 ここまででわかったことを発表しよう。	・自分の考えを発表する。	・作った模型をうまく使って説明してみよう。

6 授業の実践

T：今日は大勢の先生方がみんなの一生懸命考える様子を見に来ていただきました。しっかりがんばりましょう。(第57回課題学習)

T：それでは今日の課題です。これまで勉強してきたことを使って、立体同士をくっつけるとどうなるかについて考えてみたいと思います。

(課題を黒板にはって、一度読む)

課題 辺の長さがみな等しい正四角錐と辺の長さがその正四角錐の辺と等しい正四面体がある。この2つの立体を、合同な面ではり合わせると何面体になるでしょうか。

T：意味わかったかな？…わからない人いるかな？大丈夫だね。

よし、まずイメージしてみよう。正四角錐はどのような立体かわかるかな？小池君。

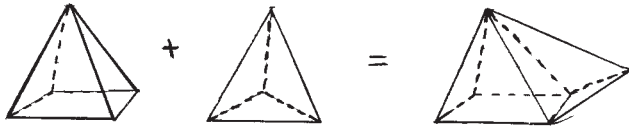
小池：底面が正方形の四角錐。

T：そうだよね。じゃあ正四面体はわかるかな？長田さん。

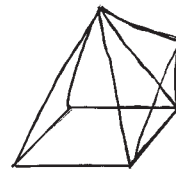
長田：正三角形4つでできた立体です。

T：今のでわかる？(多くの生徒がうなずく)

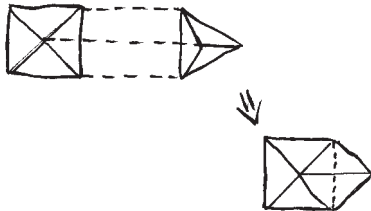
T：じゃあ、イメージしてみよう。まず辺の長さが全て等しい正四角錐をイメージしてください。その立体は片隅において、いい？今の正四角錐と等しい辺をもっている正四面体をイメージしてください。この2つの立体の面をピッタリと合わせ



●図1／高野さん他多くの生徒



●図2／見取り図で描いている長田君



●図3／平面図で描いている小池君

ます。さて、何面体になるでしょうか。

(少し時間をおいて)

T：どう？何面体になりますか。

S：(沈黙) 手塚と柳澤がノートに図をかき出していたので。

T：そこでもうノートに絵をかき始めた人があるので、みんないい。ノートを出してくっつけた立体を描いてみてください。何面体になるか予想するぞ。

(生徒の観察)

多くの生徒は、正四角錐をかき、その横に正四面体を描いている。(図1, 2, 3)

(望月と柳澤は、作っていいかとしきりに聞くので「いい」と言うので模型を作り始めた。)

T：何面体になるか聞いてみたいです。

S：八面体とか七面体と声が挙がる。

T：五味さん、どう？

五味： $5 + 4 - 2 = 7$ なので七面体だと思います。(「 $5 + 4 - 2 = 7$ 七面体」と板書)

T：どうしてそう思いましたか？五味さん。

五味：正四角錐は5面体、正四面体は4面で、くっつく面は2つだからそれをひきました。

T：七面体だと思う人？

S：多くの生徒が手を挙げる。

T：他にありますか？

佐野：先生、はやく作っちゃいましょうよ。

望月：どうせ作ってみるんでしょ。

T：じゃあ、みんなの予想は七面体でいいですか。

T：いい、ちょっとこっちを見て。もうすでに作っている人もいるみたいなので実際に正四角錐と正四面体を作ってみたいと思います。望月君、1辺を何センチにしましたか？

S：えっ、5センチ。

T：望月君が5センチでやっているの、みんなもそれに合わせて1辺を5センチで作っててください。それから今日は透明なプラ板を用意しましたので、工作用紙とどっちを使ってもかまいません。でもこのプラ板は、非常に高いんです。無駄使いをしないように使ってください。何かわからないことがありますか？じゃあ始めて下さい。

(ほとんど全員が正四角錐と正四面体は作り終えた)

はやい生徒は、正四角錐と正四面体ををくっつけた1つの立体を作り始め、どうして平らかを考え始めている。

1：45

T：じゃあ、いいですか。作ってみて何面体になったでしょうか。はい、望月君。

望月：五面体です。

T：五面体だって言うんですけど、五面体になった人。

S：多くの生徒が手を挙げる。
 T：他はいますか？（手は挙がらない）
 小池：やっぱり、予想が当たった。
 T：え、ここで小池が予想が当たってたってつぶやいているけど。不思議ですよね。
 S：先生、みんなの前で言わなくてもいいじゃないですか。（笑）
 T：いいじゃん。（立体を取り出して）これとこれを合わせると五面体になるということは、ここの面が平らになるということですよね。本当にこの面は平らになるのでしょうか。これを言葉や文字だけで、証明するのは立体だから難しいですよ。だから一目見てみんなが納得できるように、模型を作って説明してもらいたいです。もう何人かの人、そっちの課題に入っているんだけど、模型で説明できるようにいろいろなアイディアを出してもらいたいと思うんですけど。いいですか？それじゃあ時間までがんばって下さい。

S：ほとんどの生徒はまず2つの立体をつなげた立体を作る。

佐藤 展開図から考える。模型を切る発想へ
 望月 つなげた立体をたくさん作り積み上げる

準正多面体へ

長田よ、小池、佐野

積み上げ 大きい正四面体、正四角錐へ

塩谷 面の平行移動

荻野、興水

平行四辺形の証明へ

山寺、長田か

立体の内部に面を見出し証明へ

柳澤 正四角錐と正四角錐の間に正四面体が入ることを発見

飯野 最初の模型作りの後、何もしないでずっと考え込んでいた。最後の5分になって作りだした。

それでは、時間になってしまいました。次の時間続きをやりたいと思います。作業が途中だと思いますので、家に帰ってやってきてもかまいません。工作用紙やプラ板がほしい人は、前に取りに来てください。それでは、終わります。

2，3時間目

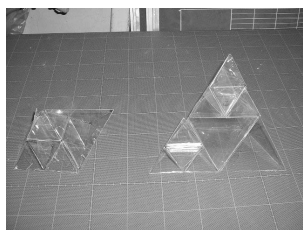
前時の続きで、模型作りを行う。

4時間目

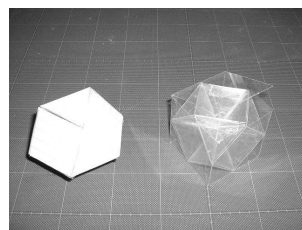
模型作りの仕上げ みんなの模型を発表し合う。



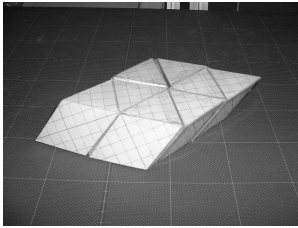
●写真1／作業風景



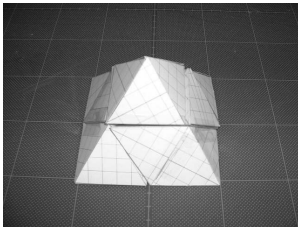
●図4／正四面体①，正四角錐②へ積み上げ



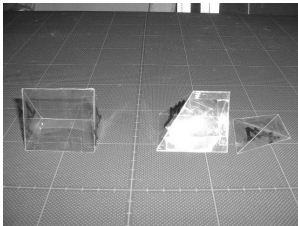
●図5／準正多面体③への積み上げ



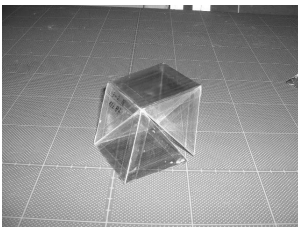
●図6／空間をうめつくす④



●図8／図4から積み上げていく すると正四角錐ができる⑦



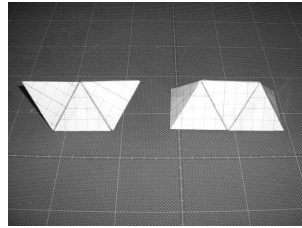
●図10／右側の切断した三角錐を左側につけると右側のような三角柱となる⑩



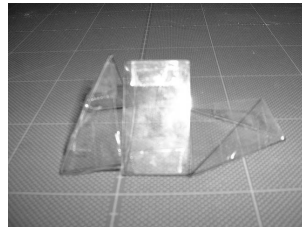
●図12／図5の立体を2つにつけると正方形を斜めに平行移動したと見られる⑫



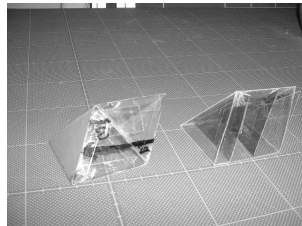
●図14／手前の面をきった2つの直線が平行であることを証明し、面が平らであることを導いた⑬



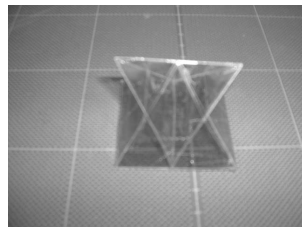
●図7／正四面体の間に正四角錐⑥左 正四角錐の間に正四面体⑥右



●図9／切断すると切り口が合同な二等辺三角形となる⑨



●図11／面を平行移動したと考える 移動した後は平面になる⑪



●図13／正四面体と正四角錐を内側にはめると面が平らであることがわかる⑬

積み上げ型 荻野④ 遠藤⑥ 弦間⑤
望月③ 長田よ② 佐野⑦

面の平行移動 塩谷⑩ 村上⑪

立体を切断 佐藤⑨ 柳澤⑧

2つの立体をはめ込む 興水⑫

証明 長田か⑬

を発表した。

三平方の定理での証明を教師側から紹介
ノートに自分がどのように証明したかを説明
させ、学習感想を書いて提出

7 生徒の学習感想

〈積み上げ型〉

遠藤 1つ目は見ての通りはめるだけ。ピタリはまるので平面ということが見ただけでわかった。2つ目は同じようにはめていくと正四角錐に戻るのびったり平面になっていることがわかった。なんか楽しかったので計算上でと実際の差を確かめるようなこんな問題をもっとやってみたくなった。2つの正四角錐の間に正四面体がはまる。

積み上げ①⑥

長田よ 立体の原理がわかった。同じ立体をいくつもつけるともとの立体に戻ることがわかった。 積み上げ②

望月ひ とりあえず正三角形が6つつながるように正四角錐と正四面体をくっつけた。それは数研でポリドロンで遊んでいる時に三角形を6つつけたら平面になっちゃうといわれたことがあるからで、それをしたらもっといろいろしろと言われたので正六面体ができ。楽しかったけど、先生にもっと何かあるだろうって言われると困った。

積み上げ③

早川 かなり頭を使った。神宮司さんとやったからできたけど、一人じゃ絶対にできないと思った。相当難しかった。

積み上げ③

武井 実際に立体を作ったので深く考えられた。今まで考えてきたことをもう一度考えて作れた。いろんな視点から見て、小さな立体で証明した。大きい立体でも証明できることがわかった。

積み上げ③

手塚 文で表される図形を客観的に判断すると実際とはちがうものができる。この学習で実際に図形を作り証明することの重要性を改めて知った。またこのよ

うな機会があれば自分でいろいろな証明をしたい。 積み上げ③

神宮司 初めは課題が難しくて、何をどうすればいいのか全然わからなかったけど、少しずつ模型ができてよかった。でも私の証明の場合は立体がないと証明できないので、次に同じような課題を解くときは、文章で証明したい。

積み上げ③

小林ひ 図形を実際に作って証明できて楽しく図形について学べた。今回積み上げて1つの図形を作ったが、他の証明もぜひやってみたい。1つの図形の1辺を平行移動させたり、中に合同な図形を作って、平らを証明したりなどもやってみたい。 積み上げ③

小幡 初めのうちは本当に訳がわからなかった。みんながすいすい作っているので焦ってしまったが、とりあえずこまめでたどり着いた。みんなは「角度」のことや「平行」などハイレベルな話に進んでいたが、「切れば平面」なんて単純なことでもとてもロウレベル。なんだか悔しい感じだ。もっと深く理解したい。 積み上げ③

横谷 図形を立体で作るのは久しぶりで楽しかった。でもどこで切れば（つなげれば）よいのかがよくわからなかった。みんながやっているのを見てあっ！と思いついたりした。いろいろなやり方があってとてもおもしろかったし、自分で作ってみようと思った。これから他にどんな方法があるのか考えて作ってみたいと思う。 積み上げ③⑤

千野 今回の図形の問題で準正多面体に垂線を引いて切り出していくと最初に作った図形に戻り、三次元の奥元から平行四辺形を作り出すことができる。

積み上げ④

荻野 “平ら”というのを証明するというの

は初めての体験でどう証明していいのか確信はないけれど、いろいろな図形を作ることができて、同じ形からそのようにたくさんの図形ができることがおもしろかった。考えてから、その形をすぐ図形にしてみるというのは今まででなかなかすることがなかったことなのでわからないことだらけだったけれど、終えることができて達成感が満ちてよかった。 積み上げ④

佐々木 難しかった。見た目で同じ形というのはわかるけど、それを証明しろと言われると全然わからなくなってしまった。立体でできて紙の上で説明するのも難しくて証明って本当に難しいと思った。今回の証明は今までにやったことがいっぱいできて今までの勉強って大切だったんだなあと思った。立体を考えるときは、頭の中で考えるんじゃないくて、実際に作ってみた方がいろいろ思いつくことがわかった。

積み上げ その他

佐野 正四面体と正四角錐を組み合わせることで、大きな正四面体と正四角錐のどちらかができる。合同な面を組み合わせることでいろいろな図形ができるのでおどろいた。三平方を自分では使わなかったので使えたらよかった。 積み上げ⑦

〈切断〉

柳澤 けっきょく中の二等辺三角形が平行移動しているので平らになる。最初はこういう風に証明するのかわからなくてぜんぜんだめだった。今よく考えるとすごい単純だということがわかった。 切断⑧

佐藤 初めはこの問題に見事にひっかかってしまった。僕は切断する方法でやったが、他に積み上げ型などいろいろな考

えがあった。試験では模型を使うことができないので、垂線や平行を使った証明の方がよいと思う。とても面白い問題だった。 切断⑨

渡辺 最初の予想と違い五面体になることにはびっくりしたが、それを証明するのに何をすればいいかわからなくなってしまい出来るのに時間がかかったが、自分の作品とクラスの意見を聞き平面であることがわかった。この課題は難しかった！ 切断⑨

〈平行移動〉

塩谷 今まで証明といえば、紙にかくものしかうかばなかったが、この学習を通して図形を作って証明することができることがわかった。いろいろな証明の仕方(図形)を見つけられて図形に対する見方が変わったように思える。

平行移動⑩

中島 とても楽しい授業だった。しっかり自分の考えが証明できてよかったと思う。家でももう少しねってみて他の証明の仕方を考えてみたい。

切断と平行移動⑩

村上 これを証明するのは難しかった。だけど、できたときはすごくうれしかった。発表でたくさんの人の証明をきけてよかったです。どれもちゃんと根拠があってなっとくするものだった。

平行移動⑪

〈2つの立体をはめ込む〉

高野 すごく証明するのに頭と時間を使った。初めはどうすればいいのかほとんどわからなくて…。でも何となくできてもまだたりないって言われて「何が？」って思った。みんなの発表を聞いたたら、いろんなやり方があるってすごくおもしろかった。もっと違うやり方もしたか

った。 2つの立体をはめ込み⑫

野村 初めて自分の手で図形を作り証明したが、とても難しかった。頭を使ったので楽しかった。クラスメイトのいろいろな考えもおもしろかった。大学入試も意外と雑なんですね。テストをもう一度考えるのが大切だと思った。これからいろいろな考えようと思う。

2つの立体をはめ込む⑫

〈証明〉

長田か 私は(多分)一番楽な証明をしたと思うが、他にもいろいろな証明があると思うのでみてみたい。アメリカの大学生は実際にこれを作ってみるなんてすごい!!疑問に思ったら試してみることが大切だと思った。 ⑬

山寺 皆それぞれに多様な証明方法があって興味深かった。1つの直線から垂直かつ平行にのびる直線がそれぞれの面に垂直に交わるので、その2つの面は平らになるということから証明した。

垂線と平行線で証明

8 授業の考察

授業を行う上で、生徒に以下の4つの面をねらった。

- (1) 課題に立ち向かう姿勢・意欲
- (2) これまで学習した知識を総動員すること
- (3) 空間図形を考える時、平面図形の性質をうまく使っていくこと
- (4) 模型作りを楽しめること

(1)について

事前の指導案検討の折に、この課題でどれくらいの生徒が解決にいたるかとか聞かれ、私は10人ぐらいであると答えた。先生方の反応は、難しい課題なのでそれほど多くの生徒が

解決できるのかと疑問の声が挙がった。学習感想をみても多くの生徒が、最初何を証明していいのかわからず戸惑っている様子うかがえた。そこですぐあきらめるのではなくねばり強く考える姿勢を育てることが大切である。実際に模型を作り、手にとって考えることによって授業の1時間の中でも予想を超えた多くの生徒が、何をしたいのかがみえてきて思考が進んでいた。難しいからといって課題を投げ出してしまうような生徒がいなかったことはよかった。また、模型を実際に作り、それを手にとって観察することによってどの生徒も何らかの解決の糸口を見つけることができたことが辛抱強く考えることができた原因であると考ええる。

(2), (3)について

学習感想の中に、「いろいろな面から見て」や「いろんなやり方」や「いろんな考え」という言葉が多く出ている。完成した模型で生徒達に自分の解決の方法を発表し合う中で、これまで学習した平面図形の知識をうまく使っていくことがよくわかったようである。また、論理的にきちんとした証明を求めるのではなく、厳密な証明にはなっていないでも生徒達の経験の中で子どもらしい発想で模型を根拠にして説明することができることをねらいとした。そのため、とにかく自分達の発想で説明させた。下手なやり方で、論理的には穴があるものも多いのであるが、その中で生徒の言葉を最大限使って模型で説明させた。残念ながらこのクラスからは、三平方の定理を使った証明方法は出てこなかったもので、私の方で最後に提示した。平らであることをどう証明するかを考える時、2面角の和が 180° になること、平行移動した時に動いた辺は平行になること(平行な2直線で平面ができること)平行四辺形など平面図形は1平面上にあることなど、これまでの学習を1つ高い位置で見直せる機会となった。例えば、1平面

上にある図形が平行四辺形であることを証明するだけであれば、2年生の時に習った平行四辺形になるための条件で証明ができる。しかし、空間の中では2つの正三角形をくっつけた時、折れ曲がっていないということ（1平面上にあるということ）を最初に言わなければならない。こういったことを気づかせながら証明させることがこの課題を通して行うことができた。三平方の定理、平行四辺形になるための条件、空間の中での面の関係、平行や垂直、平行移動、立体の切断、立体を積み上げることなどこれまでに学んだ学習をまとめ、活用することができたと考える。

(4)について

最初とはまどいを持って作業を始めたが、模型づくりをしながら発想が広がっていくと楽しく、生徒同士考えを交流させながら模型作りをしていた。この光景は普段の授業の中ではあまり見られない非常によい生徒の表情であった。全て1辺を5cmとしたことで周りの友達と作った図形を集めて組み合わせたりする姿があり、意見交流しながら考えを深める姿があった。そのため図形を積み上げて説明する生徒が多く、授業が盛り上がった。

9 今後の課題

この授業は、45分間では完結できない内容である。まして作業をやらせれば時間がかかるのは当然である。そこで授業内容に柔軟に対応できる時間が組めればよいと考える。60分という授業が組めれば対応できるのではないかと考える。

またこういった作業をさせている最中の教師の役割も大切となる。生徒がどんなことをやっているのかを観察することが大切となるが、いきづまっている生徒に内容を教えるのではなく、自分の考えていることが何なのか明確にさせてやるよう投げかける言葉に注意

しなくてはならない。今後教師の働きかけや投げかける言葉についても工夫していきたい。ただ個別に考えさせる時間をとって作業させることも大切であるが、作業の中で子ども達のいいアイデアをどう全体に共有化させていくか教師の役割が重要になっていく。

この課題はすでに紹介されている課題である。本校の研究では教材開発も1つの大きな課題となっている。今後、作業を取り入れた本校の生徒にあった独自の課題を開発できたらと考えている。

〈参考文献〉

太田伸也（2000）「観察は思考の1つの形である」教育科学数学教育 5 No.510 pp.52－pp.56 明治図書
新編 新しい数学 1年(2000)
平成8年検定済 教科書・指導書 東京書籍
杉山吉茂編著(1991)「ときにはこんな授業を課題学習」 pp.154－pp.175 東京書籍
半田 進編著(1995)「考えさせる授業 算数・数学 実践編」 東京書籍
松原元一編著(1986)「考えさせる授業 算数・数学」 東京書籍